Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik

Prof. Dr. Jakob Stix
Theresa Kumpitsch

Elementare Zahlentheorie

Wintersemester 2021/22

Übungsblatt 6 26.11.21

Aufgabe 1 (Lösen der Pellschen Gleichung - Beispiele, 4 Punkte)**.**
Bestimmen Sie eine nicht-triviale Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ (d.h. $(x, y) \neq (1, 0)$) der Pell-Gleichung $X^2 - dY^2 = 1$ für

(a) $d = 2$, (b) $d = 7$, (c) $d = 13$, (d) $d = 19$.

(Der Rechenweg zur Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ muss nicht angegeben werden.)

Aufgabe 2 (Lösen der Pellschen Gleichung - Struktur der Lösungsmenge, 6 Punkte)**.** Sei $d > 0$ kein Quadrat. Gegeben die Pellsche Gleichung

$$X^2 - dY^2 = 1 \tag{*}$$

mit minimaler positiver Lösung (a, b). Zeigen Sie, dass die Menge der ganzzahligen Lösungen (x, y) von (*) geben ist als

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \text{ Es gibt ein eindeutiges } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x + \sqrt{d}y = \pm(a + b\sqrt{d})^n\}.$$

Dazu sollen Sie wie folgt vorgehen:

(a) Zeigen Sie, dass für Lösungen $(x, y), (x', y')$ von (*) gilt:
- $(x + \sqrt{d}y)^{-1} = x - \sqrt{d}y$ und $(x, -y)$ ist ebenfalls eine Lösung von (*),
- $(xx' + dyy', xy' + x'y)$ ist ebenfalls eine Lösung von (*).

(b) Machen Sie sich klar, dass die explizite Formel $z_n = x_n + \sqrt{d}y_n = (a + b\sqrt{d})^n$ die Rekursion

$$x_0 = a, y_0 = b$$
$$x_{n+1} = ax_n + dby_n$$
$$y_{n+1} = bx_n + ay_n$$

liefert und zeigen Sie dass die so definierten Tupel (x_n, y_n) die Pellsche Gleichung lösen.

(c) Folgern Sie, dass die obige Rekursion bereits die Menge aller Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $x, y \geq 0$ beschreibt, d.h. dass für jede weitere nicht-negative Lösung (x, y) gelten muss $x + y\sqrt{d} = (a + b\sqrt{d})^n$ für passendes n.
Tipp: Bemerken Sie zunächst, dass $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_n < \ldots$. Angenommen (*) hat eine weitere Lösung (x, y), sodass $z = x + \sqrt{d}y$ nicht dieser Bauart ist. Dann muss es einen Index m geben, sodass $z_m < z < z_{m+1}$. Nutzen Sie (i) und (ii) um einen Widerspruch (zur Minimalität der Lösung (a, b)) herzuleiten.

Bemerkung zu Aufgabe 1: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine Lösung (x, y) von (*) ein Näherungsbruch aus der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ sein muss (Proposition 18.4.). Es wurde bewiesen, dass $\sqrt{d}$ eine Kettenbruchentwicklung der Form $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{r-1}, 2a_0}]$ besitzt. Aus dem Beweis von Satz 18.13 lässt sich folgern, dass für $n \geq 0$ die Paare

$$(a_n, b_n) = \begin{cases} (p_{(n+1)r-1}, q_{(n+1)r-1}) & \text{wenn } r \text{ gerade} \\ (p_{2(n+1)r-1}, q_{2(n+1)r-1}) & \text{wenn } r \text{ ungerade} \end{cases}$$

Lösungen von (*) sind. Wir können[1] nachrechnen, dass für diese Paare gilt

$$a_n + \sqrt{d}b_n = (a_0 + b_0)^n$$

und in der Tat alle Lösungen von (*) dieser Form sind. Insbesondere lässt sich die minimale positive Lösung aus Aufgabe 1 als (a_0, b_0) aus der Kettenbruchentwicklung bestimmen.

[1] Machen wir an dieser Stelle aber nicht

Aufgabe 3 ("Anwendung" der Pell-Gleichung, 2 Punkte). Zeigen Sie, dass es unendliche viele Tripel aufeinanderfolgender positiver ganzer Zahlen gibt, die sich als Summe zweier Quadrate schreiben lassen.
Tipp: Das erste Beispiel ist $8 = 2^2 + 2^2, 9 = 3^2 + 0^2, 10 = 3^2 + 1^2$. Versuchen Sie eine Pellsche Gleichung zu finden, aus dessen Lösungen (x_n, y_n) sich passende Tripel konstruieren lassen. (Vorheriges Beispiel korrespondiert zur minimalen positiven Lösung)

Aufgabe 4 (Negative Pell-Gleichung, 4 Punkte).

(a) Sei $d > 1$ kein Quadrat. Wir betrachten die *negative Pellsche Gleichung*

$$x^2 - dy^2 = -1 \tag{**}$$

Zeigen Sie: Die Gleichung (**) besitzt eine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}$, wenn die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$ eine ungerade Periodenlänge r hat.

(b) Zeigen Sie, dass (**) keine Lösung besitzt, wenn d einen Primfaktor p besitzt mit $p \equiv 3 \pmod 4$.

Bemerkung zu Aufgabe 3: Aufgabe 4 (a) ist sogar eine Äquivalenz. Angenommen (**) ist lösbar, also r ungerade. Analog zur Bemerkung zu Aufgabe 1 gilt für die negative Pell-Gleichung: Die positive Minimallösung ist gegeben durch $x_0 = p_{r-1}$ und $y_0 = q_{r-1}$ und jede positive Lösung ist der Form $x = p_i, y = q_i$ für $i = mr - 1$ mit m ungerade. Dies dürfen Sie in der nächsten Aufgabe ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 5 (Unendlich vielen Primzahlen auf die negative Pell-Gleichung rücken, 4 Punkte). Angenommen, es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_s$, wobei $p_1 = 2$. Wir setzen nun das Produkt aller ungeraden Primzahlen $b = \prod_{i=2}^{s} p_i$.

(a) Folgern Sie, dass $b^2 + 1$ eine ungerade Potenz von 2 ist, d.h. $b^2 + 1 = 2^{2k+1}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Folgern Sie weiter, dass $x = b, y = 2^k$ eine Lösung der negativen Pell-Gleichung

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

ist.

(c) Sei p_n/q_n der n-te Näherungsbruch der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$. Zeigen Sie, dass q_{2n} für alle $n > 0$ eine ungerade Zahl > 1 sein muss.

(d) Folgern Sie $\frac{b}{2^k} = \frac{p_0}{q_0}$ und damit $b = 1$. Widerspruch!

Bemerkung zu Aufgabe 4: Die Folgerung $b = 1$ bekommt man auch billiger. Aufgabenteile (b)-(c) dürfen durch eine andere Argumentation ersetzt werden.

Abgabe: Am kommenden Freitag, den **03.12.21**, bis um 12:00 digital auf OLAT.
