Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
31. Januar 2022

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_a \in \mathbb{C}[X]$ von

$$M(a) := \begin{pmatrix} a & 2-a & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-a & 2^2-a^2 & 2^3-a^3 \end{pmatrix} \cdot x = 0$$

sollte bei der Lösung eine Rolle spielen. Das LGS hat immer die Lösung $x = (-2a, 2+3a, -(3+a), 1)^t$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{C}$ ein Körper und $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, so dass $Q = c \cdot \prod_{i=1}^{d}(x-a_i)$ für $c, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: P teilt Q genau dann, wenn es eine Indexmenge $I \subseteq \{1, \ldots, d\}$ und ein $c' \in \mathbb{C}$ gibt so dass $P = c' \cdot \prod_{i \in I}(x - a_i)$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis den Fundamentalsatz der Algebra benutzen: Jedes Polynom in $\mathbb{C}[x]$ *vom Grad* ≥ 1 *hat eine Nullstelle.*

(b) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom χ_a der Matrix $M(a)$ aus Aufgabe 1 und zeigen Sie, dass χ_a von μ_a geteilt wird.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und

$$A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ist $A(a, b, c)$ diagonalisierbar?

(b) Berechnen Sie in diesen Fällen eine Diagonalmatrix $D(a, b, c)$ und eine invertierbare Matrix $Q(a, b, c) \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, so dass $Q(a, b, c)^{-1}A(a, b, c)Q(a, b, c) = D(a, b, c)$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus.

Zeigen Sie: Wenn $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) \neq \{0\}$ gilt, dann ist f nicht diagonalisierbar.

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 7. Februar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.