Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2021/2022
13. Dezember 2021

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. Martin Möller
Johannes Schwab

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{C}^3 \ni (x, y, z) \mapsto (iy - x, 3y - x + z, y + ix) \in \mathbb{C}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathrm{Kern}(f)$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis C von $\mathrm{Bild}(f)$.

(d) Ergänzen Sie B zu einer Basis B' des $\mathbb{C}^3$ und C zu einer Basis C' des $\mathbb{C}^3$ und geben Sie die Abbildungsmatrix von f bzgl. B' und C' an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $\pi\colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $\pi \circ \pi = \pi$.

Zeigen Sie, dass es Untervektorräume U, W von V gibt, so dass:

- $V = U \oplus W$;
- $\pi(U) \subseteq U$;
- $\pi(W) \subseteq W$;
- Die Einschränkung $\pi|_U\colon U \to U$ von π auf U ist die Identität;
- Die Einschränkung $\pi|_W\colon W \to W$ von π auf W ist die Nullabbildung.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}^3$ und $\pi\colon V \to V$ bzgl. der Standardbasis gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\pi \circ \pi = \pi$ gilt und bestimmen Sie U und W wie oben.

($\star$) *(unbewertete Bonusaufgabe)* Geben Sie eine geometrische Interpretation von U, W und π an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien V, W K-Vektorräume, $\{b_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

Zeigen Sie:

(a) f ist surjektiv $\iff [\{f(b_i) \mid i \in I\}] = W$.

(b) f ist injektiv $\iff \{f(b_i) \mid i \in I\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei K ein Körper mit $2 \neq 0 \neq 3$ in K. Auf $K[X]_d$ definieren wir den Endomorphismus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ als die eindeutige lineare Fortsetzung der auf der Basis definierten Abbildung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\colon K[X]_d \to K[X]_d, \quad X^i \mapsto iX^{i-1}, \quad \text{für } i = 0, \ldots, d.$$

(Hierbei sei per Konvention $0 \cdot X^{-1} = 0$.) Sei im Folgenden $d = 3$.

(a) Geben Sie eine Abbildungsmatrix für $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ bzgl. der Standardbasis an.

(b) Geben Sie eine Basis für Kern $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ und Bild $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ an.

(c) Sei nun $a \in K$ und $U_3(a) \subseteq K[X]_3$ mit Basis $B := \{(X-a)^k \mid 1 \leq k \leq 3\}$.

Geben Sie eine Basis C von Bild $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(a)} =: V$ an, sowie die Abbildungsmatrix von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(a)}\colon U_3(a) \to V$ bzgl. B und C.

Bestimmen Sie außerdem $\dim \operatorname{Kern} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(a)}$.

(d) Geben Sie eine lineare Umkehrfunktion Bild $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}|_{U_3(0)} \to U_3(0)$ an.

Abgabe bis **10:15** am **Montag, den 10. Januar** in den Kasten Ihres jeweiligen Tutoriums.