

Elementarmathematik
Übungsblatt 6

Dozent: Prof. Dr. A. Küronya
Übungen: M. Nickel

25.05.2017

Übung 1 (2+2+2 Punkte)

1. Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie: für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $|r - q| < \varepsilon$.
Man sagt: \mathbb{Q} ist *dicht in* \mathbb{R} .
2. Sei $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit der Eigenschaft, dass f Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen abbildet. Man zeige, dass es dann eine stetige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$.
3. Zeigen Sie, dass \tilde{f} in Teilaufgabe 2 eindeutig bestimmt ist, das heißt sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere stetige Funktion mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, so ist $\tilde{f} = g$.

Übung 2 (3+3 Punkte)

1. Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Für $m/n \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ setze man $a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen abbildet. Folgern Sie mithilfe von Übung 1, dass es eine stetige Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\tilde{f}(x) = a^x$ für $x \in \mathbb{Q}$. Man schreibt für $x \in \mathbb{R}$ beliebig $a^x := \tilde{f}(x)$.
2. Zeigen Sie: für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^x b^x = (ab)^x$ und $a^x a^y = a^{x+y}$.

Übung 3 (2+2 Punkte)

1. Benutzen Sie die Definition von Stetigkeit um zu zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ stetig ist.
2. Man betrachte die Heavyside Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist und unstetig in $x = 0$ ist.

Dieses Blatt kann bis spätestens **14:00 Uhr** am **Donnerstag, den 01.06.**, im Schließfach ihrer jeweiligen Tutoren im 3. Stock, Robert-Mayer-Str. 6, abgegeben werden. Bitte denken Sie daran, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer mit anzugeben.