Konstruktion des Hilbertschemas

Jonathan Zachhuber

23. April 2012

Wir wollen versuchen, die Konstruktion des Hilbertschemas nachzuvollziehen und werden uns dazu an [ACG11], insbesondere §4, entlang hangeln. Interessant ist vielleicht auch [Ber99], der ein wenig anders vorgeht, aber dafür manche Details vielleicht besser ausleuchtet.

Im Folgenden seien alle vorkommenden Schemata noethersch und von endlichem Typ über $\mathbb{C}$. Wir interessieren uns für flache Familien abgeschlossener Unterschemata von $\mathbb{P}^r := \mathbb{P}^r_{\mathbb{C}} := \operatorname{Proj} \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_r]$, also Familien der Form

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}^r \times S, \\ S & \end{tikzcd}$$

wobei f ein flacher Morphismus ist, und unter diesen für solche mit einem vorgegebenen konstanten Hilbertpolynom

$$p(t) := h_{X,\mathcal{O}_X}(t) := \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{H}^i(X, \mathcal{O}_X(t)) \in \mathbb{Q}[t].$$

Wir haben bereits gelernt, dass flache Familien den Vorteil haben, dass die Fasern von f, $X_s := f^{-1}(s)$, alle dasselbe Hilbertpolynom haben (siehe zum Beispiel [Har77, Thm III.9.9] oder [ACG11, §2]). Der Plan ist nun, die Menge

$$\mathcal{H} := \{X \subseteq \mathbb{P}^r \mid X \text{ abgeschlossenes Unterschema mit Hilbertpolynom } p\}$$

mit einer Schemastruktur zu versehen, welche wir dann das *Hilbertschema* nennen wollen und für das wir Hilb^p_r schreiben werden. Mal schauen, ob sich so unser Modulproblem lösen lässt.

1 Einbettung in das Graßmannschema

Zunächst wählen wir einen festen $\mathbb{P}^r$ und ein rationales Polynom $p(t)$ und erinnern uns an ein paar Eigenschaften projektiver Schemata.

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^r$ ein abgeschlossenes Unterschema (insbesondere ist es damit auch projektiv!). Dann liefert die Einbettung $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^r$ einen Garbenmorphismus $\iota^\sharp\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \twoheadrightarrow \iota_*\mathcal{O}_X$, der surjektiv ist und dessen Kern $\mathfrak{J}_X$ heißt und die zu X gehörende kohärente Idealgarbe (auf $\mathbb{P}^r$) ist. Umgekehrt finden wir zu jeder kohärenten Garbe von Idealen $\mathfrak{J}$ auf $\mathbb{P}^r$ ein abgeschlossenes Unterschema X (mit Strukturgarbe $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}/\mathfrak{J}$, X ist als Raum einfach der Träger der Garbe, $\mathfrak{J}$ die zugehörige Idealgarbe) [Har77, Thm II.5.9].

Des Weiteren lehrt uns [Ser55, §2.59–60], dass für ein projektives Schema X, das mit einer kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ versehen ist, diese zu der kohärenten Modulgarbe $\widetilde{M}$ eines graduierten Moduls M isomorph ist. Insbesondere ist dann für große n

$$M_n \cong \mathrm{H}^0(X, \mathcal{F}(n)).$$

Insgesamt liefert uns das also zu jedem abgeschlossenen Unterschema X ein homogenes Ideal $I \leq \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_r]$ mit $\mathfrak{J}_X \cong \widetilde{I}$ (siehe auch [Har77, Cor II.5.16]). Dabei entsprechen dann – für großes n – die Schnitte $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{J}_X(n))$ den homogenen Elementen von Grad n in I.

Wir erhalten so also eine interessante alternative Sichtweise auf unsere Unterschemata, indem wir die zugehörigen Idealgarben betrachten. Mit Hilfe von [Har77, §I.7] lässt sich für diese auch das Hilbertpolynom berechnen: Nach [ACG11, §2 Example 2.3] ist $h_{\mathbb{P}^r}(n) = \binom{n+r}{r}$ und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathfrak{J}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \longrightarrow \iota_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0 \tag{1}$$

liefert das Hilbertpolynom von $\mathfrak{J}_X$ als Differenz der beiden anderen, also

$$q(n) := h_{\mathfrak{J}_X}(n) = \binom{n+r}{r} - h_X(n).$$

Wir können nun also wahlweise die Menge der abgeschlossenen Unterschemata mit Hilbertpolynom p oder die der kohärenten Idealgarben mit Hilbertpolynom q betrachten. Diesen wollen wir nun auf intelligente Weise Vektorräume zuordnen, um diese Menge ins Graßmannschema einzubetten und so mit einer Schemastruktur zu versehen.

Dazu erfreuen wir uns zunächst an [ACG11, Lem 4.1], welches uns für ein rationales Polynom q ein $n_0 \in \mathbb{N}$ liefert, so dass für jede Idealgarbe $\mathfrak{J}$ auf $\mathbb{P}^r$ mit Hilbertpolynom q und für alle $n \geq n_0$ sowohl

(i) $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^r, \mathfrak{J}(n)) = 0$, für alle $i \geq 1$, als auch

(ii) $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{J}(n)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{J}(n+1))$ ist surjektiv, gilt. Dabei liefert uns (i), dass die Abbildung

$$\varphi_n \colon \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(n))$$

für alle $n \geq n_0$ surjektiv ist, denn die Rechtsableitung des (n-fach getwisteten) globalen Schnittfunktors auf (1) angewandt liefert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \xrightarrow{\varphi_n} \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \iota_* \mathcal{O}_X(n)) = \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \\ \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n)) = 0 \longrightarrow \cdots . \end{aligned}$$

Statt φ_n können wir also auch den Kern

$$\operatorname{kern} \varphi_n = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n)) \leq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n))$$

betrachten und das wollen wir jetzt auch tun.

Definition 1.1: Sei $X \subseteq \mathbb{P}^r$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann nennen wir den Vektorraum $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n))$ den *n-ten Hilbertpunkt* (von X).

Der Vorteil dieses Raums ist, dass er Unterraum von $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n))$ ist, der uns insgesamt recht wohlgesinnt ist und dass die Dimension besonders gutartig ist:

Lemma 1.2: $\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n)) = q(n)$ für großes n.

Beweis: Die Idee ist [ACG11, Cor 4.5] anzuwenden. Hier sieht das so aus:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{P}^r \times \operatorname{Spec} \mathbb{C} \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C} & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c} \mathfrak{I}_X(n) = \mathfrak{I}_X(n) \otimes \mathbb{C} \\ \\ \\ \psi_* \mathfrak{I}_X(n) \end{array}$$

Dabei ist ψ offenbar ein flacher Morphismus, da jeder $\mathbb{C}$-Modul als Vektorraum frei ist und [ACG11, Cor 4.5(i)] liefert, dass $\psi_* \mathfrak{I}_X(n)$ für großes n lokal frei von Rang $q(n)$ ist, also insbesondere

$$\mathrm{H}^0(\operatorname{Spec} \mathbb{C}, \psi_* \mathfrak{I}_X(n)) \cong \mathbb{C}^{q(n)}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(\operatorname{Spec} \mathbb{C}, \psi_* \mathfrak{I}_X(n)) &= \psi_* \mathfrak{I}_X(n)\big((0)\big) = \mathfrak{I}_X(n)\big(\psi^{-1}((0))\big) \\ &= \mathfrak{I}_X(n)\big(\mathbb{P}^r\big) = H^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n)). \end{aligned}$$

Das hat jetzt zwar Spaß gemacht, aber eigentlich ist die Aussage klar, denn nach [ACG11, Lem 4.1] ist $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n)) = 0$ für $i > 0$ und großes n und damit reduziert sich das Hilbertpolynom auf seinen ersten Summanden. □

Korollar 1.3: Der n-te Hilbertpunkt (n groß) von X ist ein Punkt im Graßmannschema

$$G := \mathbb{G}\big(q(n), \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n))\big).$$

BEMERKUNG 1.4: Der n-te Hilbertpunkt legt (für großes n) das Unterschema $X \subseteq \mathbb{P}^r$ fest, wir erhalten also eine (mengenmäßige) Einbettung von $\mathcal{H}$ in G.

Beweis: Teil (ii) von [ACG11, Lem 4.1] besagte gerade, dass die Abbildung

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}(n)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}(n+1))$$

surjektiv ist. Rechts stehen hier aber gerade die Elemente von Grad $n+1$ aus dem zu $\mathfrak{I}_X$ gehörenden homogenen Ideal I und das Tensorieren beschreibt gerade die Skalarmultiplikation der Modulgarbe.

Das legt die zugehörige Idealgarbe aber auch schon fest, denn nach [Ser55, §2.59 Prop 5] folgt, dass wenn $I_m = J_m$ für große m ist, auch schon $\tilde{I} = \tilde{J}$ gilt. □

Wie sieht nun das Bild von $\mathcal{H}$ in G aus? Nun:

BEMERKUNG 1.5: Die Punkte von $\mathcal{H}$ entsprechen genau den Punkten $V \in G$, für die das Bild der Multiplikationsabbildung

$$\rho_{m,V} \colon V \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m-n)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m))$$

Dimension $q(m)$ hat (für $m \geq n$ groß).

Beweis: Nach Definition ist $V \leq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \cong \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_r]_n$, besteht also aus homogenen Polynomen von Grad n, die Abbildung ist demnach zumindest wohldefiniert.

Entspricht nun V einem Punkt in $\mathcal{H}$, so gilt $V = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_X(n))$ für geeignetes $X \subseteq \mathbb{P}^r$. Nun sagt Teil (ii) von [ACG11, Lem 4.1], dass

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}(n)) \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(1)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}(n+1))$$

surjektiv ist und nach Teil (i) die rechte Seite Dimension $q(n+1)$ hat. Da $\mathcal{O}(n+m) \cong \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m)$ [Har77, Prop II.5.12(b)] und das für Idealgarben genauso geht, können wir das einfach iterieren und erhalten unsere Behauptung.

Betrachten wir hingegen ein $V \in G$ mit $\operatorname{Rang} \rho_{m,V} = q(m)$, so besteht es aus homogenen Elementen von Grad n; diese erzeugen ein homogenes Ideal I. Das Bild vom $\rho_{m,V}$ entspricht nun aber genau den Elementen I_m von Grad m in I und hat nach Voraussetzung Dimension $q(m)$ für große m, das Hilbertpolynom von I ist also q (siehe z.B. [Har77, §I.7]). Demnach hat auch $\tilde{I}$ Hilbertpolynom q und das zugehörige Unterschema dann nach (1) Hilbertpolynom p, liegt also in $\mathcal{H}$. □

Wir wissen jetzt also, wie wir die Punkte aus $\mathcal{H}$ in G „wiedererkennen“ können – und dies sogar einzig und allein anhand von Eigenschaften der Unterräume, also der Punkte des Graßmannschemas. Wir haben die geometrischen Informationen der Unterschemata, die in der Strukturgarbe steckten, nun also erfolgreich in lineare Unterräume kodiert. Dies wollen wir uns zu Nutzen machen, um aus der Menge $\mathcal{H}$ ein Schema zu basteln.

Dazu wollen wir zunächst $\mathcal{H}$ auf eine Art schreiben, die die Schemastruktur von G respektiert. Wir bezeichnen dazu mit Σ_m all die Punkte, deren Bild unter der Multiplikationsabbildung Rang $q(m)$ hat, genauer

$$\Sigma_m := \{V \in G \mid \operatorname{Rang} V \geq q(m) \text{ und } \operatorname{Rang} V < q(m)+1\}$$

und sehen so, dass Σ_m damit Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von G – da die Topologie auf G von den Einträgen der Matrizen, die zu den einzelnen Punkten gehören, her kommt – und somit ein lokal abgeschlossenes Unterschema[1] von G ist. Als Menge gilt offenbar

$$\mathcal{H} = \bigcap_{m \geq n} \Sigma_m,$$

aber da es sich dabei um einen unendlichen Schnitt handelt, ist es nicht klar, welche Struktur $\mathcal{H}$ als Schema trägt. Um das in den Griff zu kriegen, betrachten wir zunächst nur jeweils endlich viele Schnitte und erhalten so eine Folge von Unterschemata von G

$$\Theta_k := \bigcap_{n \leq m \leq k} \Sigma_m$$

und zeigen, dass diese für großes k stationär wird, $\mathcal{H}$ also „in Wirklichkeit" nur Schnitt endlich vieler Unterschemata und damit selbst ein Unterschema ist.

Hierfür genügt es zu zeigen, dass die Folge der *Mengen* Θ_k stationär wird, denn wenn die Mengen Θ_k für $k \geq k_0$ gleich sind, liefert das eine absteigende Kette abgeschlossener[2] Unterschemata von Θ_{k_0} und diese wird stationär, da G ein noethersches Schema ist.

Dazu verwenden wir folgenden Trick: Für $N \geq n$ ordnen wir jedem abgeschlossenen Punkt $s \in G$ ein abgeschlossenes Unterschema $Y_s \subseteq \mathbb{P}^r$ zu, so dass

$$\operatorname{Rang} \rho_{m,s} = h_{\mathfrak{J}_{Y_s}}(m) \text{ für } m \geq N \tag{2}$$

ist, denn diese Aufgabe kommt uns inzwischen sehr bekannt vor! Das hilft uns hier tatsächlich weiter, denn für $s \in \Theta_{N+r}$ gilt dann nach Definition $\operatorname{Rang} \rho_{m,s} = q(m)$ für $n \leq m \leq N+r$, aber sowohl q als auch $h_{\mathfrak{J}_{Y_s}}$ sind Polynome mit Grad höchstens[3] r, die nunmehr an r Punkten übereinstimmen, also gleich sind. Damit ist aber $\operatorname{Rang} \rho_{m,s} = q(m)$ für alle $m \geq N$ und das hieß ja gerade, dass $s \in \Theta_m$ für alle $m \geq N$, die Kette also stationär wird. Zusammengefasst:

Satz 1: *Das so entstandene Schema heißt* Hilbertschema *und ist ein Schema, dessen abgeschlossene Punkte gerade $\mathcal{H}$ entsprechen. Wir schreiben dafür* Hilb_r^p.

Nun müssen wir noch einsehen, dass wir tatsächlich solche Y_s und so ein – von s unabhängiges – N finden, aber der sich aufdrängende Ansatz erweist sich glücklicherweise als fruchtbar. Wir nehmen einfach den zu s gehörenden Unterraum

$$V \leq \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \cong \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_r]_n$$

[1] Dabei wählen wir immer die induzierte reduzierte Struktur.

[2] Da die zu Grunde liegenden topologischen Räume gleich sind, sind sie insbesondere in Θ_{k_0} abgeschlossen.

[3] Der Grad des Hilbertpolynoms wird durch die Dimension des Raums beschränkt, siehe zum Beispiel [Har77, Thm I.7.5].

und definieren Y_s als das zu dem von V erzeugten Ideal gehörige Unterschema von $\mathbb{P}^r$. Um das N für (2) zu finden, wollen wir die Y_s zu einer Familie $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{P}^r \times G$ zusammenfassen.

Dazu wollen wir wieder die Multiplikationsabbildungen $\rho_{m,V}$ verwenden, müssen diese aber erst „globalisieren"; dafür erinnern wir uns zunächst an die grundlegenden Eigenschaften des Graßmannschemas: In $\mathbb{P}^{\nu-1} \times G$ – wobei $\nu = h_{\mathbb{P}^r}(n) = \binom{n+r}{r}$, da die Punkte von G Unterräume eines Raums dieser Dimension sind – eingebettet finden wir das universelle Bündel $\mathbb{P}(U)$ über G als abgeschlossenes Unterschema, welches die projektive Version des Bündels, dessen Faser über jedem $s \in G$ gerade der zu dem Punkt s gehörige $q(n)$-dimensionale Vektorraum V ist, ist. Die zugehörige[4] Garbe nennen wir $\mathcal{F}$ und erinnern uns daran, dass sie lokal frei von Rang $q(n)$ ist und es gilt $\mathcal{F}_s = V$. Siehe dazu auch [Har77, Ex. II.5.18] und [Har77, Ex. II.7.10].

Da $\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{\nu-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\nu-1}}(1)) = \binom{n+r}{r} = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n))$ können wir $\mathcal{F}$ hier als Idealgarbe in $\xi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(n)$ auffassen, wobei $\xi \colon \mathbb{P}^r \times G \longrightarrow G$ die Projektion ist.

Wir definieren also die Abbildung

$$\rho_m \colon \mathcal{F} \otimes \xi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m-n) \longrightarrow \xi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m) \tag{3}$$

und sehen, dass sie an jedem Punkt $\rho_{m,V}$ entspricht, also eine sinnvolle Globalisierung ist.

Das $\mathcal{Y}$ konstruieren wir nun wie folgt: Eine Garbe, in der Informationen zu den Unterräumen stecken, kennen wir schon – nämlich $\mathcal{F}$ – und die Multiplikationsabbildung ρ_m hat bisher immer sehr gut mit Hilbertpolynomen kooperiert. Wir definieren also

$$\mathcal{F}_m := \operatorname{Bild} \rho_m = \rho_m(\mathcal{F} \otimes \xi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(m-n)).$$

Somit ist $\oplus \mathcal{F}_i$ eine Idealgarbe in $\oplus_i \xi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}(i)$ und diese kommt – nach [Har77, Prop. II.7.11] – von einer Idealgarbe $\mathfrak{I} \subseteq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times G}$, genauer: Es gibt ein $N \geq n$, so dass

$$\mathcal{F}_m = \xi_* \mathfrak{I}(m) \text{ für } m \geq N.$$

Nun definieren wir $\mathcal{Y}$ als das zu $\mathfrak{I}$ gehörende abgeschlossene Unterschema von $\mathbb{P}^r \times G$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{Y}$ das tut, was es verspricht! Zunächst erinnern wir uns daran, dass [ACG11, Lem 3.6] Aussagen über die Kohomologie der Fasern eines Morphismus, die *unabhängig* vom Bildpunkt sind, machte. Hier bedeutet das konkret, dass wir ein[5] $N \in \mathbb{N}$ erhalten, so dass für alle $s \in G$ und die zugehörigen Fasern Y_s

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}(m)) &\cong \xi_* \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(m) \otimes \mathbb{C} \\ \mathrm{H}^i(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}(m)) &= 0 \text{ für } i > 0 \end{aligned}$$

für $m \geq N$ gilt. Das ist exakt die Aussage des Lemmas, mit der Ausnahme, dass die Faser des Morphismus ξ (eingeschränkt auf $\mathcal{Y}$) hier eben Y_s und nicht ganz $\mathbb{P}^r$ sind. Das sind nun

[4] Genauer: Die Garbe der Schnitte zu der Projektion $\mathbb{P}(U) \times G \longrightarrow G$. Siehe [Har77, Ex. II.5.18(b)].

[5] Wir wählen dieses N implizit groß genug, so dass es auch bei allen folgenden Aussagen, die auch „ab" einem festen N unabhängig von s gelten, mitspielt.

aber noch die „falschen“ Kohomologiegruppen, da wir uns ja für das Hilberpolynom von $\mathfrak{I}_{Y_s}$ interessieren und außerdem müssen wir dieses noch in Verbindung mit $\rho_{m,s}$ bringen.

Dazu verwenden wir, dass nach [ACG11, Lem 3.8(ii)] $R^1\xi_*\mathfrak{I}(m) = 0$ ist (für $m \geq N$) und da $\mathcal{Y}$ das zu $\mathfrak{I}$ beziehungsweise gehörige – also von $\oplus\mathcal{F}_i$ herkommende – Unterschema ist, können wir mal wieder die kurze exakte Sequenz (1) zu Rate ziehen: Die Linksexaktheit von ξ_* liefert uns damit nämlich, dass auch die Sequenz

$$\mathcal{F} \otimes \xi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times G}(m-n) \xrightarrow{\rho_m} \xi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times G}(m) \longrightarrow \xi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(m) \xrightarrow{\delta_1} R^1\xi_*\mathfrak{I}(m) = 0 \tag{4}$$

für $m \geq N$ exakt ist, da – nach Konstruktion – das Bild von ρ_m gerade $\xi_*\mathfrak{I}(m)$ ist. Diese Garben können wir – nach [ACG11, Lem 3.6(i)] – für $m \geq N$ an einer einzelnen Faser s betrachten, indem wir mit $k(s) = \mathbb{C}$ tensorieren:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{F} \otimes \xi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times G}(m-n) \otimes \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \xi_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r\times G}(m) \otimes \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \xi_*\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(m) \otimes \tilde{\mathbb{C}} & \longrightarrow & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \\
(\mathcal{F} \otimes \widetilde{k(s)}) \otimes \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m-n)) & \xrightarrow{\rho_{m,s}} & \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}(m)) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Dabei entspricht[6] $\mathcal{F} \otimes \widetilde{k(s)}$ gerade der Faser der Garbe $\mathcal{F}$ bei s und dieser ist – auf Grund der Eigenschaft des universellen Bündels – der zu s gehörende Vektorraum; es handelt sich also wirklich um die altbekannte Abbildung $\rho_{m,s}$.

Diese Sequenz ist wegen der Flachheit von $\mathbb{C}$ wieder exakt. Insbesondere ist also $\operatorname{Bild}\rho_{m,s} = \ker\varphi = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_{Y_s}(m))$ und da die Kohomologie von $\mathcal{O}_{Y_s}(m)$ für $i > 0$ und $m \geq N$ verschwindet, tut die Kohomologie von $\mathfrak{I}_{Y_s}(m)$ das auch, da wir die lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{l}
0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_{Y_s}(m)) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}^0(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}(m)) \\
\xrightarrow{\delta_1} \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_{Y_s}(m)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) = 0 \longrightarrow \mathrm{H}^1(Y_s, \mathcal{O}_{Y_s}(m)) = 0 \xrightarrow{\delta_2} \cdots
\end{array}$$

haben, φ wie eben gesehen surjektiv ist und nach dem Verschwindungssatz von Serre [Har77, Thm III.5.2] auch $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(m)) = 0$ ist $(i > 0)$, so dass auch schon δ_1 die Nullabbildung und gleichzeitig surjektiv sein muss, womit allen $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_{Y_s}(m))$ für $i > 0$ nichts anderes übrig bleibt, als zu verschwinden. Daher ist das Hilbertpolynom hier tatsächlich Abschnitt

$$h_{\mathfrak{I}_{Y_s}}(m) = \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^r, \mathfrak{I}_{Y_s}(m)) = \operatorname{Rang}\rho_{m,s},$$

wenn $m \geq N$, weshalb $\mathcal{Y}$ genau das tut, was wir von ihm verlangen und wir nun endlich mit der Konstruktion der Schemastruktur von Hilb_r^p fertig sind!

[6] Genauer: Sei $s \in S$, $\iota\colon \{s\} \hookrightarrow S$ die Einbettung und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf S. Als Schema können wir s als $\operatorname{Spec} k(s)$ auffassen und haben dann $\mathcal{O}_{\{s\}} = \widetilde{k(s)}$. Dann definieren wir die Faser von $\mathcal{G}$ über s:

$$\mathcal{G}_s := \iota^*\mathcal{G} = \iota^{-1}\mathcal{G} \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_{\{s\}}.$$

Da $\{s\}$ einpunktig ist, besteht diese Garbe aber „nur“ aus ihren globalen Schnitten, genauer gilt:

$$\mathrm{H}^0(\{s\}, \mathcal{G}_s) = \mathcal{G}_s(\{s\}) = \iota^{-1}\mathcal{G}(\{s\}) \otimes_{\iota^{-1}\mathcal{O}_S(\{s\})} \mathcal{O}_{\{s\}}(\{s\}) = \mathcal{G}_s \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} k(s).$$

Dabei ist $\mathcal{G}_s$ verwirrenderweise zuerst die Faser und dann der Halm von $\mathcal{G}$ bei s.

2 Darstellung des Hilbertfunktors

Ursprüngliches Ziel war es ja mal, Modulprobleme zu lösen, also darstellende Objekte für Modulfunktoren zu finden. Das Hilbertschema erlaubt uns das in dieser Situation zu tun.

Dazu betrachten wir den Hilbertfunktor $\mathfrak{h}$ von der Kategorie der Schemata (über $\mathbb{C}$) in die Kategorie der Mengen, der ein Schema S auf das „zugehörige“ $\mathcal{H}$ schickt, genauer

$$\mathfrak{h}(S) := \left\{ \begin{array}{c} \text{Familien abgeschlossener Unterschemata des } \mathbb{P}^r \\ \text{mit Hilbertpolynom } p\text{, parametrisiert durch } S. \end{array} \right\}$$

Wenn wir nun mit einem Schemamorphismus $f\colon S \longrightarrow S'$ anfangen, so erhalten wir zu einer Familie X' über S' kanonisch die Familie $X := X' \times_{S'} S$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^r \times S \supseteq X \arrow[r] \arrow[d] & X' \subseteq \mathbb{P}^r \times S' \arrow[d] \\
S \arrow[r, "f"] & S'
\end{tikzcd}$$

Nun können wir $\mathfrak{h}(f)(X') = X$ setzen und erhalten so einen kontravarianten Funktor.

Wir wollen jetzt zeigen, dass Hilb^p_r tatsächlich ein darstellendes Objekt für diesen Funktor ist, also dass wir eine natürliche Isomorphie zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathrm{Hom}(-,\mathrm{Hilb}^p_r)$ erhalten.

Das heißt aber gerade, dass Hilb^p_r universell in folgendem Sinne ist: Für jede flache Familie (X,f) abgeschlossener Unterschemata von $\mathbb{P}^r$ mit Hilbertpolynom p über einem Schema S finden wir einen eindeutigen Schemamorphismus $\alpha\colon S \longrightarrow \mathrm{Hilb}^p_r$, so dass (X,f) der Pullback der Projektion $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Hilb}^p_r$ entlang α ist. Insbesondere ist also $X \cong \mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}^p_r} S$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{P}^r \times S \arrow[rr, "\mathrm{id}\times\alpha"] \arrow[ddl] & & \mathbb{P}^r \times \mathrm{Hilb}^p_r \arrow[ddl] \\
X \arrow[ur, hook] \arrow[rr] \arrow[d, "f"'] & & \mathcal{X} \arrow[ur, hook] \arrow[d, "\pi"'] & \\
S \arrow[rr, dashed, "\alpha"] & & \mathrm{Hilb}^p_r &
\end{tikzcd}$$

Ganz konkret haben wir hier die Isomorphie $\mathrm{Hom}(S,\mathrm{Hilb}^p_r) \cong \mathfrak{h}(S)$ durch[7] $\alpha \longmapsto f$ und

[7] Denn Flachheit bleibt unter Basiswechsel erhalten [Har77, Prop. III.9.2(b)], also ist mit π auch f flach und damit eine zulässige Familie.

wenn nun $g\colon S \longrightarrow S'$ ein Schemamorphismus ist, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(S',\mathrm{Hilb}_r^p) \arrow[r, hook, two heads] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(g,\mathrm{Hilb}_r^p)"'] & \mathfrak{h}(S') \arrow[d, "\mathfrak{h}(g)"'] \\
\mathrm{Hom}(S,\mathrm{Hilb}_r^p) \arrow[r, hook, two heads] & \mathfrak{h}(S)
\end{tikzcd}$$

Denn: Sei $\rho\colon S' \longrightarrow \mathrm{Hilb}_r^p$, so entspricht diesem die Familie $f_\rho\colon \mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}_r^p} S' \longrightarrow S'$ aus $\mathfrak{h}(S')$ und $\mathfrak{h}(g)$ ordnet dieser ihren Pullback an g zu, also gerade die Familie

$$\mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}_r^p} S' \times_{S'} S \cong \mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}_r^p} S \longrightarrow S. \tag{5}$$

Das ist aber nichts anderes als die Familie $f_{\rho\circ g}$, die $\rho \circ g$ – dem Bild von ρ unter dem Hom-Funktor – zugeordnet wird, da der Pullback durch $\rho \circ g$ nach Voraussetzung eindeutig bestimmt ist, dieser aber genau (5) ist:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}_r^p} S' \times_{S'} S \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}_r^p} S' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \arrow[d] \\
S \arrow[r, "g"] & S' \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Hilb}_r^p
\end{tikzcd}$$

Und damit ist die Isomorphie tatsächlich natürlich.

Das Tolle ist nun aber, dass wir unsere universelle Familie $\mathcal{X}$ eigentlich schon kennen: Wir schränken einfach $\mathcal{Y} \longrightarrow G$ auf $\iota\colon \mathrm{Hilb}_r^p \hookrightarrow G$ ein und bezeichnen die Projektion von $\mathcal{X}$ auf Hilb_r^p mit π. Jetzt müssen wir uns noch überlegen, dass das wirklich genau das tut, was wir wollen.

Lemma 2.1: Die Familie $\pi\colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathrm{Hilb}_r^p$ ist flach.

Beweis: Wir erinnern uns daran, dass nach [ACG11, Prop 2.5] die Familie genau dann flach ist, wenn $\pi_*\mathcal{O}_\mathcal{X}(m)$ lokal frei für großes m ist und [ACG11, Lem 3.8] liefert für große m

$$\pi_*\mathcal{O}_\mathcal{X}(m) = \iota^*\xi_*\mathcal{O}_\mathcal{Y}(m) = \iota^* \operatorname{kokern}(\rho_m),$$

da $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ einfach die an der Einbettung zurückgezogene Garbe $\mathcal{O}_\mathcal{Y}$ ist und wegen der Exaktheit von (4). Nun war aber gerade der Witz an Hilb_r^p, dass das Bild von ρ_m darauf konstanten Rang $q(m)$ hat, weshalb – wieder nach (4) – $\iota^* \operatorname{kokern}(\rho_m)$ lokal frei von Rang $p(m)$ für großes m ist, also $\mathcal{X}$ tatsächlich flach über Hilb_r^p ist. □

Insbesondere bedeutet das jetzt, dass uns ein beliebiger Morphismus $\alpha\colon S \longrightarrow \mathrm{Hilb}_r^p$ eine *flache* Pullback-Familie $f\colon \mathbb{P}^r \times S \supset X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}_r^p} S \longrightarrow S$ mit Hilbertpolynom p induziert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^r \times S \supseteq X \arrow[rr] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] & & \mathcal{X} \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathrm{Hilb}_r^p \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dl, "\psi"] \\
S \arrow[r, "\alpha"] & \mathrm{Hilb}_r^p &
\end{tikzcd}$$

Betrachten wir nun die Strukturgarbe auf Hilb_r^p: Wir wissen nach [ACG11, Cor 4.5(i)], dass $\psi_* \mathfrak{I}_{\mathcal{X}}$ – die von $\mathfrak{I}$ induzierte Garbe – lokal frei von Rang $q(n)$ ist, aber wir kennen schon eine Garbe auf G, die sich auf Hilb_r^p so verhält: Wir können $\mathfrak{I}_X$ also als Einschränkung der Idealgarbe des universellen Bündels – $\mathcal{F}$ – auf Hilb_r^p auffassen. Nach [ACG11, Cor 4.5(iv)] ist außerdem $\varphi_* \mathfrak{I}_X(n) \cong \alpha^* \psi_* \mathfrak{I}_{\mathcal{X}}(n)$, das universelle Bündel findet sich gewissermaßen auch auf S wieder.

Den universellen Charakter dieses Bündels wollen wir uns nun zu Nutzen machen.
Satz 2: Hilb_r^p *ist darstellendes Objekt des Hilbertfunktors* $\mathfrak{h}$.

Beweis: Wir haben schon gesehen, dass jeder Morphismus $S \longrightarrow \mathrm{Hilb}_r^p$ uns eine flache Familie induziert, wir müssen also nur noch zeigen, dass jede flache Familie $\mathbb{P}^r \times S \supset X \longrightarrow S$ mit Hilbertpolynom p diese Form hat.

Wie oben sagt in diesem Fall [ACG11, Cor 4.5] wieder, dass $\varphi_* \mathfrak{I}_X(m)$ für großes m lokal frei von Rang $q(m)$ ist, wobei $\varphi\colon \mathbb{P}^r \times S \longrightarrow S$ die Projektion ist; genauso ist

$$\varphi_* \mathfrak{I}_X(n) \otimes \varphi_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r \times S}(m-n) \twoheadrightarrow \varphi_* \mathfrak{I}_X(m) \tag{6}$$

surjektiv für $m \geq n$ groß. Nun können wir uns aber – genau wie oben – wieder ein Bündel über X bauen (vgl. [Har77, §II.7]) und dann sagt uns die universelle Eigenschaft des Graßmannschemas, dass es einen *eindeutigen* Morphismus $\alpha\colon S \longrightarrow G$ mit $\alpha^* \mathcal{F} \cong \varphi_* \mathfrak{I}_X(n)$ gibt. Wegen (3) impliziert (6) aber, dass α über Hilb_r^p faktorisiert und das bedeutet ja gerade, dass

$$X = \mathcal{X} \times_{\mathrm{Hilb}_r^p} S$$

ist, was wir uns gewünscht hatten. □

Zu guter Letzt noch eine
Bemerkung 2.2: Das Hilbertschema ist projektiv und zusammenhängend.

Beweis: [ACG11, Prop 4.10]. □

Literatur

[ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba und Phillip A. Griffiths. „The Hilbert Scheme". In: *Geometry of Algebraic Curves.* Hrsg. von M. Artin, S. S. Chern, J. Coates, J. M. Fröhlich u. a. Bd. 268. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2011, S. 1–77. ISBN: 978-3-540-69392-5. DOI: 10.1007/978-3-540-69392-5_1.

[Ber99] Aaron Bertram. „Construction of the Hilbert Scheme". Lecture Notes. University of Utah, 1999. URL: `http://www.math.utah.edu/~bertram/courses/hilbert/`.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 52. New York: Springer, 1977.

[Ser55] Jean-Pierre Serre. „Faisceaux Algebriques Coherents". In: *The Annals of Mathematics.* Second Series 61.2 (März 1955), S. 197–278. ISSN: 0003-486X. DOI: 10.2307/1969915. URL: `http://www.jstor.org/stable/1969915`.