Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
17. Januar 2022

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{Q}$ und

$$A(a) := \begin{pmatrix} a & 3 & 5 \\ 1 & a+1 & a+2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det A(a)$ und bestimmen Sie für welche $a \in \mathbb{Q}$ die Matrix invertierbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Für $x_1, \ldots, x_n \in K$ sei

$$M(x_1, \ldots, x_n) := \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det(M(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$. Für welche $x_1, \ldots, x_n$ ist $M(x_1, \ldots, x_n)$ invertierbar?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, $x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_n \in K$ mit $x_i \neq x_j\ \forall i, j$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $f \in K[X]$ mit $\deg(f) \leq n-1$ gibt so dass $f(x_i) = y_i\ \forall i$.
Hinweis: Benutzen Sie die vorherige Aufgabe.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$, $B \in K^{n \times k}$, $C \in K^{k \times n}$ und $D \in K^{k \times k}$. Dann definieren wir die Blockmatrix

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt können wir jedes $M \in K^{m \times m}$ für $m = n + k$ in solche Blöcke zerlegen.

(a) Seien zudem $A' \in K^{n \times n}$, $B' \in K^{n \times k}$, $C' \in K^{k \times n}$ und $D' \in K^{k \times k}$.

Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

(b) Zeigen Sie:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D).$$

Hinweis: Untersuchen Sie zunächste den Fall, dass A oder D nicht invertierbar ist. Im Fall dass beide Matrizen invertierbar sind betrachten Sie das Produkt

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & A^{-1}B \\ 0 & I_k \end{pmatrix}.$$

(c) Sei nun $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Zeigen Sie:

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\cdot\det(D - CA^{-1}B).$$

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 24. Januar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.