Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 3 04.11.21

Aufgabe 1 (Kleiner Fermat in Aktion, 5 Punkte)**.**

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n, 35) = 1$. Zeigen Sie, dass $n^{12} \equiv 1 \pmod{35}$.

(b) Sei $p > 5$ eine Primzahl und k eine positive ganze Zahl $< p$. Zeigen Sie, dass die Dezimalentwicklung von $\frac{k}{p}$ aus $p - 1$ sich wiederholende Ziffern besteht.
Tipp: Finde ein $a \in \mathbb{Z}$ sodass
$$\frac{k}{p} = \frac{ka}{10^{p-1} - 1}.$$

Aufgabe 2 (Mal wieder eine Aufgaben zu Primzahlen, 5 Punkte)**.**

(a) Sei $n > 2$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie die Existenz einer Primzahl p für die gilt $n < p < n!$. Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.
Tipp: Benutzen Sie "Euklids Trick" oder untersuchen Sie die Teiler von $n! - 1$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es keine Primzahl a gibt mit $n! + 2 \leq a \leq n! + n$. Folgern Sie, dass es beliebig große "Primlücken" in den natürlichen Zahlen gibt.

Aufgabe 3 (Satz von Wilson, 5 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass $437 \mid (18! + 1)$.

(b) Sei $a \in \mathbb{Z}$ sodass gilt
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{25} = \frac{a}{25!}.$$
Bestimmen Sie $a \pmod{13}$.

Aufgabe 4 (Nochmal Satz von Wilson, 5 Punkte)**.**
Sei p eine ungerade Primzahl. Seien $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ und $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_p\}$ zwei vollständige Restklassensysteme modulo p. Zeigen Sie, dass die Menge $\{a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_pb_p\}$ kein vollständiges Restklassensystem modulo p ist.

Abgabe: Am kommenden Freitag, den **12.11.21**, bis um 12:00 digital auf OLAT.