Lineare Gleichungssysteme

Erklärung

Lineares Gleichungssystem

Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) ist ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Jedes lineare Gleichungssystem in den Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ lässt sich äquivalent schreiben als $A \cdot x = b$, wobei A eine $m \times n-$Matrix und b ein $m-$dimensionaler Vektor seien.

Ist b der Nullvektor, so spricht man von einem *homogenen LGS*, sonst von einem *inhomogenen* LGS

Struktursatz für lineare Gleichungssysteme. Es gilt

- Die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.
- Ist $Ax = b$ ein lösbares LGS und $x_{\text{inhom.spez.}}$ eine spezielle inhomogene Lösung. Dann ist die allgemeine Lösung $x_{\text{inhom.allg.}}$ darstellbar als
$$x_{\text{inhom.allg.}} = x_{\text{hom.allg.}} + x_{\text{inhom.spez.}},$$
wobei $x_{\text{hom.allg.}}$ die allgemeine homogene Lösung beschreibe.

Erklärung

Erklärung

Zeilen-Stufen-Form

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat **Zeilen-Stufen-Form**, wenn ein $l \in \{1, \ldots, m+1\}$ existiert, so dass:

- jede Zeile mit Index in $\{2, \ldots, l-1\}$ mehr führende Nullen als die Zeile davor und
- jede Zeile mit Index in $\{l, \ldots, m\}$ nur Nullen enthält.

Die Anzahl der Zeilenvektoren, die in der Zeilen-Stufen-Form einer Matrix ungleich 0 sind, entspricht dem **Rang** der Matrix A. Gibt es keine Nullzeilen ($l = m + 1$) so besitzt die Matrix *vollen Rang.*

Abbildung

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} ✗$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

Hinweis⚠

Abbildung

Erklärung

Darstellung als Tableau und Gauß'schesh Eliminationsverfahren

Beim **Gauß'schem Eliminationsverfahren** wird eine Gleichung der Form $Ax = b$ durch ein Tableau der Form $A|b$ ersetzt, auf dem *Elementare Zeilenumformungen* durchgeführt werden, bis die das Tableau Zeilen-Stufen-Form hat. Diese Umformungen verändern die Lösung des LGS nicht.

Die Elementaren Zeilenumformungen sind:

G1. Addiere das λ-fache einer Zeile i zu einer anderen Zeile j.

G2. Multipliziere eine Zeile i mit einer Zahl λ.

G3. Vertausche zwei Zeilen i und j.

Erklärung

Rangkriterium. Ein LGS $Ax = b$ in n Variablen besitzt

- keine Lösung, wenn
$$\operatorname{rang}(A) < \operatorname{rang}(A \mid b),$$
- genau eine Lösung, wenn
$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b) = n,$$
- unendlich viele Lösung, wenn
$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A \mid b) < n.$$

Für eine Gleichung $Ax = b$ hat das zugehörige Tableau die Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ & & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Die Elementaren Zeilenumformungen können auch als Matrixmultiplikation mit sog. Elementarmatrizen realisiert werden:

G1. $T[i, j, \lambda] \cdot A$

G2. $T[i, i, \lambda] \cdot A$

G3. $S[i, j] \cdot A,$

wobei

- $S[i, j]$ entsteht, wenn man bei der Einheitsmatrix die i-te und j-te Zeile vertauscht und
- $T[i, j, \lambda]$ die Einheitsmatrix mit λ im $(i, j)-$te Eintrag ist.

Um das zugehörige Tableau nach einem Umformungsschritt zu erhalten, multipliziert man nicht bloß die Matrix A mit einer der Umformungsmatrizen, sondern auch den Vektor b.

Erklärung

☺ – ☹

Aufgaben

Aufgabe 1. Geben Sie ein (möglichst einfaches) Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an, das

(a) keine Lösung besitzt,

(b) genau eine Lösung besitzt,

(c) unendlich viele Lösungen besitzt.

Lösung

Aufgabe 2. Geben Sie an, ob die folgenden Matrizen in Zeilen-Stufen-Form sind

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

Aufgabe 3. Sei $K = \mathbb{R}$. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + -4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 3 \\ -x_2 + 3x_3 + x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Lösung

Aufgabe 4. Sei $K = \mathbb{R}$. Man begründe mit Hilfe des Rangkriteriums, dass das LGS

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 6x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 &= 4 \end{aligned}$$

keine Lösungen besitzt.

Lösung

Aufgabe 5. Untersuchen Sie für die gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ob das Gleichungssystem $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & 7 \\ -4 & 4 & -6 & -12 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

Lösung

Aufgabe 6. Geben Sie jeweils an, welche Elementarmatrizen man benötigt, um die Matrix A in die Matrix B zu überführen

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung