Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 5 19.11.21

Aufgabe 1 (Unendlich φ-le Primzahlen, 3 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die Eulersche φ-Funktion $\varphi(n)$ für $n \geq 3$ gerade ist.

(b) Nehmen Sie an, es gibt nur endlich viele (paarweise verschiedene) Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und betrachten Sie $m = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$. Zeigen Sie, dass dann $\varphi(m) = 1$ gelten muss. Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Aufgabe 2 (Rechenaufgabe – Kettenbrüche rationaler und irrationaler Zahlen, 5 Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie die Kettenbruchentwicklung von $\frac{90901}{68845}$. Vergleichen Sie diese mit dem euklidischen Algorithmus zur Berechnung des ggTs von 90901 und 68845.

(b) Stellen Sie $-\frac{6}{17}$ als Kettenbruch mit ganzen Zahlen dar.

(c) Bestimmen Sie den Wert von $[1, 2, 3, 4, 5]$.

(d) Stellen Sie $\sqrt{7}$ als Kettenbruch mit ganzen Zahlen dar.

(e) Bestimmen Sie den Wert von $[5, 5, 5, \cdots]$

Aufgabe 3 (Endliche Kettenbrüche, 4 Punkte)**.** Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_i \geq 1$ für $i > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir wie in der Vorlesung

$$M_n = \begin{pmatrix} p_n & r_n \\ q_n & s_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so dass $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ gilt. Zeigen Sie folgende Behauptungen für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = \frac{p_n}{p_{n-1}}$.

(b) $[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1] = \frac{q_n}{q_{n-1}}$

Aufgabe 4 (Transzendente Zahlen, 5 Punkte)**.** Sei $\varepsilon > 0$ und sei α eine irrationale Zahl. Angenommen die Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ besitzt unendlich viele Einträge mit $a_{n+1} \geq q_n^{\varepsilon}$, wobei q_n der Nenner des n-ten Näherungsbruchs von α bezeichne.

(a) Finden Sie ein Beispiel einer irrationalen Zahl, die nicht die obige Bedingung erfüllt.

(b) Beweisen Sie, dass $\left[1, 10^{1!}, 10^{2!}, 10^{3!}, \ldots\right]$ die obige Bedingung erfüllt.

(c) Zeigen Sie, dass wenn α die Bedingung erfüllt, so ist α transzendent.
Tipp: Nutzen Sie das Thue-Siegel-Roth Theorem.

Aufgabe 5 (Quadratische Irrationalzahlen, 3 Punkte)**.** Sei $d \geq 2$ eine positive ganze Zahl. Berechnen Sie die Kettenbruchentswicklung von $\sqrt{d^2+1}$ und $\sqrt{d^2-1}$.

Abgabe: Am kommenden Freitag, den **26.11.21**, bis um 12:00 digital auf OLAT.