

Elementarmathematik
Übungsblatt 3

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

04.05.2017

Übung 1 (2+2 Punkte + 1 Zusatzpunkt)

Sei X eine Menge. Die Potenzmenge von X wird definiert als

$$\mathcal{P}(X) := \{a \mid a \subset X\},$$

das heißt $\mathcal{P}(X)$ ist die Menge aller Teilmengen von X .

1. Geben Sie eine injektive Abbildung $X \hookrightarrow \mathcal{P}(X)$ an.
2. Zeigen Sie, dass es *keine* surjektive Abbildung $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ gibt. Tipp: Was passiert mit der Menge $\{a \in X \mid a \notin f(a)\}$?
3. Zeigen Sie: es existiert keine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (man sagt: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht abzählbar unendlich).

Übung 2 (2+2+2+2 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig, falls für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt: $h(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n)$. Seien nun $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeigen Sie:

1. $f + g$ ist stetig.
2. $f \cdot g$ ist stetig.
3. Ist $f(D) \subset D$, so ist $g \circ f$ stetig.
4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass diese Funktion an keinem Punkt in \mathbb{R} stetig ist.

Übung 3 (2+2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob für folgende Mengen Supremum und Infimum in \mathbb{R} existieren und bestimmen Sie diese im Falle der Existenz.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7n^4 - 5}{n^4}, n \in \mathbb{N}\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3 - n^2}{n + 2}, n \in \mathbb{N}\}$

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Donnerstag, den 11.05.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.