Aussagenlogik, Beweistechniken und Quantoren

Erklärung

Wahrheitstafeln

In der Mathematik versteht man unter einer Aussage ein sprachliches Gebilde, welches einen Sachverhalt beschreibt und nur entweder „wahr“ oder „falsch“ ist. Um zu prüfen wie zwei Aussagen zueinander stehen, verwenden wir *Wahrheitstafeln*. Wir zeigen dies anhand der wichtigsten Grundbegriffe der Aussagenlogik. Es seien A und B immer Aussagen.

	Negation	**Konjunktion**	**Disjunktion**	**Implikation**
Bezeichnung:	$\neg A$	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \Rightarrow B)$
Ausgesprochen:	„*nicht* A“	„A *und* B“	„A *oder* B“	„A *impliziert* B“

Wahrheitstafel:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
f	w	f
w	f	f
f	f	f

A	B	$A \vee B$
w	w	w
f	w	w
w	f	w
f	f	f

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
f	w	w
w	f	f
f	f	w

A und B heißen *äquivalent*, wenn $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ gilt, d.h. A und B haben den gleichen Wahrheitswert. Man schreibt $A \Leftrightarrow B$. Man sagt auch, dass A *genau dann* wahr ist, *wenn* B wahr ist. In der Praxis zeigt man i.d.R. die beiden Implikationen (die „*Hinrichtung*“ und die „*Rückrichtung*“) separat.

Erklärung

Satz. Seien A und B Aussagen. Dann gilt:

(i) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ (Doppelnegationsregel)

(ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ und $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (De Morgansche Gesetze)

(iii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontrapositionsregel)

(iv) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (Widerspruchsregel)

Erklärung

Beweistechniken

Aufgabe: *Zeige, dass aus einer Aussage A eine Aussage B folgt.*

	Direkter Beweis	**Indirekter Beweis**	**Beweis durch Widerspruch**
Aussagenlogisch:	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
Vorgehen:	Setze A voraus, nutze Axiome und bekannte Aussagen, um bei Aussage B zu landen.	Setze $\neg B$ voraus, nutze Axiome und bekannte Aussagen, um bei Aussage $\neg A$ zu landen.	Setze A und gleichzeitig $\neg B$ voraus und zeige, dass $A \wedge \neg B$ nie wahr ist, d.h. zu einem Widerspruch führt. Zu diesem kommt man durch Verwendung von Axiomen und bekannten Aussagen, i.A. ist aber nicht klar, wo er auftreten wird.

Erklärung

Vollständige Induktion

Induktionsprinzip: Es sei $A(n)$ eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$. Dann ist $A(n)$ für alle $n \geq m$ genau dann wahr, wenn die folgenden Aussagen wahr sind:

(i) *Induktionsanfang*: $A(m)$ ist wahr .

(ii) *Induktionsschritt*:
$A(n)$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A(n+1)$ ist wahr.

Erklärung

Diese Methode ist mit dem **Dominoeffekt** vergleichbar: Wenn der erste Dominostein fällt und durch jeden fallenden Dominostein der nächste umgestoßen wird, so wird jeder Dominostein der Kette irgendwann umfallen.

Erklärung

Quantoren

Quantoren legen fest, für welche Objekte x eine Grundmenge M eine *Aussageform* $A(x)$ gilt. Eine Aussageform ist dabei ein sprachlich sinnvoller Ausdruck, in dem die Variable x vorkommt. Durch dessen Belegung geht die Aussageform in eine Aussage über.

	Allquantor	**Existenzquantor**
Symbol:	$\forall$	$\exists$
Bedeutung:	„für alle“/„für jede(s)“	„es existiert (mind.) ein“
Schreibweise:	$\forall x \in M : A(x)$	$\exists x \in M : A(x)$
Negation:	$\exists x \in M : \neg A(x)$	$\forall x \in M : \neg A(x)$

Eine Aussage der Form „Es gibt ein...“ ist immer als „Es gibt mindestens ein...“ zu verstehen. Für Aussagen der Form „Es gibt genau ein...“ benutzt man den Quantor $\exists!$.

☺–☹

Aufgaben

Wahrheitstafeln

Aufgabe 1. Handelt es sich bei den folgenden Sätzen um Aussagen?

Lösung

(a) Alle Frauen sind blond.

(b) Guten Tag.

(c) Morgen ist Freitag und gestern war Montag.

(d) $1 + 1 = 2$.

(e) Sei $x = 3 + 5$.

(f) Wenn $1 + 1 = 0$ ist, dann ist heute Dienstag.

Aufgabe 2. Stellen Sie sich vor es gibt einen Planeten namens Zutan. Auf dem Planeten Zutan gibt es Bewohner mit roter, grüner, gelber und blauer Hautfarbe. Die auf Zutan vertretenen Haarfarben sind ebenfalls rot, grün, gelb und blau. Jeder Bewohner hat genau eine Hautfarbe und eine Haarfarbe.

Lösung

Für alle Bewohner des Planeten Zutan gilt: Wenn der Bewohner eine rote Hautfarbe hat, dann sind seine Haare grün.

Was können wir daraus folgern?

(a) Wenn der Bewohner nicht rot ist, dann hat er auch keine grünen Haare.

(b) Wenn der Bewohner keine grünen Haare hat, dann ist er nicht rot.

(c) Wenn der Bewohner grüne Haare hat, dann ist er rot.

(d) Alle der obigen Schlussfolgerungen sind richtig.

Aufgabe 3. Seien A, B, C Aussagen. Prüfen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen:

Lösung

(i) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

(ii) $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$

(iii) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ und $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Beweistechniken

Aufgabe 4. Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit den angegebenen Beweistechniken.

Lösung

(i) Direkter Beweis: Sei a eine ganze Zahl. Ist a gerade, so ist auch a^2 gerade.

(ii) Indirekter Beweis: Sei a eine ganze Zahl und p eine Primzahl. Ist a^2 durch p teilbar, so ist auch a durch p teilbar.

Hinweis: Nutze die eindeutige Primfaktorzerlegung.

(iii) Widerspruchsbeweis: Seien a, b reelle Zahlen. Ist $a \cdot b = 0$, so gilt $(a = 0 \vee b = 0)$.

Vollständige Induktion

Aufgabe 5. Zeigen Sie die, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Lösung

(i) $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$,

(ii) $\sum_{i=1}^{n} (2k-1) = n^2$,

(iii) Eine n-elementige Teilmenge M besitzt 2^n viele Teilmengen, d.h. $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

(iv) Die Zahl $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar.

Quantoren

Aufgabe 6. Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

Lösung

(i) Jedes Übungsblatt schafft Unzufriedene und es gibt Menschen, die Mathematik glücklich macht.

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} < \epsilon$.

(iii) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, x, y \in [0,1] : (|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)$.