Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 4 12.11.21

Aufgabe 1 (Untere Schranke von $\pi(x)$, 5 Punkte)**.**
Für eine reelle Zahl x bezeichne $\pi(x)$ die Anzal von Primzalen mit $p \leq x$. In dieser Aufgabe geben wir eine (naive) untere Schranke für $\pi(x)$ an und folgern, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

(a) Zeigen Sie, dass sich jede ganze Zahl $n \neq 0$ eindeutig schreiben lässt als $n = k^2 \cdot \ell$ für eine positive ganze Zahl k und eine quadratfreie ganze Zahl ℓ.

(b) Zeigen Sie, dass die Mächtigkeit der Menge

$$S(n) \coloneqq \{(k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \mid \ell \text{ ist quadratfrei und } k^2\ell \leq n\}$$

gleich n ist.

(c) Überlegen Sie sich, dass wenn $(k, \ell) \in S(n)$, dann gibt es
  (i) höchstens $\sqrt{n}$ Möglichkeiten für k und
  (ii) höchstens $2^{\pi(n)}$ für ℓ (unabhängig von k).

(d) Zeigen Sie, dass $\#S(n) \leq 2^{\pi(n)}\sqrt{n}$ und beweisen Sie damit, dass die folgende untere Schranke existiert:

$$\pi(n) \geq \frac{\log(n)}{2\log(2)} \quad \text{für } n \geq 1.$$

(e) Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 2 (*abc*-Vermutung, 8 Punkte)**.** Wir nennen eine Primzahl p *Wieferich-Primzahl*, wenn $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Ansonsten nennen wir p eine *Nicht-Wieferich-Primzahl.*
Angenommen, die *abc*-Vermutung gilt. Sie sollen in dieser Aufgabe daraus folgern, dass es unendlich viele Nicht-Wieferich-Primzahlen gibt.[1]

Sei p eine ungerade Primzahl. Für einen Beweis (per Widerspruch) können Sie der folgenden Anleitung folgen.

(a) Sei $p > 2$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $m > 0$ existiert, sodass $p \mid 2^n - 1$ genau dann gilt, wenn $m \mid n$. Wir nennen dieses m die (multiplikative) Ordnung von 2 mod p und schreiben $m = \mathrm{ord}_p(2)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $p \mid 2^n - 1$ gilt:

$$p^2 \mid 2^n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 \mid 2^{nk} - 1 \text{ für ein} k \geq 1 \text{ mit } p \nmid k.$$

Tipp: Überlegen Sie sich zuerst, dass für alle $a \in \mathbb{Z}, k \geq 1$ gilt

$$(1 + ap)^k \equiv 1 + kap \pmod{p^2}.$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$ und $p \mid 2^n - 1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$p^2 \mid 2^n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad p \text{ ist Wieferich Primzahl.}$$

Tipp: Beachten Sie, dass gilt $m \coloneqq \mathrm{ord}_p(2) \mid n$ und $m \coloneqq \mathrm{ord}_p(2) \mid p - 1$ und nutzen Sie (mehrmals) (b).

---

[1] *Bemerkung:* Es sind nur zwei Wieferich-Primzahlen, nämlich 1093 und 3511, bekannt. Die Behauptung aus der Aufgabe ist also gar nicht überraschend. Es gibt trotzdem keinen Beweis für die Unendlichkeit der Menge der Nicht-Wieferich-Primzahlen ohne Annahme der der *abc*-Vermutung.

(d) Sei n ein Produkt aus Wieferich-Primzahlen. Schreibe

$$2^n - 1 = w_n v_n,$$

wobei alle Primteiler von w_n Wieferich-Primzahlen und alle Primteiler von v_n Nicht-Wieferich-Primzahlen seien. Folgern Sie aus den bereits gezeigten Aufgabenteilen:

(i) v_n ist quadratfrei und

(ii) in w_n kommt jede Primzahl mindestens doppelt vor.

(e) Sei N eine ganze Zahl, in der jeder Primfaktor mindestens doppelt vorkommt. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Rad}(N) \leq N^{1/2}.$$

(f) Angenommen, es gibt nur endlich viele Nicht-Wieferich-Primzahlen. Folgern Sie, dass es eine Schranke v von v_n gibt.

(g) Angenommen, es gelte die abc-Vermutung für eine $1 > \varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass w_n unabhängig von n beschränkt ist und folgern Sie einen Widerspruch.
Tipp: Betrachten Sie das abc-Tripel $(1, 2^n - 1, 2^n)$.

Aufgabe 3 (Zahlentheoretische Funktionen, 4 Punkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n sei mit $\omega(n)$ bezeichnet, wobei $\omega(1) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $2^{\omega(n)}$ eine multiplikative Funktion ist.

(b) Es sei $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ die Teileranzahlfunktion $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$. Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt:

$$\tau(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}.$$

Aufgabe 4 (Zahlentheoretische Funktionen, 3 Punkte)**.** Zeigen Sie:

$$\sum_{d|n} \tau(d)^3 = \left(\sum_{d|n} \tau(d) \right)^2.$$

Tipp: Schreiben Sie dies als Gleichung arithmetischer Funktionen. Zeigen Sie dann, dass beide Seiten multiplikativ sind. Berechnen Sie zum Schluss die Werte bei Primzahlpotenzen.

Abgabe: Am kommenden Freitag, den **19.11.21**, bis um 12:00 digital auf OLAT.