

Skript zur Vorlesung

Ergodentheorie (4std.)

Wintersemester 2014/15

Prof. Dr. Martin Möller

Frankfurt am Main, 9. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Motivation	1
3	Erste Ergodensätze	2
3.1	Invariante Maße	2
3.2	Rekurrenz	5
3.3	Ergodizität	6
3.4	Ergodizität in Mittel	9
3.5	Birkhoffs Ergodensatz	11
4	Kettenbrüche	15
4.1	Elementare Eigenschaften	15
4.2	Quadratische Irrationalzahlen und der Satz von Lagrange	18
4.3	Das Gaußsche Maß	21
5	Starkes und schwaches Mischen	26
6	Induzierte Transformationen	32
6.1	Rauzy-Veech Induktion	33
7	Invariante Maße für stetige Abbildungen	37
7.1	Existenz invarianter Maße	37
7.2	Zerlegung in ergodische Maße	39
7.3	Eindeutige Ergodizität	40
8	Gleichverteilung	41
8.1	Gleichverteilung der Werte irrationaler Polynomfunktionen	43
9	Gruppenaktionen	47
9.1	Topologische Gruppen und invariante Metriken	48
9.2	Das Haar-Maß	49
9.3	Ergodizität	50
9.4	Starkes und schwaches Mischen	54
9.5	Existenz invarianter Maße	57
10	Ergodensätze für Gruppenaktionen	59
11	Flüsse auf der oberen Halbebene und Quotienten	60
11.1	Geodäten und der geodätische Fluß	62
11.2	Der horozyklische Fluss, stabile und instabile Mannigfaltigkeit	64
11.3	Gitter und die hyperbolische Volumenform	67
11.4	Die Ergodizität des geodätischen Flusses	69
11.5	Die Ergodizität der Gauss-Abbildung II: Flüsse mit Dachfunktion und geometrische Codierungen	71

Inhaltsverzeichnis

12	Matrixkoeffizienten: Die Sätze von Mautner und Howe-Moore .	76
12.1	Ergodizität des geodätischen und horozyklischen Flusses . . .	76
12.2	Mischen	79
13	Bahnabschlüsse im unipotenten Fall	81
13.1	Motivation: Oppenheim-Vermutung	81
13.2	Invariante Maße für den horozyklischen Fluss	84
13.3	Quantitative Nichtdivergenz	90
13.4	Gleichverteilung und Bahnabschlüsse	93
14	Diophantische Approximation	95
	Literatur	98

1 Einleitung

Dieses Skript begleitet eine Vorlesung "Ergodentheorie" im Wintersemester 2014/2015 an der Goethe-Universität Frankfurt. Das Material ist sehr eng an das Buch "Ergodic theory (with a view towards number theory)" [EW10] angelehnt und bis auf die Abschnitte über Intervallaustauschtransformationen und über Diophantische Approximation in diesem enthalten. Diese aus dem Übersichtsartikel von Yoccoz bzw. aus Vortragsausarbeitungen von A. Gorodnik entnommen.

2 Motivation

Ein dynamisches System ist ein Oberbegriff für eine Selbstabbildung T einer Menge X , welche oft mit einer Zusatzstruktur wie zum Beispiel einer Topologie, einer σ -Algebra oder einem Maß versehen ist. Bei einem gegebenen dynamischen System T sind die zentralen Fragen zunächst die Invarianten. Welche Punkte sind invariant? Welche Punkte sind invariant unter einer Potenz von T , d.h. welche Punkte sind periodisch? Welche Maße sind invariant unter T ? In dieser Vorlesung geht es um statistische Fragen aus der Zahlentheorie. Dazu zwei Beispiele

Häufigkeit von Ziffernblöcken. Gegeben ein Ziffernblock der Länge k , z.B. der Block 179 für $k = 3$. Wie oft tritt dieser in der Dezimalentwicklung einer gegebenen reellen Zahl $x = 0.a_1a_2a_3 \dots$ auf, d.h. was ist der Anteil der Stellen $n \equiv 1 \pmod 3$ mit $a_n = 1, a_{n+1} = 7, a_{n+2} = 9$? Die Antwort wird i.A. von x abhängen, denn dieser Anteil ist Null z.B. für $x = 1/9$ und mit $1/3$ sehr hoch für $x = 0.\overline{179}$. Wenn man davon ausgeht, dass alles 'fair verteilt' ist, so würde man einen Anteil von $1/1000$ erwarten. Dies ist tatsächlich für fast alle reellen Zahlen richtig, wie wir als eine der ersten Konsequenzen von ergodischem Verhalten einsehen werden. Die Ergodensätze geben eine Vorhersage für fast alle x (im maßtheoretischen Sinn) und dieses Beispiel zeigt auch, dass man im allgemeinen daraus keine Aussage für alle x machen kann.

Statistik der ersten Ziffern. Man betrachte die Folge $1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, \dots$, die als Folge der ersten Ziffern der Zweierpotenzen 2^n definiert ist. Der intuitive Begriff der 'Häufigkeit' einer Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen wird durch den Begriff der Dichte $d(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \{1, \dots, k\}|}{k}$ gefasst, falls dieser Limes existiert. Hier geht es um die Dichte von $A_i = \{i \in \mathbb{N} : 2^i \text{ beginnt mit } i\}$. Die etwas überraschende Aussage ist, dass

$$d(A_i) = \log_{10} \frac{i+1}{i},$$

dass also wirklich die Eins am häufigsten als erste Ziffer auftritt, wie es sich bei der kleine Stichprobe oben bereits angedeutet hat. Wir werden dies in Ab-

schnitt 8 als Konsequenz der eindeutigen Ergodizität von Kreisrotationen beweisen.

Ziele. Eine Vorlesung über Ergodentheorie startet fast zwangsläufig mit Poincarés Rekurrenzsatz und Birkhoffs Ergodensatz, und diese Vorlesung ist keine Ausnahme. Konsequenzen von Ergodizität haben wir oben schon angegeben. Eine zahlentheoretische Konsequenz einer verschärften Version von Poincarés Rekurrenzsatz ist folgende Aussage.

Satz 2.1 (Szemerédi) *Eine Teilmenge der ganzen Zahlen mit positiver oberer Banachdichte enthält beliebig lange arithmetische Progressionen.*

Dabei hat eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ eine positive obere Banachdichte falls für alle Folgen (m_j) und (n_j) mit $(n_j - m_j) \rightarrow \infty$ für $j \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [m_j, n_j]|}{n_j - m_j} > 0.$$

Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir von diskreten dynamischen Systemen zu dynamischen Systemen mit reellem Zeitparameter übergehen. Dies allein macht noch keinen großen Unterschied: die oben genannten Sätze gelten weiterhin unverändert, aber es gibt die Gelegenheit geometrisch motiviert dynamische Systeme zu untersuchen, vor allem den geodätischen Fluß auf der oberen Halbebene und allgemeineren hyperbolischen Mannigfaltigkeiten.

3 Erste Ergodensätze

3.1 Invariante Maße

Wir starten mit einigen allgemeinen Begriffen. Seien (X, \mathcal{B}) und (Y, \mathcal{C}) Messräume, d.h. \mathcal{B} und \mathcal{C} seien σ -Algebren auf X bzw. Y . Eine Abbildung $T : (X, \mathcal{B}) \rightarrow (Y, \mathcal{C})$ ist *messbar*, falls $T^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt. Ein *dynamisches System* ist (nichts anderes als einfach) eine messbare Selbstabbildung eines Messraums (X, \mathcal{B}) .

In der Folge wird hauptsächlich (falls nichts Gegenteiliges gesagt ist) X ein topologischer Raum sein und \mathcal{B} die Borel- σ -Algebra. In diesem Fall sind stetige Abbildungen messbar. Allgemeiner sind Abbildungen messbar, die auf einer Überdeckung von X durch Mengen in \mathcal{B} stetig sind.

Ein *Maßraum* (X, \mathcal{B}, μ) ist ein Messraum (X, \mathcal{B}) zusammen mit einem σ -additiven Maß μ . Wir sagen, dass X endlich ist, falls $\mu(X)$ endlich ist.

Definition 3.1 *Eine messbare Abbildung $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu)$ ist maßerhaltend, falls $\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$ für alle $B \in \mathcal{C}$ gilt.*

Ist $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathcal{B}, \nu)$ eine maßerhaltende Selbstabbildung, so wird μ ein T -invariantes Maß genannt. In diesem Fall wird (X, \mathcal{B}, μ, T) ein maßerhaltendes (dynamisches) System genannt.

Die Abbildung T wird invertierbar genannt, falls es eine messbare Abbildung $T^{-1} : (Y, \mathcal{C}) \rightarrow (X, \mathcal{B})$ gibt, die fast überall (in X und in Y) eine Umkehrabbildung ist.

Wir erinnern daran, dass die Borel- σ -Algebra eines metrischen Raums von offenen (oder abgeschlossenen) Kugeln (d.h. Intervallen im Fall $X = \mathbb{R}$ oder $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$) erzeugt ist. Daher genügt es in diesem Fall zum Nachweis der Invarianz eines Maßes, diese auf Kugeln (bzw. Intervallen) zu testen.

Definition 3.2 Seien (X, \mathcal{B}, μ, T) und (Y, \mathcal{C}, ν, S) dynamische Systeme auf endlichen Maßräumen, d.h. mit $\mu(X) < \infty$ und $\nu(Y) < \infty$.

Das System (Y, \mathcal{C}, ν, S) wird Faktor von (X, \mathcal{B}, μ, T) genannt, falls es eine maßerhaltende Abbildung $\phi : X \rightarrow Y$ gibt, sodass

$$\phi \circ T(x) = S \circ \phi(x)$$

für fast alle $x \in X$ gilt.

Ist ϕ invertierbar, so heißen (X, \mathcal{B}, μ, T) und (Y, \mathcal{C}, ν, S) isomorphe Systeme.

Beispiel 3.3 Sei $X = S^1$ der Einheitskreis. Die Rotation des Einheitskreises mit Winkel $2\pi\alpha$ ist die Abbildung

$$R_\alpha : S^1 \rightarrow S^1, \quad e^{2\pi it} \mapsto e^{2\pi i(t+\alpha)}.$$

Diese Abbildung erhält das Lebesgue-Maß auf dem Einheitskreis.

Sei $Y = I = [0, 1)$ das rechtsoffene Einheitsintervall. Das Vertauschen zweier Intervalle ist die Abbildung

$$T_\alpha : I \rightarrow I, \quad x \mapsto \begin{cases} x + \alpha & \text{falls } x \in [0, 1 - \alpha) \\ x + \alpha - 1 & \text{falls } x \in [1 - \alpha, 1) \end{cases}$$

Das Lebesgue-Maß auf $[0, 1)$ ist invariant unter dem Vertauschen zweier Intervalle. Die zwei Systeme sind isomorph, ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$\phi : S^1 \rightarrow I, \quad e^{2\pi it} \mapsto \lfloor \alpha \rfloor.$$

Beispiel 3.4 Das Vertauschen zweier Intervalle ist der Spezialfall einer Klasse interessanter dynamischer Systeme, der Intervallaustauschtransformationen (IET, von 'Interval exchange transformations'). Sei $I = [a, b)$ ein Intervall. Eine bijektive Abbildung $T : I \rightarrow I$ heißt *Intervallaustauschtransformation*, falls es eine Zerlegung von I in Teilintervalle $I = \cup_{i=1}^n [x_i, x_{i+1})$ mit $x_i < x_{i+1}$ gibt, sodass $T|_{[x_i, x_{i+1})}$ eine Translation ist.

Beispiel 3.5 Die Verdoppelungsabbildung des Kreises

$$T_2 : S^1 \rightarrow S^1, \quad e^{2\pi i\alpha} \mapsto e^{2\pi i(2\alpha)}$$

lässt auch das Lebesgue-Maß invariant. In der genügt es, dies auf Intervallen nachzuweisen und es ist

$$T_2^{-1}([a, b]) = [\frac{a}{2}, \frac{b}{2}] \cup [\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \frac{b}{2} + \frac{1}{2}].$$

Die beiden Intervalle auf der rechten Seite sind disjunkt, da $\frac{b}{2} < \frac{1}{2}$ und haben zusammen das Maß $\mu(b - a)$. An diesem Beispiel sieht man, dass man die Invarianten an Urbildern testen muss. Denn hier ist $\mu(T(B)) = 2\mu(B) \neq \mu(B)$ falls $\mu(B) \neq 0$.

In der Folge benötigen wir Invarianzbegriffe nicht nur für Teilmengen, sondern auch für Funktionenräume. Sei dazu

$$\mathcal{L}_\mu^1(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \int_X |f| d\mu < \infty\}$$

und

$$\mathcal{L}_\mu^\infty(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_\infty < \infty\},$$

wobei hier $\|f\|_\infty$ das essentielle Supremum der Funktion bezeichnet (und wir deswegen auch die Abhängigkeit vom Maß in der Notation manchmal betonen). Auf der Menge solcher Funktionen hat man natürliche Äquivalenzrelationen gegeben durch das Übereinstimmen außerhalb einer Menge vom Maß Null. Die Vektorräume dieser Äquivalenzklassen werden mit $L_\mu^1(X)$ bzw. $L_\mu^\infty(X)$ bezeichnet. Die Abbildung

$$\|f\|_1 = \int |f| d\mu$$

definiert eine Norm auf L_μ^1 und macht diesen Raum zu einem Banachraum.

Lemma 3.6 *Das Maß μ ist T -invariant genau dann, wenn*

$$\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$$

für alle $f \in L_\mu^1$.

Beweis: Gilt die Gleichung für alle f , so insbesondere für charakteristische Funktionen und damit ist nach der obigen Bemerkung das Maß μ invariant unter T .

Ist umgekehrt μ invariant unter T , so gilt die Gleichung für alle Treppenfunktionen. Nach dem Approximationssatz gilt sie für alle positiven integrierbaren Funktionen und mit Hilfe der Zerlegung in Positiv- und Negativteil gilt sie für alle integrierbaren Funktionen. \square

Beispiel 3.7 Ein wichtiges Beispiel ist der Raum der binären Folgen $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Wir versehen $\{0, 1\}$ mit der trivialen Topologie, bei der alle Teilmengen offen sind. Dann versehen wir X mit der Produkttopologie. (Zur Erinnerung: offene Mengen sind an allen bis auf endlich vielen Faktoren der ganze Raum und an den verbleibenden endlich vielen Stellen eine offene Menge in $\{0, 1\}$). Sei \mathcal{B} die Borel σ -Algebra auf X zur Produkttopologie.

Der Linksshift $L : (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \dots)$ ist ein dynamisches System auf (X, \mathcal{B}) .

Für jedes $p \in [0, 1]$ definiert $\mu_p(0) = p$ und $\mu_p(1) = 1 - p$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{0, 1\}$. Sei μ_p^X das Produktwahrscheinlichkeitsmaß auf X . Das Maß μ_p^X ist L -invariant.

Der Linksshift ist zur Verdopplungsabbildung des Kreises isomorph. Sei dazu

$$\phi : X \rightarrow S^1, \quad (a_0, a_1, \dots) \mapsto \exp\left(2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}\right).$$

Die Kompositionseigenschaft $\phi \circ L = T_2 \circ \phi$ ist offensichtlich. Die Umkehrabbildung ordnet $\exp(2\pi i t)$ mit $t \in [0, 1)$ seine 2-adische Entwicklung zu.

3.2 Rekurrenz

Der erste wichtige Satz über dynamische Systeme besagt, dass man bei einem endlichen Maß fast immer zu einer gegebenen Startmenge zurückkommt.

Satz 3.8 (Poincarés Rekurrenzsatz) Sei T ein dynamisches System auf (X, \mathcal{B}, μ) und μ ein endliches Maß. Sei $E \subset X$ messbar. Dann kehrt fast jeder Punkt in E unendlich oft nach E zurück, d.h. es gibt $F \subset E$ mit $\mu(F) = \mu(E)$ und für alle $x \in F$ eine unbeschränkte Folge von Zahlen $0 < n_1 < n_2 < \dots$, sodass die Bilder $T^{n_i}(x)$ in E liegen für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $B_1 = E \setminus \{x \in E : T^n(x) \notin E \text{ für alle } n \geq 1\}$. Diese 'Ausnahme'-Menge ist messbar, wie man an der Darstellung

$$B_1 = E \cap T^{-1}(X \setminus E) \cap T^{-2}(X \setminus E) \cap \dots$$

als abzählbarer Durchschnitt sieht. Dann ist für $n \geq 1$

$$T^{-n}B_1 = T^{-n}E \cap T^{-n-1}(X \setminus E) \cap T^{-n-2}(X \setminus E) \cap \dots$$

da Durchschnittsbildung und Urbild nehmen vertauscht. Also sind die Mengen $T^{-n}(B_1)$ für $n \geq 1$ paarweise disjunkt und folglich vom Maß Null, da μ endlich ist. Die Menge $F_1 = E \setminus B_1$ hat also die Eigenschaft, dass jedes $x \in F_1$ unter T^1 irgendwann nach F_1 zurückkehrt und ausserdem ist $\mu(F_1) = \mu(E)$. In gleicher Weise definieren wir B_n mit Hilfe von T^n anstelle von T^1 . Sei dann $F_n = E \setminus B_n$. Schließlich hat $F = \bigcap_{n \geq 1} F_n$ die gewünschten Eigenschaften. \square

Ohne die Endlichkeitsvoraussetzung ist der Satz offenbar falsch, wie man $T(x) = x + 1$ als Selbstabbildung von \mathbb{R} versehen mit dem Lebesgue-Maß sofort sieht.

3.3 Ergodizität

Sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein dynamisches System auf einem endlichen Maßraum. Ergodizität ist die maßtheoretische Form der Unzerlegbarkeit eines dynamischen Systems, nur 'Alles' oder 'Nichts' ist invariant. Dabei unterscheidet man Mengen $B \subset X$, die (strikt) invariant sind, d.h. $T^{-1}(B) = B$ und Mengen, die fast invariant sind, d.h. sodass $\mu(T^{-1}(B)\Delta B) = 0$ ist. Dabei ist Δ die symmetrische Differenz. Bei der Definition von Ergodizität spielt es keine Rolle, welchen Invarianzbegriff man verwendet, wie wir gleich sehen werden. Wichtig ist nur, dass man (wie 'immer') mit T -Urbildern arbeitet, um auch bei nicht-invertierbaren Systemen das Verhalten korrekt zu untersuchen.

Definition 3.9 Ein dynamisches System T wird ergodisch genannt, falls alle strikt invarianten Teilmengen das Maß Null oder Eins haben.

Proposition 3.10 Die folgenden Aussagen sind äquivalent

- (1) T ist ergodisch.
- (2) Alle fast-invarianten Mengen haben Maß Null oder Eins.
- (3) Die Urbilder jeder Menge von positivem Maß haben zusammen Maß Eins.
- (4) Sind $A, B \in \mathcal{B}$ zwei Mengen von positivem Maß, so gibt es ein $n \geq 1$, sodass $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$ ist.
- (5) Jede fast-invariante Funktion ist fast überall gleich einer konstanten Funktion.

Beweis: Für die Implikation (1) \Rightarrow (2) müssen wir zu gegebener Menge B mit $\mu(B\Delta T^{-1}(B)) = 0$ eine invariante Menge konstruieren, um die Voraussetzungen in der Definition der Ergodizität zu erfüllen. Dazu beobachten wir zunächst, dass $\mu(B\Delta T^{-n}(B)) = 0$ für alle $n \geq 1$, denn

$$B\Delta T^{-n}(B) \subset \bigcup_{i=0}^{n-1} T^{-i}(B)\Delta T^{-(i+1)}B$$

und diese Menge hat nach Voraussetzung Maß Null. Sei nun $C_N = \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(B)$. Diese Mengen bilden eine absteigende Kette ineinanderliegender Teilmengen und wir setzen

$$C = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}(B) = \bigcap_{N=0}^{\infty} C_N.$$

Es ist $\mu(B \Delta C_N) \leq \mu(\cup_{n=N}^{\infty} B \Delta T^{-n}B) = 0$ und somit auch $\mu(B \Delta C) = 0$, also $\mu(B) = \mu(C)$. Ausserdem ist

$$T^{-1}(C) = \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n-1}(B) = \bigcap_{N=1}^{\infty} C_N = C$$

und damit nach Voraussetzung $\mu(C) \in \{0, 1\}$.

Für die Implikation (2) \Rightarrow (3) sei $\mu(A) > 0$ und $B = \cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A)$. Dann ist $T^{-1}(B) \subset B$ und $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$, also ist B fast invariant. Da $\mu(B) = 0$ unmöglich ist, folgt $\mu(B) = 1$, was zu zeigen war.

Um (3) \Rightarrow (4) zu zeigen, seien A, B Mengen von positivem Maß. Nach Voraussetzung ist $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A))$. Daher ist

$$0 < \mu(B) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B \cap T^{-n}(A)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap T^{-n}(A)).$$

Daher muss mindestens einer der Summanden positives Maß haben.

Für (4) \Rightarrow (1) sei A invariant unter T und wir wenden die Aussage auf A und $B = X \setminus A$ an. Da $0 = \mu(T^{-n}(A) \cap (X \setminus A))$ für alle n , sind die Voraussetzungen von (4) nicht erfüllt, d.h. $\mu(A) = 1$ oder $\mu(X \setminus A) = 1$.

Wir zeigen nun (2) \Rightarrow (5). Sei also $f \circ T = f$ fast überall. Wir können für Realteil und Imaginärteil getrennt argumentieren und können also annehmen, dass f reellwertig ist. Wir spalten den Raum auf, je nachdem in welches Intervall $f(x)$ fällt und verkleinern dann die Länge der Intervalle. Sei also

$$A_n^k = \{x \in X : f(x) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})\}.$$

Dann ist $T^{-1}A_n^k \Delta A_n^k$ enthalten in der Nullmenge, auf der $f \circ T \neq f$ ist. Also gibt es genau ein $k = k(n)$ mit $\mu(A_n^k) = 1$ und für $j \neq k$ ist $\mu(A_n^j) = 0$. Also ist f auf $Y = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^{k(n)}$ konstant und diese Menge hat Maß eins.

Die Implikation (5) \Rightarrow (2) folgt direkt mit Hilfe von $f = \chi_B$. \square

Wir können nun die Ergodizität der obigen Beispiele beweisen.

Proposition 3.11 *Der Linksshift ist ergodisch für das Produktmaß auf $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.*

Beweis: Sei B eine fast L -invariante messbare Menge. Nach der Definition des Produktmaßes kann man das Maß durch Vereinigungen von Zylindermengen approximieren. Sei also A eine endliche Vereinigung von Zylindern mit $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$. Diese endliche Vereinigung betrifft also nur Indices bis zu einem Maximalindex $N = N(\varepsilon)$ und so kann man A beschreiben als

$$A = \{x \in X : X|_{[0, N]} \in F\},$$

wobei F eine endliche Menge in $\{0, 1\}^N$ ist. Sei $M > N$. Dann ist A (und auch $X \setminus A$) durch Bedingungen auf $[0, N]$, aber $L^{-M}(A)$ durch Bedingungen auf der dazu disjunkten Menge $[M, M + N]$ spezifiziert. Daraus folgt

$$\mu(L^{-m}(A) \setminus A) = \mu(L^{-m}(A) \cap (X \setminus A)) = \mu(L^{-m}(A))\mu(X \setminus A) = \mu(A)\mu(X \setminus A).$$

Außerdem ist

$$\mu(L^{-M}(A) \Delta B) = \mu(L^{-M}(A) \Delta L^{-M}(B)) = \mu(A \Delta B) < \varepsilon,$$

sodass $\mu(L^{-M}(A) \Delta A) < 2\varepsilon$ nach Konstruktion von A . Damit ist auch $\mu(L^{-m}(A) \setminus A) < 2\varepsilon$. Schließlich folgt

$$\begin{aligned} \mu(B)\mu(X \setminus B) &< (\mu(A) + \varepsilon)(\mu(X \setminus A) + \varepsilon) \\ &= \mu(A)\mu(X \setminus A) + \varepsilon\mu(A) + \varepsilon\mu(X \setminus A)\varepsilon^2 \\ &< \mu(A)\mu(X \setminus A) + 3\varepsilon < 5\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ erhalten wir also $\mu(B) = 0$ oder $\mu(X \setminus B) = 0$. \square

Ergodizität geht aufgrund von Proposition 3.10 (2) offenbar auf isomorphe Systeme über. Aufgrund der Isomorphie in Beispiel 3.7 folgt sofort:

Proposition 3.12 *Die Verdoppelungsabbildung T_2 des Kreises ist ergodisch für das Lebesgue-Maß.*

Proposition 3.13 *Die Rotation des Kreises R_α ist ergodisch für das Lebesgue-Maß genau dann, wenn α irrational ist.*

Beweis: Ist $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$, so ist R_α^q die Identität. Nimmt man eine Menge von Winkeln $M \subset [0, 1/q]$ mit $0 < \mu(M) < 1/q$, so zertifiziert $\cup_{i=0}^{q-1} R_\alpha^i(M)$ die Nichtergodizität.

Sei also nun $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Dann ist die Menge von Winkeln $(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}) \cap [0, 1)$ dicht in $[0, 1)$. Genauer gesagt sind die Zahlen $n\alpha - [n\alpha] \in [0, 1)$ für $n \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden, also gibt es zu jedem ε ein paar von Indizes n_1, n_2 sodass die entsprechenden $n\alpha - [n\alpha]$ höchstens ε voneinander entfernt sind. Damit gibt es β der Gestalt $\beta = m\alpha - k \in [0, \varepsilon)$ und mit Vielfachen von β erreicht man jede Zahl in $[0, 1)$ bis auf einen Abstand ε .

Angenommen $B \subset S^1$ ist invariant unter R_α . Dann basteln wir eine stetige Funktion $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f - \chi_B\|_1 < \varepsilon$. Aufgrund der Invarianz von B (interpretiert in der Form von Lemma 3.6) und der Dreiecksungleichung gilt

$$\|f \circ R_\alpha^n - f\|_1 < 2\varepsilon.$$

für alle n . Wegen der Dichtheit von $(\mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}) \cap [0, 1)$ und der Stetigkeit von f gilt sogar

$$\|f \circ R_t - f\|_1 \leq 2\varepsilon$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ (strikte Ungleichung kann man nicht mehr garantieren) und damit

$$\begin{aligned} \|f - \int f(t)dt\|_1 &= \int \left| \int f(x) - f(x+t)dt \right| dx \\ &\leq \int \int |f(x) - f(x+t)| dx dt \leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad (3.2)$$

nach dem Satz von Fubini. Also ist wegen $|\int f(t)dt - \mu(B)| < \varepsilon$ und der Dreiecksungleichung

$$\|\chi_B - \mu(B)\| < 4\varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ist χ_B fast überall konstant, also $\mu(B) \in \{0, 1\}$. Nach Proposition 3.10 folgt die Ergodizität. \square

3.4 Ergodizität in Mittel

Ergodensätze vergleichen das zeitliche Mittel einer Funktion, d.h. den Mittelwert über der Bahn, mit dem räumlichen Mittel, d.h. dem Integral über den ganzen Raum. Dabei ist das Bahnmittel als Limes der endlichen Teilabschnitte zu interpretieren. Ist ein dynamisches System ergodisch, so gilt die Gleichheit von zeitlichem und räumlichen Mittel an fast jedem Punkt, wie wir am Ende des Abschnitts gezeigt haben werden. Wir starten mit der schwächeren Aussage, die das nicht punktweise sondern für 'den Durchschnitt aller Punkte' behauptet.

Dazu erinnern wir an die Funktionenräume

$$\mathcal{L}_\mu^p(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : \int_X |f|^p d\mu < \infty\},$$

welche den oben eingeführten Raum für $p = 1$ verallgemeinern, sowie an die zugehörigen Räume L_μ^p bestehend aus Äquivalenzklassen von Funktionen in \mathcal{L}_μ^p , die fast überall gleich sind. Mit Hilfe der Norm

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird dieser Raum zu einem Banachraum. Im Spezialfall $p = 2$ definiert

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int f_1 \overline{f_2} d\mu$$

ein Skalarprodukt, welches die Norm $\|\cdot\|_2$ induziert und L_μ^2 zu einem Hilbertraum macht.

Ein dynamisches System T , d.h. eine maßerhaltende Selbstabbildung von (X, \mathcal{B}, μ) , definiert einen Operator

$$U_T : L_\mu^2 \rightarrow L_\mu^2, \quad f \mapsto f \circ T.$$

Wenn T invertierbar ist, so ist offenbar auch U_T invertierbar und es gilt

$$\langle U_T f_1, U_T f_2 \rangle = \int (f_1 \circ T) \overline{(f_2 \circ T)} d\mu = \int f_1 \overline{f_2} d\mu = \langle f_1, f_2 \rangle.$$

Also ist U_T eine Isometrie (d.h. normerhaltend) und falls T invertierbar ist, so ist U_T ein unitärer Operator, wie der verwendete Buchstabe suggeriert.

Der umgangssprachliche Begriff des zeitlichen Mittels wird durch folgenden Operator präzise gemacht. Wir definieren das N -te *ergodische Mittel* von f als

$$A_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f \circ T^i.$$

Der Begriff ist etwas irreführend, da dabei wie auch im folgenden keinerlei Ergodizitätsvoraussetzungen gemacht werden. Wir können jetzt den angekündigten Ergodensatz im Mittel formulieren.

Satz 3.14 (von Neumanns Ergodensatz) Sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein maßerhaltendes dynamisches System mit endlichem Maß μ und P_T die Orthogonalprojektion auf den Raum der invarianten Funktionen

$$I = \{g \in L_\mu^2 : U_T g = g\} \subset L_\mu^2.$$

Dann gilt für alle $f \in L_\mu^2$ die Konvergenz

$$A_N f \rightarrow P_T f \quad \text{in} \quad L_\mu^2.$$

für $N \rightarrow \infty$.

Der Satz am ist nützlichsten, wenn T ergodisch ist, denn dann besteht I nur aus den konstanten Funktionen,

Beweis: Sei $B = \text{Bild}(U_T - 1)$ und wir zeigen, dass $B^\perp = I$. Da $I = \text{Ker}(U_T - 1)$ folgt die Inklusion \supseteq aus der Eigenschaft Isometrie, denn ist $U_T f = f$, so ist

$$\langle f, U_T g - g \rangle = \langle U_T f, U_T g \rangle - \langle f, g \rangle = 0.$$

Ist umgekehrt $f \in B^\perp$, so impliziert die gleiche Rechnung

$$\langle U_T g, f \rangle = \langle f, g \rangle \quad \text{bzw.} \quad \langle g, U_T^* f \rangle = \langle f, g \rangle,$$

wobei U_T^* die Adjungierte von U_T bezüglich des Skalarprodukts ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|U_T f - f\|_2^2 &= \|U_T f\|_2^2 - \langle f, U_T f \rangle - \langle U_T f, f \rangle + \|f\|_2^2 \\ &= 2\|f\|_2^2 - \langle U_T^* f, f \rangle - \langle f, U_T^* f \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

und wir haben die erste Behauptung gezeigt.

Da I abgeschlossen ist (B aber nicht notwendigerweise), folgt $L_\mu^2 = I \oplus \overline{B}$. Also genügt es für $h \in \overline{B}$ zu zeigen, dass $A_N h \rightarrow 0$ in der $\|\cdot\|_2$ -Norm konvergiert. Zunächst prüfen wir das für $h = U_T g - g \in B$. Dann konvergiert

$$\begin{aligned} \|A_N(U_T g - g)\|_2 &= \left\| \frac{1}{N}(U_T g - g) + (U_T^2 g - U_T g) + \cdots + (U_T^N g - U_T^{N-1} g) \right\|_2 \\ &= \frac{1}{N} \|U_T^N g - g\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

für $N \rightarrow \infty$. Sei nun h_i eine Folge in B , die gegen $h \in \overline{B}$ konvergiert. Sei $g_i \in L_\mu^2$, sodass $h_i = U_T g_i - g_i$. Dann ist $A_N h = A_N(h - h_i) + A_N h_i$. Wir fixieren ε . Für i groß genug ist $\|h - h_i\|_2 < \varepsilon$ und nach Anwendung von A_N gilt diese Abschätzung immer noch. Nach der obigen Überlegung ist $\|A_N h_i\|_2 < \varepsilon$ und damit zusammen $\|A_N h\|_2 < 2\varepsilon$. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. \square

Eine Variante dieses Satzes für Funktionen in L_μ^1 statt in $L^2\mu$ ist noch nützlicher, da näher an der Formulierung des punktweisen Ergodensatzes.

Korollar 3.15 Sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein maßerhaltendes dynamisches System mit endlichem Maß μ . Dann konvergieren für jedes $f \in L_\mu^1$ die ergodischen Mittel $A_N(f)$ gegen eine T -invariante Funktion $f^* \in L_\mu^1$.

Beweis: Wir verwenden, dass für ein endliches Maß μ die Funktionenräume $L_\mu^\infty \subseteq L_\mu^2$ und $L_\mu^\infty \subseteq L_\mu^1$ ineinander enthalten sind und darin jeweils dicht liegen. Genauer sei $g \in L_\mu^\infty$ und $g' = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(g)$. Wir behaupten, dass g' nicht nur in L_μ^2 sondern sogar in L_μ^∞ liegt. Dazu halten wir fest, dass $\|A_N(g)\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ für alle N gilt und damit gilt für $B \in \mathcal{B}$ die Abschätzung

$$|\langle A_N(g), \chi_B \rangle| \leq \|g\|_\infty \mu(B).$$

Aufgrund der L_μ^2 -Konvergenz folgt daraus $|\langle g', \chi_B \rangle| \leq \|g\|_\infty \mu(B)$ und damit $\|g'\|_\infty \leq \|g\|_\infty$.

Nun haben wir das Korollar für die dichte Teilmenge L_μ^∞ bewiesen und wollen es auf ganz L_μ^1 ausdehnen. Sei dazu $f \in L_\mu^1$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir wählen $g \in L_\mu^\infty$ mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Da μ invariant unter T ist, folgt auch $\|A_N(f) - A_N(g)\|_1 < \varepsilon$ und es gibt ein N_0 , sodass für $N > N_0$ die Ungleichung $\|A_N(g) - g'\|_1 < \varepsilon$ für ein $g' \in L_\mu^\infty \subset L_\mu^1$ gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgt also für alle $N, N' > N_0$, dass

$$\|A_N(g) - A_{N'}(g)\|_1 < 4\varepsilon.$$

Also bildet die Folge $A_N(g)$ eine Cauchy-Folge in L_μ^1 und da dies ein Banachraum ist, konvergiert sie. Es gilt zudem

$$\|A_N(g) \circ T - A_N(g)\|_1 < \frac{2}{N} \|f\|_1,$$

da sich die Summen in den ergodischen Mitteln bis auf den ersten und letzten Term aufheben. Daraus folgt im Limes $N \rightarrow \infty$, dass der Grenzwert von $A_N(g)$ invariant unter T ist. \square

3.5 Birkhoffs Ergodensatz

Ziel dieses Abschnitts ist die angekündigte punktweise Verschärfung des vorigen Ergodensatzes.

Satz 3.16 (Birkhoffs Ergodensatz) Sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein maßerhaltendes dynamisches System mit endlichem Maß μ . Ist $f \in L^1_\mu$, so konvergiert $A_N(f) \rightarrow f^*$ für $N \rightarrow \infty$ fast überall gegen eine T -invariante Funktion $f^* \in L^1_\mu$. Zudem ist $\int_X f d\mu = \int_X f^* d\mu$. Ist T zudem ergodisch, so ist f^* fast überall konstant.

Der Beweis des Satzes verwendet zwei andere Resultate, die für sich genommen nützlich und wichtig sind. In Satz 3.14 haben wir ergodische Mittel im Durchschnitt kontrolliert und wir wollen nun Ausreißer kontrollieren.

Zur Motivation der folgenden Aussage sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein maßerhaltendes dynamisches System mit endlichem Maß μ und $\mu(B) = \varepsilon > 0$, wobei wir uns ε als sehr klein denken. Dann gilt wegen $\int_X \chi_B(T) d\mu = \varepsilon$ auch $\int_X A_N(\chi_B) d\mu = \varepsilon$. Wir fragen uns für welche Mengen von Punkten x das ergodische Mittel signifikant größer ist. Durch einfache Fallunterscheidung sieht man

$$\sqrt{\varepsilon} \chi_{\{y: A_N(\chi_B)(y) > \sqrt{\varepsilon}\}}(x) \leq A_N(\chi_B)(x)$$

ein und daraus folgt

$$\sqrt{\varepsilon} \mu(\{x : A_N(\chi_B)(x) > \sqrt{\varepsilon}\}) \leq \int_X A_N(\chi_B) d\mu = \varepsilon.$$

Also gibt es zu gegebenem B und N eine Menge vom Maß kleiner gleich $\sqrt{\varepsilon}$, deren T -Bilder deutlich mehr (nämlich $\sqrt{\varepsilon}N$ der Fälle) als erwartet (nämlich εN der Fälle) in der Menge B landen. Allerdings hängt diese Menge von N ab und das Ziel der nächsten Aussage ist es solch eine Menge unabhängig von N zu finden.

Satz 3.17 (Ergodensatz für Maxima) Sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein maßerhaltendes dynamisches System mit endlichem Maß μ . Zu $g \in L^1_\mu$ reellwertig und $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$E_{g,\alpha} = \{x \in X : \sup_{N \in \mathbb{N}} A_N(g) > \alpha\}.$$

Dann ist

$$\alpha \mu(E_{g,\alpha}) \leq \int_{E_{g,\alpha}} g d\mu \leq \|\mu\|_1.$$

Für eine T -invariante Menge A hat man zudem die Abschätzung

$$\alpha \mu(E_{g,\alpha} \cap A) \leq \int_{E_{g,\alpha} \cap A} g d\mu.$$

Der Beweis des Satzes 3.17 verwendet folgende Ungleichung. Wir erinnern für einen linearen Operator (d.h. eine lineare stetige Abbildung) $U : V \rightarrow W$ zwischen zwei Banachräumen an die Definition der Operatornorm $\|U\| = \sup_{f \in V \setminus \{0\}} \|U(f)\|/\|f\|$. Sind V, W Banachräume reellwertiger Funktionen (wie z.B. die L^p_μ), so ist ein solcher Operator positiv, falls aus $f \geq 0$ die Eigenschaft $U f \geq 0$ folgt.

Proposition 3.18 (Maxima-Ungleichung) Sei $U : L_\mu^1 \rightarrow L_\mu^1$ ein positiver Operator mit Norm $\|U\| \geq 1$. Zu $f \in L_\mu^1$ definieren wir $f_0 = 0$, $f_1 = f$,

$$f_n = \sum_{i=0}^{n-1} U^i(f)$$

und schließlich $F_N = \max\{f_n, 0 \leq n \leq N\}$. Dann ist

$$\int_{\{x \in X : F_N(x) > 0\}} f \, d\mu \geq 0.$$

Wir zeigen zunächst wofür wir diese Ungleichung verwenden.

Beweis von Satz 3.17: Sei $f = g - \alpha$ und $Uf = f \circ T$. Dann ist

$$E_{g,\alpha} = \bigcup_{N=0}^{\infty} \{x \in X : F_N(x) > 0\}.$$

Die Maxima-Ungleichung besagt dann $\int_{E_{g,\alpha}} f \, d\mu \geq 0$ und das ist gerade die Behauptung. Die Zusatzaussage gewinnt man durch Anwendung des Beweises auf das dynamische Teilsystem A und $T|_A$. \square

Beweis von Proposition 3.18: Offenbar ist F_N als Maximum endlich vieler integrierbarer Funktionen wieder integrierbar. Da U positiv ist, folgt $F_N \geq f_n$ für alle $n \leq N$. Daraus folgt für $0 \leq k \leq N$, dass

$$UF_N + f \geq Uf_k + f = f_{k+1},$$

also

$$UF_N + f \geq \max_{1 \leq n \leq N} f_n. \quad (3.5)$$

Auf der Menge $P_N = \{x \in X : F_N(x) > 0\}$ über die wir schließlich integrieren wollen, können wir $f_0 = 0$ in der Maximumsbildung vernachlässigen. Für $x \in P_N$ gilt also durch Umstellen von (3.5)

$$f(x) \geq F_N(x) - UF_N(x).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \int_{P_N} f \, d\mu &\geq \int_{P_N} F_N \, d\mu - \int_{P_N} UF_N \, d\mu \\ &= \int_X F_N \, d\mu - \int_{P_N} UF_N \, d\mu \\ &\geq \int_X F_N \, d\mu - \int_X UF_N \, d\mu \geq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

da $\|U\| \geq 1$. \square

Beweis von Satz 3.16: Wieder zeigen wir einen Satz zunächst für $f \in L_\mu^\infty \subset L_\mu^1$. Für eine solche Funktion wenden wir die Ergodizität im Mittel in der L_μ^1 -Version Korollar 3.15 an. Die Folge der ergodischen Mittel konvergiere gegen eine invariante Funktion F . Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also ein M , sodass $\|A_N(f) - F\|_1 < \varepsilon^2$. Jetzt wenden wir den Ergodensatz für Maxima (Satz 3.17) auf die Differenzfunktion $g = F - A_M(f)$ an. Dieser besagt, dass

$$\varepsilon \mu(\{x \in X : \sup_{N \geq 1} |A_N(F - A_M(f))| > \varepsilon\}) < \varepsilon^2$$

ist. Invarianz impliziert $A_N(F) = F$ und für festes N gilt (im Limes $N \rightarrow \infty$)

$$A_N(A_M(f)) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f \circ T^{n+m} \leq A_n(f) + C_M \frac{1}{N} \|f\|_\infty \quad (3.7)$$

für eine nur von M abhängige Konstante C_M , da in der Doppelsumme alle Terme bis auf die M ersten und M letzten genau M mal vorkommen. Also gilt

$$\begin{aligned} \mu(\{x : \limsup_{N \geq 1} |F - A_N(f)| > \varepsilon\}) &= \mu(\{x : \limsup_{N \geq 1} |F - A_N(A_M(f))| > \varepsilon\}) \\ &\leq \mu(\{x : \sup_{N \geq 1} |A_N(F - A_M(f))| > \varepsilon\}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.8)$$

was die punktweise Konvergenz $A_N(f) \rightarrow F$ für fast jeden Punkt beweist.

Um dieses Result nun auf $g \in L_\mu^1$ zu verbessern, fixieren wir wieder $\varepsilon > 0$ und eine Approximation $f \in L_\mu^\infty$ mit $\|f - g\|_1 < \varepsilon^2$. Seien F bzw. G die Grenzwerte von $A_N(f)$ bzw. $A_N(g)$. Auch für diese gilt dann nach Definition von ergodischen Mitteln, dass $\|F - G\|_1 < \varepsilon^2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mu(\{x : \limsup_{N \geq 1} |G - A_N(g)| > 2\varepsilon\}) \\ &\leq \mu(\{x : |G - F| + \limsup_{N \geq 1} |F - A_N(f)| + \sup_{N \geq 1} |A_N(f - g)| > 2\varepsilon\}) \\ &\leq \mu(\{x : |G - F| > \varepsilon\}) + \mu(\{x : \sup_{N \geq 1} |A_N(g - f)| > \varepsilon\}) \\ &\leq \varepsilon^{-1} \|G - F\|_1 + \varepsilon^{-1} \|g - f\|_1 \leq 2\varepsilon \end{aligned} \quad (3.9)$$

nach der Dreiecksungleichung, dem bisher bewiesenen Fall und dem Ergodensatz für Maxima, was wiederum die punktweise Konvergenz $A_N(g) \rightarrow G$ für fast jeden Punkt beweist. \square

Beispiel 3.19 Mit Hilfe des Birkhoffschen Ergodensatzes können wir nun das erste motivierende Beispiel, die Häufigkeit von Ziffernblöcken, erklären. Man sagt, dass $x \in [0, 1)$ *normal* ist, falls jeder Ziffernblock der Länge k mit Häufigkeit $1/10^k$ im Limes auftritt. Wir haben gesehen, dass der Linksshift um eine Stelle, auf $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, ergodisch ist. Mit dem gleichen Beweis ist der Linksshift

auf $\{0, 1, \dots, 9\}$ um k Stellen ergodisch. Wählt man als Testfunktion f gerade die charakteristische Funktion von a_1, a_2, \dots, a_k auf den ersten Ziffern, so besagt der Birkhoffsche Ergodensatz, dass fast alle $x \in [0, 1)$ normal sind. Die Ausnahmengenmenge hängt natürlich vom gewählten Ziffernblock ab.

4 Kettenbrüche

Was zunächst wie eine Spielerei aussieht – warum sollte man eine reelle Zahl kompliziert als einen unendlich verschachtelten Bruch schreiben? – erweist sich in der Zahlentheorie und Geometrie als nützliches Werkzeug. Irrationalzahlen vom Grad zwei lassen sich mit Hilfe von Kettenbrüchen charakterisieren und in der Geometrie von geodätischen Flüssen werden wir später ein zu Kettenbrüchen äquivalentes dynamisches System finden. Unser erstes Ziel knüpft an das gerade am Ende des letzten Abschnitts gezeigte Beispiel an: Wie häufig tritt welche Zahl statistisch in einer Kettenbruchentwicklung auf?

4.1 Elementare Eigenschaften

Wir bezeichnen mit dem Symbol

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

den endlichen n -fach iterierten Bruch mit Summanden a_i . Jeder reellen Zahl $x \geq 0$ ordnen wir eine Folge von Zahlen $a_i \in \mathbb{N}_0$ durch folgende rekursive Vorschrift zu. Sei zu Anfang $x_0 = x$ und $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$. Wir setzen für $i \geq 0$

$$x_{i+1} = \frac{1}{x_i - a_i}, \quad a_{i+1} = \lfloor x_{i+1} \rfloor$$

und wir brechen die Rekursion ab, falls x_i ganzzahlig ist. Formal schreibt man

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

aber bisher haben wir noch keine Konvergenz des Symbols auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gezeigt. Im Falle einer bei $x_n \in \mathbb{Z}$ abbrechenden Entwicklung gilt offenbar $x = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ und damit sind solche x rational. Unser erstes Ziel wird also sein, zu zeigen, dass

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Dazu bezeichnen wir die rationale Zahl

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

in koprimärer Bruchdarstellung mit $p_n \geq 1$ und $q_n \geq 1$ auch als n -ten Näherungsbruch von x .

Lemma 4.1 Die Näherungsbrüche erhält man rekursiv durch

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle $n \geq 0$, wobei $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$ und $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$.

Beweis: Für $n = 0$ gilt die Aussage nach Definition der ersten Werte. Wir nehmen induktiv an, dass die Aussage für Näherungsbrüche der Länge $k - 1$ gilt. Sei

$$\frac{x}{y} = [a_1; a_2, a_3, \dots, a_k],$$

also nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

für gewisse x' , y' , die wir nicht weiter betrachten. Nach Definition ist also

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0x + y & a_0x' + y' \\ x & x' \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_0x + y}{x} = a_0 + \frac{y}{x} = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, a_3, \dots, a_k]} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Außerdem sind p_n und q_n teilerfremd, denn sonst hätten $a_0x + y$ und x und somit x und y einen gemeinsamen Teiler. \square

Proposition 4.2 Die Folgen (p_n) und (q_n) sind monoton wachsend, ab $n > 1$ streng monoton und es gilt $p_n \geq 2^{(n-2)/2}$ und auch $q_n \geq 2^{(n-2)/2}$. Die Näherungsbrüche kann man als alternierende Summe

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{q_{i-1}q_i} \quad (4.1)$$

schreiben und diese Folge der Näherungsbrüche konvergiert gegen x .

Beweis: Die Monotonie und Abschätzung nach unten folgen unmittelbar aus

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n p_{n-1} + p_{n-2} & p_{n-1} \\ a_n q_{n-1} + q_{n-2} & q_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Die Determinante dieser Gleichung ergibt induktiv

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = p_{n-2} q_{n-1} - q_{n-2} p_{n-1} = (-1)^{n+1}. \quad (4.3)$$

Durchdividieren durch $q_n q_{n-1}$ liefert mit Induktion die behauptete Formel und die Konvergenz folgt auch daraus. \square

Daraus folgt, dass die Näherungsbrüche sehr gute Näherungen (im Verhältnis zur Nennergröße) bilden. Aus

$$x - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n \left(\frac{1}{q_n q_{n+1}} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{1}{q_n q_{n+1}} - \dots \right)$$

folgt mit Hilfe der Monotonie der q_i und der absoluten Konvergenz von (4.1), dass

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \quad (4.4)$$

und damit auch

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}. \quad (4.5)$$

Rationale Zahlen haben niemals unendlich viele so gute Näherungsbrüche, außer sich selbst. Genauer gesagt:

Lemma 4.3 *Ist (a_n) eine Folge natürlicher Zahlen, von Null verschieden für $n \geq 1$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ irrational. D.h. die Kettenbruch-Rekursion bricht genau dann ab, wenn x rational ist.*

Beweis: Sei $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dann folgt aus der Abschätzung (4.5), dass

$$|q_n a - b p_n| < \frac{b}{a_{n+1} q_n} \leq \frac{b}{q_n}.$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ folgt aus $q_n a - b p_n \in \mathbb{Z}$, dass $q_n a - b p_n = 0$ und damit, dass die Kettenbruchentwicklung abbricht. \square

Die Näherungsbrüche aus der Kettenbruchentwicklung bilden nicht nur gute, sondern optimale Näherungen im folgenden Sinn.

Proposition 4.4 *Sei $x \in \mathbb{R}_{>1} \setminus \mathbb{Q}$ mit Kettenbruchentwicklung $x = [a_0; a_1, a_2, \dots]$. Ist p/q ein Bruch mit Nenner $0 < q \leq q_n$ und $p/q \neq p_n/q_n$, so gilt*

$$|p_n - q_n x| < |p - q x|, \quad \text{insbesondere} \quad \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

Beweis: Die Aussage 'insbesondere' folgt aus der ersten nach Durchdividieren mit $q q_n$ wegen $q \leq q_n$. Zum Beweis der ersten Aussage notieren wir, dass in der Gleichheit

$$\left(x - \frac{p_n}{q_n} \right) = \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right) - \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x \right)$$

die geklammerten Ausdrücke aufgrund der alternierenden Approximation der Kettenbrüche jeweils alle gleiches Vorzeichen haben und daher die Gleichheit auch noch mit Betragsstrichen statt Klammern gilt. Also ist

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{q_n q_{n+1}} - \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} = \frac{q_{n+2} - q_n}{q_n q_{n+1} q_{n+2}} = \frac{a_{n+2}}{q_n q_{n+2}} \quad (4.6)$$

aufgrund von (4.1) und (4.2). Durchmultiplizieren ergibt

$$\frac{1}{q_{n+2}} < |p_n - q_n x| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

und nochmaliges Anwenden auf den vorherigen Index impliziert

$$|p_n - q_n x| < \frac{1}{q_{n+1}} < |p_{n-1} - q_{n-1} x|.$$

Daher können wir per Induktion annehmen, dass $q_{n-1} < q \leq q_n$ gilt.

Wir behandeln zunächst den Randfall $q = q_n$. Dann ist $|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}| \geq \frac{1}{q_n}$, aber andererseits

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{2q_n}.$$

Daraus folgt mit einer einfachen Fallunterscheidung, dass

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q_n} = \frac{1}{2q}.$$

Nach Durchmultiplizieren folgt die Behauptung.

Schließlich kümmern wir uns um den Fall $q < q_n$. Aufgrund der Determinantenrechnung (4.3) gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Da wir $q = q_n$ und $q = q_{n-1}$ ausgeschlossen haben, ist $ab \neq 0$. Aus $q_{n-1} < q = aq_n + bq_{n-1} < q_n$ folgt genauer $ab < 0$. Da die Näherungsbrüche alternierend approximieren, haben $p_n - q_n x$ und $p_{n-1} - q_{n-1} x$ verschiedene Vorzeichen, also $a(p_n - q_n x)$ und $b(p_{n-1} - q_{n-1} x)$ gleiche Vorzeichen. Aus der Matrixgleichung folgt

$$p - qx = a(p_n - q_n x) + b(p_{n-1} - q_{n-1} x)$$

und aufgrund der Vorzeichenbetrachtung können wir wieder termweise die Beträge nehmen und erhalten

$$|p - qx| > |p_n - q_n x|,$$

was zu zeigen war. □

4.2 Quadratische Irrationalzahlen und der Satz von Lagrange

Wir haben gesehen, dass die Kettenbruchentwicklung von rationalen Zahlen abbricht und nur bei diesen abbricht. Die nächste Frage ist, ob man auch quadratische Irrationalzahlen, d.h. $x \in \mathbb{R}$ mit $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 2$ mit Hilfe von Kettenbrüchen charakterisieren kann. Beispielsweise sei $x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim 1.618\dots$ der

goldene Schnitt. Dann ist $a_0 = 1, x_1 = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = x_0$, was gerade die definierende Eigenschaft des goldenen Schnitts ist. Also hat

$$\alpha = [1; 1, 1, 1, \dots]$$

eine periodische Kettenbruchentwicklung.

Definition 4.5 Eine Kettenbruchentwicklung $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ ist periodisch, wenn es ein $N \geq 0$ und ein $k > 0$ gibt mit $a_{n+k} = a_n$ für alle $n \geq N$. Ist $N = 0$, so wird die Entwicklung rein periodisch genannt.

Periodische Kettenbruchentwicklungen kennzeichnen wir, wie bei periodischen Dezimalentwicklungen mit einem Überstrich.

Jede quadratische Irrationalzahl x lässt sich (bis auf ein gemeinsames Vorzeichen) eindeutig als Lösung eines Polynoms $f_x = \alpha x^2 + \beta x + c$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, und $\text{ggT}(\alpha, \beta, \gamma) = 1$ schreiben. Die Zahl $d = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ wird Diskriminante von f_x bzw. von x genannt.

Satz 4.6 (Lagrange) Die Kettenbruchentwicklung von x ist genau dann (nicht abbrechend) periodisch, falls x eine quadratische Irrationalzahl ist. Genauer gibt es zu gegebener Diskriminante D nur endlich viele rein periodische quadratische Irrationalzahlen.

Vor dem Beweis leiten wir eine Formel her, die später nochmal nützlich sein wird. Wir haben bereits in Lemma 4.1 gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_{n+k} \\ q_{n+k} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n+k} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{n+k} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt. Wir schreiben $p_k(x)$ und $q_k(x)$ für den Zähler bzw. Nenner des k -ten Näherungsbruchs von x . Dann folgt durch nochmaliges Anwenden des Lemmas, dass

$$\begin{pmatrix} p_{n+k} \\ q_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{k-1}(x_{n+1}) & p_{k-2}(x_{n+1}) \\ q_{k-1}(x_{n+1}) & q_{k-2}(x_{n+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. als Bruch geschrieben, dass

$$\frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} = \frac{p_n \frac{p_{k-1}(x_{n+1})}{q_{k-1}(x_{n+1})} + p_{n-1}}{q_n \frac{p_{k-1}(x_{n+1})}{q_{k-1}(x_{n+1})} + q_{n-1}}$$

Im Limes $k \rightarrow \infty$ folgt also

$$x = \frac{p_n x_{n+1} + p_{n-1}}{q_n x_{n+1} + q_{n-1}} \tag{4.7}$$

für jedes $x \in \mathbb{R} > 0$.

Beweis: Die Tatsache, dass eine periodische Kettenbruchentwicklung eine quadratische Irrationalzahl impliziert, ist einfach. Angenommen diese ist sogar rein periodisch, d.h. $x = [\overline{a_0; a_1, a_2, \dots, a_n}]$. In diesem Fall besagt (4.7), dass

$$x = \frac{p_n x + p_{n-1}}{q_n x + q_{n-1}},$$

also, dass x einer quadratischen Gleichung genügt. Da x nicht rational sein kann, folgt die Behauptung in diesem Fall. Im allgemeinen Fall ist $x = [a_0; a_1, \dots, a_N, \overline{a_{N+1}, a_{N+2}, \dots, a_{N+k}}]$ und dann besagt (4.7), dass

$$x = \frac{p_n [\overline{a_{N+1}; a_{N+2}, \dots, a_{N+k}}] + p_{n-1}}{q_n [\overline{a_{N+1}; a_{N+2}, \dots, a_{N+k}}] + q_{n-1}},$$

Also liegt x in dem von $[\overline{a_{N+1}; a_{N+2}, \dots, a_{N+k}}]$ erzeugten Körper, welcher quadratisch ist. Da x wieder nicht rational sein kann, folgt die erste Implikation. Die Umkehrung erfordert mehr Argumentation. Wir zeigen zunächst, dass die Kettenbruch-Rekursion die Diskriminante von x erhält, falls x eine quadratische Irrationalzahl ist. Falls also $f(x_0) = \alpha_0 x_0^2 + \beta_0 x_0 + \gamma_0 = 0$, so folgt aus $x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}$, dass

$$0 = x_1^2 f(a_0 + \frac{1}{x_1}) = \alpha_1 x_1^2 + \beta_1 x_1 + \gamma_1,$$

wobei

$$\alpha_1 = a_0^2 \alpha_0 + a_0 \beta_0 + \gamma_0, \quad \beta_1 = 2a_0 \alpha_0 + \beta_0, \quad \gamma_1 = \alpha_0. \quad (4.8)$$

Nachrechnen von

$$\beta_1^2 - 4\alpha_1 \gamma_1 = \beta_0^2 - 4\alpha_0 \gamma_0$$

beweist die Behauptung.

Angenommen für $n \geq N$ ist α_n stets positiv. Dann folgt aus der Rekursion, dass β_N monoton wächst und dass damit irgendwann α_n, β_n und γ_n alle drei positiv sind. Das aber steht im Widerspruch dazu, dass die Nullstelle x_n ebenfalls positiv ist. Den gleichen Widerspruch erhält man unter der Annahme, dass α_n stets negativ für $n \geq N$ ist. Also gibt es unendlich viele n mit $\alpha_n \alpha_{n-1} < 0$. In diesem Fall folgt, dass $\gamma_n \alpha_n < 0$ und aus der Determinanten-Definition folgt

$$|\beta| < \sqrt{d}, \quad |\alpha| \leq \frac{d}{4}, \quad |\delta| \leq \frac{d}{4}.$$

Es gibt aber nur endlich viele Tripel $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, die diesen Bedingungen genügen. Also müssen drei davon gleich sein, sagen wir bei $n_1 < n_2 < n_3$. Da aber eine quadratische Gleichung nur zwei Lösungen besitzt, müssen unter x_{n_1}, x_{n_2} und x_{n_3} mindestens zwei Zahlen gleich sein und damit die Kettenbruchentwicklung periodisch. \square

4.3 Das Gaußsche Maß

Wir fassen nun die in der Kettenbruch-Rekursion benutzte Abbildung als ein dynamisches System auf. Sei dazu

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Wir wollen T als eine Selbstabbildung auf $[0, 1]$ auffassen, aber müssen dazu Null ausnehmen, dann alle Urbilder von Null usw. Aufgrund von Lemma 4.3 ist

$$T : Y = [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \rightarrow Y$$

in der Tat eine wohldefiniert Selbstabbildung. Wir definieren

$$\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow Y, \quad (a_1, a_2, \dots) \mapsto [0; a_1, a_2, \dots]$$

und erinnern an den Linksshift $L : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Die Kettenbruch-Rekursion und die Definition von T implizieren sofort, dass

$$\varphi \circ L = T \circ \varphi.$$

Wir suchen nun nach einem T -invarianten Maß. Eine erstaunliche Entdeckung von Gauß war, dass es mit

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{1}{1+x} dx$$

ein solches Maß gibt, welches absolut stetig zum Lebesgue-Maß ist. Der Vorfaktor dient nur der Normierung auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Lemma 4.7 *Das Gaußsche Maß μ ist invariant unter der Gaußabbildung T .*

Beweis: Es genügt die Invarianz für Intervalle und sogar für Intervalle der Form $[0, s]$ zu zeigen. Es ist

$$T^{-1}([0, s]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s+n}, \frac{1}{n} \right]$$

eine disjunkte Vereinigung. Also ist

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}([0, s])) &= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/(s+n)}^{1/n} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{s+n}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log\left(1 + \frac{s}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{s}{1+n}\right) \right) \quad (4.9) \\ &= \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{s/(1+n)}^{s/n} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \mu([0, s]) \end{aligned}$$

wobei wir in der Mitte die Identität

$$\frac{1 + \frac{s}{n}}{1 + \frac{s}{n+1}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{s+n}}$$

benutzt haben. □

Satz 4.8 Die Gaussabbildung ist ergodisch auf Y versehen mit dem Gaußschen Maß.

Beweis: Wir versuchen den Beweis der Ergodizität des Linksshifts nachzubauen, obwohl wir jetzt unendlich viele Symbole haben (wenn wir in Termen des Bildes von φ denken) und das Bildmaß des Gauß-Maßes auf dem Folgeraum kein Produktmaß ist – aber fast. Zunächst einige Vorbemerkungen.

Aus der Formel (4.7) zusammen mit der Eigenschaft $x_{n+1} = 1/T^n(x)$ für $x \in Y$ folgt

$$x = \frac{p_n + p_{n-1}T^n(x)}{q_n + q_{n-1}T^n(x)}, \quad (4.10)$$

wobei $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ und $\frac{p_n}{q_n}$ die entsprechenden Näherungsbrüche von x sind. Wir schreiben $f \asymp g$, falls es positive Konstanten C_1, C_2 gibt, die $C_1f \leq g \leq C_2g$ erfüllen. Zu $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$ nennen wir das Intervall

$$I(\mathbf{b}) = \{x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n] : a_i = b_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subset Y$$

die Zylindermenge zu \mathbf{b} (denn das φ -Bild in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist in der Tat eine Zylindermenge). Das obige ‘fast’ bezieht sich auf das erste Ziel. Wir wollen zeigen, dass

$$\mu(T^{-n}(A) \cap I(\mathbf{b})) \asymp \mu(A)\mu(I(\mathbf{b})) \quad (4.11)$$

für jede messbare Menge A gilt, wobei die impliziten Konstanten nicht von n und nicht von A abhängen.

Wir starten mit dem Fall, dass A ein Intervall $[d, e]$ ist. Sei $\frac{p_n}{q_n} = [0; b_1, b_2, \dots, b_n]$ und $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [0; b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]$. Dann ist $x \in I(\mathbf{b}) \cap T^{-n}(A)$ genau dann, wenn x eine Darstellung wie in 4.10, wobei $T^n(x) \in A = [d, e]$ liegt. Man beachte, dass T auf jedem Intervall zu gegebenem ersten Kettenbruchsymbol stetig und monoton fallend ist. Induktiv folgt daraus, dass T^n auf $I(\mathbf{b})$ stetig und monoton fallend (für n ungerade) bzw. steigend (für n gerade) ist. Also ist $I(\mathbf{b}) \cap T^{-n}(A)$ ein Intervall mit Endpunkten

$$\frac{p_n + p_{n-1}d}{q_n + q_{n-1}d} \quad \text{und} \quad \frac{p_n + p_{n-1}e}{q_n + q_{n-1}e}.$$

Sein Lebesgue-Maß ist also aufgrund von (4.3) gleich

$$(e - d) \frac{|p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}|}{(q_n + q_{n-1}d)(q_n + q_{n-1}e)} = (e - d) \frac{1}{(q_n + q_{n-1}d)(q_n + q_{n-1}e)}.$$

Zum Vergleich ist das Lebesgue-Maß von $I(\mathbf{b})$ aufgrund von (4.10) und der Tatsache, dass $T^n(x) \in (0, 1)$ liegt, gleich

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \right| = \frac{|p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}|}{q_n(q_n + q_{n-1})} = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})}.$$

Wir bezeichnen mit $m(\cdot)$ das Lebesguemaß auf Y . Dann haben wir also ausgerechnet, dass

$$\begin{aligned} m(I(\mathbf{b}) \cap T^{-n}(A)) &= m(A)m(I(\mathbf{b})) \frac{q_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + q_{n-1}d)(q_n + q_{n-1}e)} \\ &\asymp m(A)m(I(\mathbf{b})), \end{aligned} \quad (4.12)$$

denn den Bruch kann man unabhängig von d, e und n nach oben und unten abschätzen. Da zudem für jedes $B \in \mathcal{B}$

$$\frac{m(B)}{2 \log 2} \leq \mu(B) \leq \frac{m(B)}{\log 2} \quad (4.13)$$

gilt, haben wir das erste Ziel für Intervalle bewiesen.

Die Aussage für beliebiges messbares A folgt, indem wir solch eine Menge durch Intervalle von oben bzw. von unten approximieren (als abzählbare Vereinigung bzw. Durchschnitt schreiben) und verwenden, dass die impliziten Konstanten nicht von A abhängen.

Wir beginnen jetzt mit dem eigentlichen Beweis der Ergodizität und nehmen an, dass es eine messbare Menge A mit $T^{-1}(A) = A$ gibt. Für diese gilt also (4.11) für jedes $I(\mathbf{b})$. Diese Intervalle bilden für länger werdende \mathbf{b} eine immer feiner werdende Überdeckung von Y , denn

$$|I(\mathbf{b})| = \frac{1}{q_n(q_n + q_{n-1})} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Also erzeugen diese die Topologie auf Y und damit die Borel- σ -Algebra. Damit gilt also

$$\mu(A \cap B) \asymp \mu(A)\mu(B)$$

für alle messbaren B . Angewandt auf $B = Y \setminus A$ folgt $0 \asymp \mu(A)\mu(B)$ und damit $\mu(A) = 0$ oder $\mu(B) = 0$. \square

Dieser Satz zusammen mit Birkhoffs Ergodensatz erlaubt uns, starke quantitative Aussagen über die Ziffernverteilung in der Kettenbruchentwicklung (analog zu Beispiel 3.19 für die Dezimalentwicklung) und über die Approximationsgüte der Kettenbrüche zu machen.

Korollar 4.9 Für fast jede reelle Zahl $x = [0; a_1, a_2, \dots] \in Y$

i) erscheint die Ziffer j in der Kettenbruchentwicklung mit Dichte

$$\frac{2 \log(1+j) \log(j) - \log(2+j)}{\log 2}.$$

ii) ist das geometrische Mittel der ersten n Ziffern im Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = \prod_{a=1}^{\infty} \left(\frac{(a+1)^2}{a(a+2)} \right)^{\log(a)/\log(2)}.$$

iii) strebt das arithmetische Mittel der ersten n Ziffern gegen unendlich, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \infty.$$

iv) wachsen die Nenner wie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(q_n) = \frac{\pi^2}{12 \log(2)} \sim 1.185 \dots$$

v) ist die exponentielle Approximationsgüte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = -\frac{\pi^2}{6 \log(2)}.$$

Beweis: Für die Aussage i) notieren wir, dass die Dichte der Ziffer j , durch das n -te ergodische Mittel der charakteristischen Funktion des Intervalls $\left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right)$ approximiert wird. Nach dem Birkhoffschen Ergodensatz konvergieren diese ergodischen Mittel gegen

$$\frac{1}{\log(2)} \int_{1/(j+1)}^{1/j} \frac{1}{1+x} dx = \frac{2 \log(1+j) \log(j) - \log(2+j)}{\log 2}.$$

Für die Aussage ii) betrachten wir die Funktion f , welche auf dem Intervall $\left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j}\right)$ gleich der Konstanten $\log(j)$ ist. Dann konvergiert nach dem Birkhoffschen Ergodensatz

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)) \rightarrow \int_0^1 f d\mu$$

und es ist

$$\int_0^1 f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(a)}{\log(2)} \int_{1/(1+a)}^{1/a} \frac{1}{1+x} dx$$

Die Behauptung folgt durch Exponentieren der Gleichungskette.

Für die Aussage iii) würden wir gerne die Funktion $g = e^f$ verwenden, denn die linke Seite beschreibt gerade die ergodischen Mittel davon. Allerdings ist diese nicht integrierbar und der Birkhoffschen Ergodensatz daher nicht anwendbar. Allerdings können wir g abschneiden und die resultierende untere Schranke beweist immer noch die gewünschte Divergenz. Genauer sei

$g_N(x) = g(x)$, falls $g(x) \leq N$ und $g_N(x) = 0$ sonst. Das μ -Integral hiervon ist offenbar durch N beschränkt und es gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(T^j(x)) = \int_0^1 g_N d\mu$$

für alle N und für $N \rightarrow \infty$ strebt

$$\int_0^1 g_N dx = \sum_{a=1}^N \int_{1/(a+1)}^{1/a} a dx = \sum_{a=1}^N \frac{1}{a+1}$$

gegen ∞ und damit auch das $d\mu$ -Integral.

Für die Aussage iv) halten wir zunächst fest, dass $p_n(x) = q_{n-1}(T(x))$, denn

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \frac{1}{a_1 + [0; a_2, a_3, \dots, a_n]} = \frac{1}{a_1 + \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))}} \\ &= \frac{q_{n-1}(T(x))}{p_{n-1}(T(x)) + a_1 q_{n-1}(T(x))} \end{aligned} \quad (4.14)$$

und der Bruch rechts ist gekürzt, da die Näherungsbrüche dies per Definition sind. Also ist

$$\frac{1}{q_n(x)} = \frac{p_n(x)}{q_n(x)} \frac{p_{n-1}(T(x))}{q_{n-1}(T(x))} \dots \frac{p_1(T^{n-1}(x))}{q_1(T^{n-1}(x))}.$$

Wir nehmen $h(x) = \log(x)$, welches dx und damit auch $d\mu$ -integrierbar ist. Durch Logarithmieren der obigen Zeile erhalten wir

$$-\frac{1}{n} \log q_n(x) = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} h(T^j(x))}_{S_n} - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\log(T^j(x)) - \log \left(\frac{p_{n-j}(T^j(x))}{q_{n-j}(T^j(x))} \right) \right]}_{R_n}.$$

Wir haben den gewünschten Ausdruck also künstlich als ein ergodisches Mittel und einen Restausdruck R_n geschrieben. Nach dem Ergodensatz ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{\log(2)} \int_0^1 \frac{\log(x)}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12 \log(2)}.$$

Die Arbeit besteht also darin $\frac{1}{n} R_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ einzusehen. Nach den Abschätzungen der Näherungsbrüche gilt also

$$\left| \frac{x}{p_k/q_k} - 1 \right| = \frac{q_k}{p_k} \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leq \frac{1}{p_k q_{k-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Für $k \geq 2$ liegen die Näherungsbrüche also im Intervall $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ und dort gilt die Abschätzung $|\log(u)| \leq 2|u - 1|$. Also ist

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| \log \frac{T^j(x)}{p_{n-j}(T^j(x))/q_{n-j}(T^j(x))} \right| \\ &\leq 2 \sum_{j=0}^{n-2} \underbrace{\left| \frac{T^j(x)}{p_{n-j}(T^j(x))/q_{n-j}(T^j(x))} - 1 \right|}_{T_n} + \underbrace{\log \frac{T^{n-1}(x)}{p_1(T^{n-1}(x))/q_1(T^{n-1}(x))}}}_{U_n} \end{aligned}$$

Zunächst gilt die Abschätzung $T_n \leq \sum_{j=0}^{n-2} \frac{2}{2^{n-j-1}} \leq 2$. Der Ausdruck U_n ist der Logarithmus von $a_1(y)y$ für ein $y \in Y$. Diesen Ausdruck kann man nach oben durch 1 und nach unten durch $a_1/1 + a_1$, also durch $1/2$ abschätzen. Damit ist auch der Logarithmus nach oben und unten beschränkt. Daraus folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} R_n = 0$.

Die Aussage v) folgt aus iv), denn

$$\log(q_n) + \log(q_{n-1}) \leq -\log \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \log(q_n) + \log(q_{n-2}),$$

wie wir in (4.4) und (4.6) schon gezeigt haben. □

5 Starkes und schwaches Mischen

Nachdem wir mittels der Ergodensätze verstanden haben, was der Erwartungswert des Besuchs einer Menge in einem ergodischen dynamischen System ist, untersuchen wir nun die 'Kovarianz' zweier Mengen.

Ist T ergodisch, so folgt aus dem Ergodensatz im Mittel, dass $A_N(f) \rightarrow \int_X f d\mu$ für alle $f \in L^2_\mu$ in der L^2_μ -Norm konvergiert. Die Umkehrung der Aussage folgt auch direkt aus der Definition. Dies zusammen besagt, dass das Skalarprodukt mit jedem $g \in L^2_\mu$ konvergiert, d.h. T ist ergodisch genau dann wenn

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \langle f \circ T^n, g \rangle \rightarrow \int f d\mu \int g d\mu$$

konvergiert. Mit dem üblichen Dichteschluss ist dies genau dann der Fall, wenn für alle $A, B \in \mathcal{B}$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A \cap T^{-n}(B)) \rightarrow \mu(A)\mu(B) \tag{5.1}$$

gilt.

Eine Verschärfung von Ergodizität ist also die folgende Aussage, bei der die Konvergenz bereits ohne Mittelwertbildung gefordert wird.

Definition 5.1 Ein maßerhaltendes dynamisches System (X, \mathcal{B}, μ, T) ist stark mischend (oder einfach nur mischend), falls

$$\mu(A \cap T^{-n}(B)) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

für $n \rightarrow \infty$ für alle $A, B \in \mathcal{B}$ gilt.

Man kann diesen Begriff (scheinbar) noch verschärfen, indem man eine entsprechende Aussage für $k + 1$ verschiedene statt nur zwei Mengen fordert.

Definition 5.2 Ein maßerhaltendes dynamisches System (X, \mathcal{B}, μ, T) ist *mischend von Ordnung k* , falls

$$\mu(A_0 \cap T^{-n_1}(A_1) \cap \dots \cap T^{-n_k}(A_k)) \rightarrow \mu(A_0) \cdots \mu(A_k)$$

für alle Folgen mit $n_1, n_2 - n_1, n_3 - n_2, \dots, n_k - n_{k-1} \rightarrow \infty$ und für alle $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{B}$ gilt.

Es ist eine immer noch offene Frage, wahr in vielen Spezielfällen, ob Mischen auch Mischen von Ordnung k für alle k impliziert.

Beispiel 5.3 Die Rotation des Einheitskreises R_α ist nicht mischend. Dazu wählen wir eine Folge n_k mit $n_k \alpha \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, was wir aufgrund von $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \subset \mathbb{R}$ dicht sicher können. Ist dann $A = B = [0, \frac{1}{2}]$, so gilt $\mu(A \cap T^{-n}(B)) \rightarrow \frac{1}{2}$, aber $\mu(A)\mu(B) = \frac{1}{4}$.

Beispiel 5.4 Der Linksshift ist mischend von Ordnung k für jedes k . Dies sieht man ein, indem man die Mengen A_0, \dots, A_k durch Zylindermengen annähert und das Argument von Proposition 3.11 verfeinert.

Eine Abschwächung des Mischungsbegriffs ist nützlicher, schon alleine weil sie in vielen Beispielen auftritt.

Definition 5.5 Ein maßerhaltendes dynamisches System (X, \mathcal{B}, μ, T) ist *schwach mischend falls*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)| \rightarrow 0$$

für $N \rightarrow \infty$ und für alle $A, B \in \mathcal{B}$ gilt.

Die folgende Charakterisierung von schwachem Mischen ist das Hauptziel dieses Abschnitts. Mit ihrer Hilfe werden wir einsehen, dass die Rotationen R_α auch nicht schwach mischend sind. Im folgenden Satz nennen wir $f \in L^2_\mu$ eine Eigenfunktion von U_T , falls es ein $\lambda \neq 0$ gibt, sodass $U_T f = \lambda f$ in L^2_μ gilt.

Satz 5.6 Die folgenden Eigenschaften eines maßerhaltenden dynamischem Systems (X, \mathcal{B}, μ, T) auf einem endlichen Maßraum X sind äquivalent.

- i) T ist schwach mischend.
- ii) $T \times T$ ist ergodisch bzgl. $\mu \times \mu$.
- iii) $T \times T$ ist schwach mischend bzgl. $\mu \times \mu$.

iv) Für jedes ergodische System (Y, \mathcal{C}, ν, S) ist das Produktsystem

$$(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mu \times \nu, T \times S)$$

ergodisch.

v) Der Operator U_T hat keine nichtkonstanten messbaren Eigenfunktionen.

vi) Für jedes $A, B \in \mathcal{B}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ außerhalb einer Menge $J = J(A, B)$ von Dichte Null, dass

$$\mu(A \cap T^{-n}(B)) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$$

für $n \rightarrow \infty$ für alle $A, B \in \mathcal{B}$ gilt.

vii) Für alle $A, B \in \mathcal{B}$ gilt.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\mu(A \cap T^{-n}(B)) - \mu(A)\mu(B)|^2 \rightarrow 0$$

für $N \rightarrow \infty$.

Aus dem Satz folgt z.B., dass das Produkt von schwach mischenden Systemen wieder schwach mischend ist (während das Produkt von ergodischen System i.A. nicht ergodisch ist).

Beispiel 5.7 Die Rotation R_α ist nicht schwach mischend. Die Funktion $(e^{2\pi i x}, e^{2\pi i y}) \mapsto e^{2\pi i(x-y)} : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ ist nicht-konstant, beschränkt und damit quadratintegrierbar und $T \times T$ -invariant.

Die ist aber 'fast die einzige Ausnahme' dieser Art. In [AF07] wurde gezeigt, dass eine IET, die keine Rotation ist, für fast jede Wahl von Längenparametern schwach mischend ist.

Der Beweis des Satzes 5.6 hat zwei Teile, das folgende Analysis-Lemma und ein Argument aus der Funktionalanalysis.

Lemma 5.8 Sei (a_n) eine Folge beschränkter, nicht-negativer reeller Zahlen. Dann sind äquivalent:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = 0$.

ii) Es gibt eine Menge J der Dichte Null, sodass die Teilfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus J}$ gegen Null konvergiert.

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j^2 = 0$.

Beweis: Die Äquivalenz von i) und iii) ist offensichtlich, sobald wir die Äquivalenz von i) und ii) gezeigt haben.

Für die Implikation von i) nach ii) sei $J_k = \{j \in \mathbb{N} : a_j > \frac{1}{k}\}$. Diese Mengen bilden also eine aufsteigende Kette. Es gilt für $k \geq 1$, dass $\frac{1}{k}|J_k \cap [0, n)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i$, da die a_i nichtnegativ sind. Daraus folgt nach Durchdividieren durch n aufgrund der Voraussetzung, dass die Menge J_k für festes k die Dichte Null hat. Wir basteln J aus diesen Menge zusammen. Dazu wählen wir induktiv $0 < \ell_1 < \ell_2 < \dots$, sodass

$$\frac{1}{n}|J_k \cap [0, n)| \leq \frac{1}{k}$$

für $n \geq \ell_k$ und setzen

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (J_k \cap [\ell_k, \ell_{k+1})).$$

Zunächst zeigen wir, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus J}$ nun eine Nullfolge ist. Dazu beobachten wir, dass $J_k \cap [\ell_k, \infty) \subset J$ ist. Daher haben alle a_n für ein $\ell_k \leq n \in \mathbb{N} \setminus J$ die Eigenschaft kleiner als $\frac{1}{k}$ zu sein. Außerdem hat, wie gefordert J die Dichte Null, denn zu gegebenem n wählen wir k , sodass $n \in [\ell_k, \ell_{k+1})$ und dann ist $(J \cap [0, n)) \subset (J_k \cap [0, n))$, und diese Menge hat nach Wahl der ℓ_k höchstens n/k Elemente. Dividiert durch n gibt dies die Behauptung, da k mit n wächst.

Für die Umkehrung benötigen wir, dass die a_n als beschränkt vorausgesetzt sind, sagen wir R ist eine obere Schranke. Nach Definition einer Nullfolge gibt es zu jedem k ein N_k sodass für alle $n \geq N_k$ und $n \notin J$ gilt $a_n < \frac{1}{k}$. Aufgrund der Definition von Dichte Null können wir N_k auch noch so wählen, dass für alle $n \geq N_k$ zudem

$$\frac{1}{n}|J \cap [0, n)| \leq \frac{1}{k}$$

gilt. Damit gilt für $n \leq kN_k$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i &= \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{N_k-1} a_j + \sum_{\substack{i \in J \\ N_k \leq i < n}} a_i + \sum_{\substack{i \notin J \\ N_k \leq i < n}} a_i \right) \\ &< \frac{1}{n} \left(RN_k + R|J \cap [0, n)| + n \frac{1}{k} \right) \leq \frac{2R+1}{k}, \end{aligned}$$

was den behaupteten Grenzwert beweist. □

Beweis von Satz 5.6: Die Äquivalenz von i), vi) und viii) folgt direkt aus dem vorigen Lemma.

Offensichtlich ist die Implikation iii) nach i), indem man Mengen der Form $A \times X$ und $B \times X$ verwendet.

Tautologisch ist auch die Implikation iv) nach ii), indem man zunächst für Y eine einelementige Menge nimmt, um zu zeigen, dass unter der Voraussetzung T ergodisch ist, und dann die Voraussetzung nochmal auf $S = T$ anwendet.

Wir zeigen nun die Implikation i) nach iv). Sei dazu also (Y, \mathcal{C}, ν, S) ergodisch und $A_1, B_1 \in \mathcal{B}$ und $A_2, B_2 \in \mathcal{C}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\mu \times \nu)(A_1 \times A_2 \cap (T \times S)^{-n}(B_1 \times B_2)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A_1 \cap T^{-n}(B_1)) \mu(A_2 \cap S^{-n}(B_2)) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A_1) \mu(B_1) \mu(A_2 \cap S^{-n}(B_2)) \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [\mu(A_1 \cap T^{-n}(B_1)) - \mu(A_1) \mu(B_1)] \mu(A_2 \cap S^{-n}(B_2)).
\end{aligned}$$

Der erste Term in der Summe der letzten Zeilen hat aufgrund der Ergodizität in der Formulierung (5.1) den gewünschten Limes. In der zweiten Summe ist der hintere Term durch $\mu(X)$ beschränkt und der Vordere konvergiert nach Null nach Definition des schwachen Mischens.

Wir zeigen nun die Implikation vi) nach iii). Wir zeigen die Aussage für Mengen $A_1 \times A_2$ und $B_1 \times B_2$ in $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Seien J_1 und J_2 die Mengen der Dichte Null aus der Aussage vi) angewandt auf A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2 . Dann hat auch $J = J_1 \cup J_2$ die Dichte Null und man rechnet die definierende Aussage des schwachen Mischens für die Folgenglieder in $\mathbb{N} \setminus J$ mit Hilfe der Endlichkeit des Maßes direkt nach.

Es folgt die Implikation ii) nach vii). Seien $A, B \in \mathcal{B}$ und μ^2 das Produktmaß auf $X \times X$. Dann gilt aufgrund der Ergodizität von $T \times T$, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A \cap T^{-n}(B)) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu^2((A \times X) \cap (T \times T)^{-n}(B \times X)) \\
&\rightarrow \mu^2(A \times X) \mu^2(B \times X) = \mu(A) \times \mu(B)
\end{aligned}$$

und dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu(A \cap T^{-n}(B))^2 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu^2((A \times A) \cap (T \times T)^{-n}(B \times B)) \\
&\rightarrow \mu^2(A \times A) \mu^2(B \times B) = \mu(A)^2 \times \mu(B)^2.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Anwendung der binomischen Formel auf den Ausdruck in vii).

Damit haben wir die Äquivalenz aller Aussagen mit Ausnahme der fünften. Dabei ist die Implikation ii) nach v) einfach. Ist f eine Eigenfunktion von T zum Eigenwert λ , so ist $\lambda \in S^1$, da U_T eine Isometrie ist. Dann definieren wir eine Funktion g auf $X \times X$ durch $g(x, y) = f(x)\overline{f(y)}$. Wegen

$$U_{T \times T} g(x, y) = g(Tx, Ty) = |\lambda|^2 g(x, y) = g(x, y)$$

ist diese invariant, also konstant, da $T \times T$ ergodisch ist. Also ist auch f konstant.

Es verbleibt die Implikation v) nach ii). Wir nehmen an, dass $T \times T$ nicht ergodisch ist und basteln daraus eine nichtkonstante Eigenfunktion von U_T . Nach Annahme gibt es also eine nicht-konstante Funktion $f(x, y)$, die fast $T \times T$ -invariant ist. Wir argumentieren zunächst, dass wir $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ annehmen können. Dazu betrachten wir die Symmetrisierungen

$$f_1(x, y) = f(x, y) + \overline{f(y, x)}, \quad f_2(x, y) = i(f(x, y) - \overline{f(y, x)}).$$

Diese haben beide die gewünschte Zusatzeigenschaft. Wären beide konstant so auch f . Also nehmen wir von vornherein an, dass f gleich einer nichtkonstanten Funktion mit der Zusatzeigenschaft ist. Wir nehmen zudem an, dass $\int f d\mu = 0$ ist, indem wir eine geeignete Konstante subtrahieren. Der Operator $F : L_\mu^2 \rightarrow L_\mu^2$ definiert durch

$$F(g)(x) = \int_X f(x, y)g(y)d\mu(y)$$

ist offenbar nicht die Nullabbildung, selbstadjungiert aufgrund von $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$ und kompakt, da f quadrat-integrierbar und somit durch Treppenfunktionen approximierbar ist.

Nach dem Spektralsatz für kompakte, selbstadjungierte Operatoren (siehe z.B. [Wer00, Theorem VI.3.2 und Abschnitt VI.4]) lässt sich L_μ^2 als orthogonale direkte Summe des Kerns von f und den Eigenräumen, zu den von Null verschiedenen Eigenwerten zerlegen. Diese Eigenräume sind zudem endlichdimensional.

Sei V_λ ein solcher Eigenraum. Wir behaupten, dass V_λ invariant unter T ist. Dazu sei g ein Einvektor und wir rechnen nach, dass

$$\begin{aligned} \lambda g(Tx) &= \int_X f(Tx, y)g(y) d\mu(y) \\ &= \int_X f(Tx, Ty)g(Ty)d\mu(y) \\ &= \int_X f(x, y)g(Ty)d\mu(y) \end{aligned} \tag{5.2}$$

aufgrund der Invarianz des Maßes und aufgrund der $T \times T$ -Invarianz von f . Also ist $g \circ T$ auch in V_λ . Die Isometrie U_T ist also eine Selbstabbildung des endlichdimensionalen Raums, V_λ hat also dort einen Eigenvektor. Dieser Eigenvektor kann nicht konstant sein, da $\int_X f d\mu = 0$ aber $\lambda \neq 0$ ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

6 Induzierte Transformationen

Es sei weiterhin (X, \mathcal{B}, μ, T) ein maßerhaltendes System mit endlichem Maß μ . Nach dem Satz von Poincaré kommt man in jede vorgegebene messbare Menge A zurück (sogar unendlich oft). Aber wie lange dauert das? Wir nehmen in diesem Kapitel zudem an, dass T invertierbar ist.

Sei dazu

$$r_A(x) = \inf_{n \geq 1} \{n : T^n(x) \in A\}$$

die *Rückkehrzeit* in die Menge A am Punkt x . Poincarés Satz besagt also gerade, dass r_A fast überall definiert und endlich ist. Mit Hilfe dieses Begriffs haben wir auch eine natürliche Selbstabbildung jeder messbaren Menge A . Die Abbildung

$$T_a : A \rightarrow A, \quad T_a(x) = T^{r_A(x)}$$

wird die *induzierte Transformation* zur Menge A genannt. Wir prüfen, dass r_A und T_a in der Tat messbar sind. Es sind

$$\begin{aligned} A_1 &:= r_A^{-1}(1) = A \cap T^{-1}(A) \\ A_2 &:= r_A^{-1}(2) = A \cap T^{-2}(A) \setminus A_1 \\ &\vdots \\ A_n &:= r_A^{-1}(n) = A \cap T^{-n}(A) \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \end{aligned} \tag{6.1}$$

der Reihe nach offenbar messbare Mengen. Da T invertierbar ist, genügt es Bilder messbarer Mengen zu betrachten und auch die Messbarkeit von $T^n(A_n)$ zu zeigen, denn auf jeder der Mengen A_n ist T^n per Definition messbar. Aus der Identität

$$T^n(A_n) = A \cap T^n(A) \setminus (T(A) \cup T^2(A) \cup \dots \cup T^{n-1}(A))$$

ist dies induktiv ersichtlich und zeigt die Behauptung.

Lemma 6.1 *Die Transformation T_A ist bezüglich $\frac{1}{\mu(A)}\mu|_A$ maßerhaltend. Ist T ergodisch, so auch T_A .*

Beweis: Ist $B \in \mathcal{B}$, so ist $B = \cup_{n \geq 1} B \cap A_n$ disjunkt und damit

$$\mu_A(B) = \frac{1}{\mu_A(B)} \sum_{n \geq 1} \mu(B \cap A_n).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \mu_A(T_A(B)) &= \sum_{n \geq 1} \mu(T^n(B \cap A_n)) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu(B \cap A_n) = \mu(B), \end{aligned}$$

da μ invariant unter T ist.

Angenommen T_A ist nicht ergodisch und B eine T_A -invariante Menge vom Maß $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Dann ist $\cup_{n \geq 1} \cup_{j=0}^{n-1} T^j(B \cap A_n)$ invariant unter T . Sie hat positives Maß, da sie B enthält, aber nicht volles Maß, denn sie ist disjunkt zu $\cup_{n \geq 1} \cup_{j=0}^{n-1} T^j((A \setminus B) \cap A_n)$, welche $A \setminus B$ enthält. \square

Satz 6.2 Sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein invertierbares ergodisches dynamisches System auf einem Raum mit $\mu(X) = 1$. Sei $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu(A) > 0$. Dann ist die erwartete Rückkehrzeit nach A gleich $1/\mu(A)$, d.h. $\int_A r_A d\mu = 1$.

Beweis: Die Mengen $A_n, T(A_n), \dots, T^{n-1}(A_n)$ sind disjunkt und die Vereinigung über alle n davon hat Maß Eins aufgrund der Ergodizität (in der Form von Proposition 3.10 (3)). Wir können r_A als monoton wachsenden Limes der Treppenfunktionen $\sum_{k=1}^n k \chi_{A_k}$ ansehen. Dann gilt

$$1 = \mu(X) = \sum_{k \geq 1} k \mu(A_k) = \int_A r_A d\mu$$

nach dem Satz über monotone Konvergenz. \square

6.1 Rauzy-Veech Induktion

Ein wichtiges Beispiel für eine induzierte Transformation ist die Rauzy-Veech Induktion bei IET. Wir werden (hoffentlich) später noch sehen, dass diese einen geodätischen Fluss diskretisiert und codiert und zum Nachweis verwendet werden kann, dass dieser ergodisch ist.

Zunächst einige Notation für IET. Die Darstellung hier folgt dem Skript von Yoccoz ([Yoc06]). Eine IET auf d Intervallen ist durch eine Permutation in S_d und die Länge der Intervalle gegeben. Es stellt sich jedoch als sehr nützlich heraus, eine IET durch zwei Permutationen zu codieren, die jeweils eine Bijektion der Urbildraums und Bildraums mit der Standardreihenfolge darstellen. Sei d fixiert und \mathcal{A} eine endliche Symbolmenge der Kardinalität d , typischerweise die ersten d Buchstaben. Eine IET ist ein Tripel (π_0, π_1, λ) , wobei $\pi_\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow \{1, \dots, d\}$ Bijektionen sind und $\lambda = (\lambda_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ein Tupel von Längen $0 < \lambda_\alpha \in \mathbb{R}$. Sei $\lambda^* = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \lambda_\alpha$ die Gesamtlänge der IET und sei weiterhin $I_\alpha = [0, \lambda_\alpha) \times \{\alpha\}$ und $S = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$ die Standardintervallmenge zum gegebenen Längentupel. Das Datum einer IET definiert also zwei Abbildungen

$$j_\varepsilon : S \rightarrow I, \quad (x, \alpha) = x + \sum_{\pi_\varepsilon(\beta) < \pi_\varepsilon(\alpha)} \lambda_\beta$$

für $\varepsilon = 0, 1$ und die zugehörige IET ist

$$T = T_{(\pi_0, \pi_1, \lambda)} = j_1 \circ j_0^{-1} : I \rightarrow I.$$

Im Folgenden werden wir uns auf *zulässige* Paare von Permutationen einschränken, d.h. für $k = 1, 2, \dots, d - 1$ gilt

$$\pi_0^{-1}(\{1, \dots, k\}) \neq \pi_1^{-1}(\{1, \dots, k\}).$$

Unzulässige IET zerfallen offenbar in zwei (oder mehr) IET, die nicht miteinander interagieren.

Seien nun α_0 und α_1 die letzten Buchstaben (in \mathcal{A}) einer zulässigen IET $T = T_{(\pi_0, \pi_1, \lambda)}$, d.h. $\pi_0(\alpha_0) = \pi_1(\alpha_1) = d$. Wir nehmen an, dass die letzten Intervalllängen λ_{α_0} und λ_{α_1} verschieden sind, was 'generisch' der Fall ist. Die Rauzy-Veech-Induktion der IET ist die Induktion auf 'I ohne das kurze Reststückchen'. Präzise formuliert bedeutet das Folgendes. Wir definieren den *Gewinner* als den Index, bei dem die letzte Länge größer ist, d.h. das ε , sodass

$$\lambda_{\alpha_\varepsilon} = \max(\lambda_{\alpha_0}, \lambda_{\alpha_1}).$$

Mit Hüten bezeichnen wir die Abbildung, die durch Induktion auf das Intervall $\widehat{I} = [0, \widehat{\lambda}^*)$ entsteht. Dabei sind nur die Mengen A_1 und A_2 in der Notation vom Anfang dieses Abschnitts nichtleer, genauer ist (man zeichne sich die beiden Gewinner-Fälle für $d = 4$ und z.B. das Permutationspaar $\pi_0 = (ABCD)$ und $\pi_1 = (DCBA)$!), falls $\varepsilon = 0$

$$\widehat{T}(y) = \begin{cases} T(y) & \text{falls } y \notin j_0(I_{\alpha_1}) \\ T^2(y) & \text{falls } y \in j_0(I_{\alpha_1}) \end{cases}$$

und analog falls $\varepsilon = 1$.

Zusammengefasst ist die induzierte Abbildung wieder eine IET mit dem Alphabet \mathcal{A} und zwar sind die Längendaten

$$\widehat{\lambda}_{\alpha_\varepsilon} = \lambda_{\alpha_\varepsilon} - \lambda_{\alpha_{1-\varepsilon}} \quad \text{und} \quad \widehat{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha, \quad \text{sonst.}$$

Die kombinatorischen Daten ändern sich wie folgt. Der Gewinner bleibt, der Verlierer muss sich anpassen (als Eselsbrücke), d.h. ist ε der Gewinner, so ist $\widehat{\pi}_\varepsilon = \pi_\varepsilon$ und

$$\widehat{\pi}_{1-\varepsilon}(\alpha) = \begin{cases} \pi_{1-\varepsilon}(\alpha) & \text{falls } \pi_{1-\varepsilon}(\alpha) \leq \pi_{1-\varepsilon}(\alpha_\varepsilon) \\ \pi_{1-\varepsilon}(\alpha) + 1 & \text{falls } \pi_{1-\varepsilon}(\alpha_\varepsilon) \leq \pi_{1-\varepsilon}(\alpha) < d \\ \pi_{1-\varepsilon}(\alpha_\varepsilon) + 1 & \text{falls } \pi_{1-\varepsilon}(\alpha) = d \end{cases}$$

Das Rauzy-Diagramm ist der (nicht notwendigerweise) zusammenhängende Graph, den man erhält, wenn man die kombinatorische Operation der Rauzy-Veech-Induktion auf Paaren von Permutationen durchführt. Durch Umbenennung der Symbole kann man beide Permutationen mit einem gegebenen Element in S_d multiplizieren und so z.B. mit der Normalisierung $\pi_0 = (ABC\dots)$ starten. Es gibt also von jeder Komponente des Rauzy-Diagramms $d!$ isomorphe Kopien. Die Vertreter der Isomorphieklassen für $d = 2, 3, 4$ sind in den

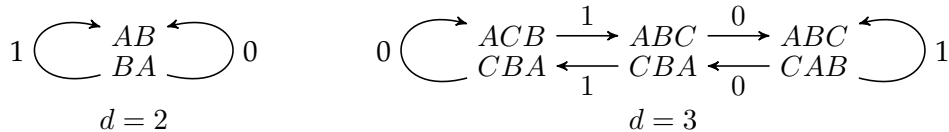


Abbildung 6.1: Rauzy-Diagramm $d = 2$ und $d = 3$

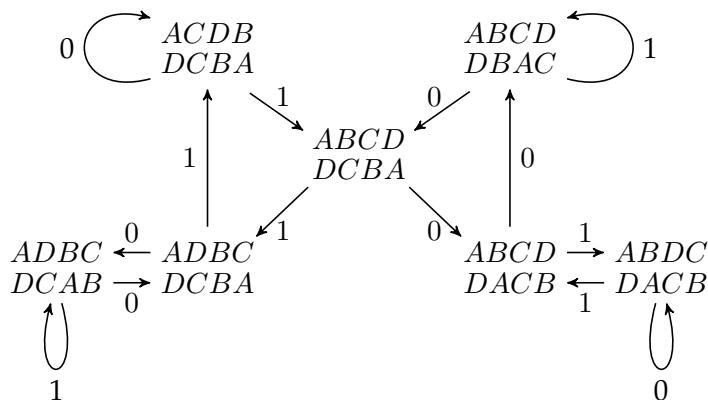


Abbildung 6.2: Rauzy-Diagramm $d = 4$, erster Fall

Bildern 6.1, 6.2, 6.3 dargestellt. Der Grund für das verwendete Alphabet im zweiten Fall $d = 4$ ist eine Zusatzsymmetrie, aber wir führen dies hier nicht weiter aus.

Die Grundidee der Rauzy-Veech-Induktion ist es, einer IET durch wiederholte Anwendung der Induktion einen Pfad im Rauzy-Diagramm zuzuordnen und damit eine Kette von Gewinnern, d.h. eine Folge von Nullen und Einsen. Dazu muss sichergestellt sein, dass in jedem Schritt obige Längenbedingung erfüllt ist.

Definition 6.3 Eine Verbindung auf einer IET ist ein Tripel (α, β, m) mit $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $m \in \mathbb{N}$ und $\pi_0(\beta) > 1$, sodass $T^m(j_0(0, \alpha)) = j_0(0, \beta)$. Eine IET hat Keanes Eigenschaft, falls es keine Verbindung auf dieser IET gibt.

Der Begriff Verbindung es noch besser motiviert, wenn man IET und flache Flächen in Zusammenhang gestellt hat. Verbindungen stammen genau von Sattelverbindungen auf flachen Flächen.

Auf einer IET mit Keanes Eigenschaft kann man offenbar unendlich oft Rauzy-Induktion anwenden. Wir geben nun ein praktisch verifizierbares Kriterium für diese Eigenschaft an.

Proposition 6.4 Seit $T = (\pi_0, \pi_1, \lambda)$ eine zulässige IET. Sind die λ_α über \mathbb{Q} linear unabhängig, so hat die IET Keanes Eigenschaft.

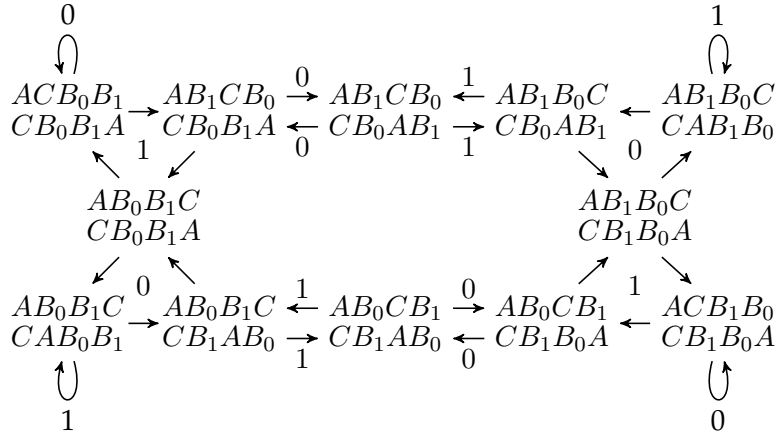


Abbildung 6.3: Rauzy-Diagramm $d = 4$, zweiter Fall

Als Vorbereitung zum Beweis definieren wir zur einer Kombinatorik (π_0, π_1) einer IET die antisymmetrische $d \times d$ -Matrix Ω durch

$$\Omega_{\alpha, \beta} = \begin{cases} +1 & \text{falls } \pi_0(\beta) > \pi_0(\alpha) \text{ und } \pi_1(\beta) < \pi_1(\alpha) \\ -1 & \text{falls } \pi_0(\beta) < \pi_0(\alpha) \text{ und } \pi_1(\beta) > \pi_1(\alpha) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Diese Matrix hat die Eigenschaft, dass der Translationsvektor $\delta = (\delta_\alpha)$ mit $T(x) = x + \delta_\alpha$ für $x \in j_0(I_\alpha)$ aus dem Tupel der Längen vermöge

$$\delta = \Omega \lambda$$

hervorgeht.

Beweis: Angenommen das Gegenteil ist der Fall und das Tripel (α_0, α_m, m) ist eine Verbindung, wobei der Grund für die Notation gleich ersichtlich wird. Für die Zwischenschritte $0 < \ell < m$ definieren wir α_ℓ dadurch, dass $T^\ell(j_0(0, \alpha_0))$ in $j_0(I_{\alpha_\ell})$ landet. Dann ist

$$j_0(0, \alpha_m) - j_0(0, \alpha_0) = \sum_{0 \leq \ell < m} \delta_{\alpha_\ell}$$

und somit nach Definition der Translationsvektoren

$$\sum_{\pi_0(\alpha) < \pi_0(\alpha_m)} \lambda_\alpha - \sum_{\pi_0(\alpha) < \pi_0(\alpha_0)} \lambda_\alpha = \sum_{0 \leq \ell < m} \left(\sum_{\pi_1(\alpha) < \pi_1(\alpha_\ell)} \lambda_\alpha - \sum_{\pi_0(\alpha) < \pi_0(\alpha_\ell)} \lambda_\alpha \right).$$

Wenn wir also für $\alpha \in \mathcal{A}$ definieren, dass

$$n_\alpha = |\{\ell \in [0, m) : \pi_1(\alpha_\ell) > \pi_1(\alpha)\}| - |\{\ell \in (0, n] : \pi_0(\alpha_\ell) > \pi_0(\alpha)\}|,$$

so ist $\sum n_\alpha \lambda_\alpha = 0$. Die \mathbb{Q} -lineare Unabhängigkeit impliziert also $n_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$.

Sei e der maximale Wert, der von $\pi_1(\alpha_\ell)$ für $\ell \in [0, m)$ oder von $\pi_0(\alpha_\ell)$ für $\ell \in (0, m]$ angenommen wird. Nach Definition von Zulässigkeit gibt es ein $\beta \in \mathcal{A}$ mit $\pi_0(\beta) \geq e$, aber $\pi_1(\beta) < e$. Dann aber ist $\pi_0(\alpha_\ell) < \pi_0(\beta)$ für $\ell \in (0, m]$ nach Definition von e . Aus $n_\beta = 0$ folgt $\pi_1(\alpha_\ell) \leq \pi_1(\beta) < e$. Unter nochmaliger Verwendung der Zulässigkeit zeigt man in symmetrischer Weise auch $\pi_0(\alpha_\ell) < e$, im Widerspruch zur Definition von e . \square

7 Invariante Maße für stetige Abbildungen

Bisher hatten wir einige dynamische Systeme betrachtet und die Maße als Teil des Ausgangsdatums. Für solche dynamischen Systeme haben wir dann dynamische Eigenschaften wie Ergodizität oder Mischen untersucht. Jetzt nehmen wir nur $T : X \rightarrow X$ als gegeben an und fragen uns, ob es T -invariante Maße gibt.

Der natürliche Kontext hierfür ist der eines topologischen Raums X mit der Borel-Sigma-Algebra \mathcal{B} und in diesem gesamten Abschnitt wird X **kompakt** und T eine **stetige** Abbildung sein.

Wir bezeichnen mit $C(X)$ die Menge der stetigen reellwertigen Abbildungen und mit $\mathcal{M}(X)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf (X, \mathcal{B}) . Mit der Supremumsnorm wird $C(X)$ zu einem normierten Vektorraum. Zu der Abbildung T und $\mu \in \mathcal{M}(X)$ definieren wir das Bildmaß $T_*\mu$ durch $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$. Damit erhalten wir also eine Abbildung

$$T_* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X).$$

Wir interessieren uns für die T -invarianten Maße, d.h. für die Menge $\mathcal{M}^T(X)$ der Fixpunkte der Abbildung T_* .

7.1 Existenz invarianter Maße

Wir klären zunächst die Struktur der Menge $\mathcal{M}(X)$. Ein Element μ von $\mathcal{M}(X)$ ordnet jeder Funktion $f \in C(X)$ das Integral $\int_X f d\mu$ zu. Diese Zuordnung ist linear und stetig, und μ ist durch diese Integrale eindeutig bestimmt. Damit ist $\mathcal{M}(X)$ eine Teilmenge von $C(X)^\vee$, dem Dualraum von $C(X)$. (Man kann diesen Raum als endliche signierte Maße auf X interpretieren.)

Wir versehen $\mathcal{M}(X)$ mit der schwach*-Topologie. Dieses ist die größte Topologie, sodass für jedes $f \in C(X)$ die Abbildung $\mu \mapsto \int_X f d\mu$ stetig ist. Der Satz von Banach-Alaoglu (siehe z.B. [Wer00, Theorem VIII.3.11]) besagt, dass $\mathcal{M}(X)$ mit dieser Topologie kompakt ist. Die schwach*-Topologie ist von einer Metrik induziert, siehe z.B. [EW10, Theorem B.11]. Insbesondere ist Stetigkeit zu Folgenstetigkeit äquivalent. Daraus folgt offenbar, dass $T_* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ stetig ist.

Die Menge $\mathcal{M}^T(X)$ ist offenbar konvex, denn eine Linearkombination invarianter Maße ist wieder invariant und eine Konvexkombination zudem ein Wahrscheinlichkeitsmass.

Wie im Abschnitt über Ergodizität definieren wir den ergodischen Mittelungsoperator von Maßen durch

$$A_n(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T_*^j(\mu).$$

Diese liefert uns Folgen, die gegen invariante Maße konvergieren, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 7.1 [Krylov-Bogoljubov] *Ist T stetig und X kompakt und ν_n eine Folge in $\mathcal{M}(X)$. Jeder schwach*-Limes der Folge ergodischer Mittel $\mu_n = A_n(\nu_n)$ ist in $\mathcal{M}^T(X)$. Insbesondere ist $\mathcal{M}^T(X)$ nicht leer.*

Beweis: Die zweite Aussage folgt aus der ersten und aus der Kompaktheit (Banach-Alaoglu), welche auf metrisierbaren Räumen zu Folgenkompaktheit äquivalent ist.

Für die erste Aussage sei ohne Einschränkung (d.h. ohne Übergang in der Notation zu einer Teilfolge) $\nu_n \rightarrow \nu$ konvergent. Für jedes $f \in C(X)$ ist dann nach Definition von μ_n

$$\begin{aligned} \left| \int_X f \circ T d\mu_n - \int_X f d\mu_n \right| &= \frac{1}{n} \left| \int_X \sum_{i=0}^{n-1} (f \circ T^{i+1} - f \circ T^i) \right| \\ &= \frac{1}{n} \left| \int_X (f \circ T^n - f) \right| \\ &= \frac{2}{n} \|f\|_\infty \end{aligned} \tag{7.1}$$

und diese konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen Null. Nach Definition der schwach*-Topologie folgt also $\int_X f \circ T d\mu = \int_X f d\mu$ und damit die Invarianz von μ nach Lemma 3.6. \square

Beispiel 7.2 Sei S die stereographische Projektion des Einheitskreises K zentriert bei $i \in \mathbb{C}$ mit Zentrum $2i$ (Nordpol) auf die reelle Achse. Sei $T : K \rightarrow K$ definiert durch $K(2i) = 2i$ und $K(x) = S^{-1}(S(x)/2)$ sonst. Diese Abbildung wird *Nord-Süd-Abbildung* genannt. Sie ist stetig und hat zwei offensichtliche invariante Maße, die Dirac-Maße beim Nordpol und beim Südpol 0. Konvexkombinationen dieser beiden Maße sind die einzigen invarianten Maße, wie man mit Hilfe des Poincaré-Rekurrenzsatzes leicht zeigt.

Der folgende Satz hat etwas schwächere Voraussetzungen. Er wird aber zumeist nur für T stetig angewendet, denn nur dann garantiert der obige Satz, dass die Aussage nichtleer ist.

Proposition 7.3 *Ist X kompakt und T messbar, so sind die ergodischen Maße in \mathcal{M}^T gerade die Extrempunkte der konvexen Menge \mathcal{M}^T .*

Beweis: Ist $\mu \in \mathcal{M}^T$ nicht ergodisch und B invariant mit $0 < \mu(B) < 1$, so sind $\frac{1}{\mu(B)}\mu|_B$ und $\frac{1}{\mu(B^c)}\mu|_{B^c}$ invariante Wahrscheinlichkeitsmaße und

$$\mu = \mu(B) \left(\frac{1}{\mu(B)}\mu|_B \right) + \mu(B^c) \left(\frac{1}{\mu(B^c)}\mu|_{B^c} \right)$$

eine nichttriviale Konvexkombination.

Sei umgekehrt $\mu = s\nu_1 + (1-s)\nu_2$ eine nichttriviale Konvexkombination. Da $s > 0$ gibt es eine Funktion $f \in L^1_\mu$ (Radon-Nikodym-Ableitung) mit der Eigenschaft, dass $\nu_1(A) = \int_A f d\mu$. Die Menge $B = \{x \in X : f(x) < 1\}$ ist messbar (da f dies ist) und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{B \cap T^{-1}(B)} f d\mu + \int_{B \setminus T^{-1}(B)} f d\mu &= \nu_1(B) \\ &= \nu_1(T^{-1}(B)) \\ &= \int_{B \cap T^{-1}(B)} f d\mu + \int_{T^{-1}(B) \setminus B} f d\mu \end{aligned}$$

Also ist $\int_{B \setminus T^{-1}(B)} f d\mu = \int_{T^{-1}(B) \setminus B} f d\mu$. Auf der Integrationsmenge links ist $f < 1$, auf der Integrationsmenge rechts ist $f \geq 1$. Da aber andererseits aufgrund der T -Invarianz

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}(B) \setminus B) &= \mu(T^{-1}(B)) - \mu(T^{-1}(B) \cap B) \\ &= \mu(B) - \mu(T^{-1}(B) \cap B) = \mu(B \setminus T^{-1}(B)) \end{aligned}$$

gilt, folgt dass diese beiden Menge Maß Null haben. Zusammen ist also $\mu(T^{-1}(B) \Delta B) = 0$, also aufgrund der Ergodizität ist $\mu(B) \in \{0, 1\}$. Falls $\mu(B) = 1$, so ist $\nu_1(X) < 1$, ein Widerspruch. Das gleiche Argument ergibt, dass die Menge $\{x \in X : f(x) > 1\}$ auch Maß Null hat und aus $f = 1$ konstant folgt $\mu = \nu_1$. \square

7.2 Zerlegung in ergodische Maße

In einem endlich-dimensionalen Simplex kann jeder Punkt eindeutig als Konvexkombination von Extrempunkten geschrieben werden. Dies gilt für den im allgemeinen unendlichdimensionalen Simplex $\mathcal{M}^T(X)$ immer noch. Seien $\mathcal{E}^T(X) \subset \mathcal{M}^T$ die ergodischen Maße, d.h. die Extrempunkte dieser Menge.

Satz 7.4 *Sei X kompakt und $T : X \rightarrow X$ stetig. Zu jedem $\mu \in \mathcal{M}^T(X)$ gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß λ mit den Eigenschaften*

- i) $\lambda(\mathcal{E}^T(X)) = 1$ und
- ii) $\int_X f d\mu = \int_{\mathcal{E}^T(X)} \left(\int_X f d\nu \right) d\lambda(\nu)$ für alle $f \in C(X)$.

Dieses Resultat ist z.B. in [EW10, Theorem 4.8] angegeben. Dort findet man verschiedene Beweise, mit Methoden der Funktionalanalysis und mit Methoden der Integrationstheorie.

7.3 Eindeutige Ergodizität

Der Extremfall der Zerlegung in ergodische Maße ist ein dynamisches System, welches genau ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß besitzt. Ein solches System wird *eindeutig ergodisch* genannt. Nach dem vorigen Satz 7.4 ist dies notwendigerweise ergodisch. Wir geben zunächst eine Charakterisierung des Begriffs und danach untersuchen wir unsere Standardbeispiele auf eindeutige Ergodizität.

Satz 7.5 Sei $T : X \rightarrow X$ eine stetige Selbstabbildung eines kompakten Raums X . Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

- i) Das System T ist eindeutig ergodisch.
- ii) Die ergodischen Mittel konvergieren gegen eine Konstante, d.h. für alle $f \in C(X)$ gibt es ein $c = c_f$, sodass $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N(f) = c$.
- iii) Die ergodischen Mittel konvergieren uniform auf X gegen eine Konstante.
- iv) Für eine dichte Teilmenge $D \subset C(X)$ konvergieren die ergodischen Mittel gegen eine Konstante.

Beweis: Zur Implikation i) nach ii) sei μ das eindeutige invariante Maß. Nun genügt es Satz 7.1 für jeden Punkt x auf die konstante Folge der Dirac-Maße δ_x anzuwenden. Die schwach*-Konvergenz gegen μ ist genau die Aussage von ii) und $c_f = \int_X f d\mu$.

Umgekehrt, für die Implikation ii) nach i) sei μ ein beliebiges invariantes Maß. Dann gilt

$$\int_X f d\mu = \int_X \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(f) d\mu = c_f,$$

da wir Limes und Integral vertauschen können, da der Integrand offenbar eine integrierbare Majorante besitzt. Da dies für jedes f und jedes μ gilt, müssen alle invarianten Maße gleich sein. Für diesen Schluß genügt es auch, nur f in einer dichten Teilmenge von $C(X)$ zu betrachten, was die Implikation iv) nach i) beweist.

Da die Implikation iii) nach iv) offensichtlich ist, bleibt noch i) nach iii) zu zeigen. Angenommen die Konvergenz im ersten Schritt des Beweises ist nicht uniform. Dann gibt es ein $f \in C(X)$ und ein $x_0 \in X$, sodass es für alle $\varepsilon > 0$ und alle N_0 ein $N > N_0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x_0)) - c_f \right| > \varepsilon.$$

Sei $\mu_N = A_N(\delta_{x_0})$ entlang dieser Teilfolge gebildet und ν ein schwach*-Limes einer Teilfolge dieser Teilfolge. Dann ist $\nu \in \mathcal{M}^T(X)$ und nach Konstruktion ist $|\int f d\nu - c_f| > \varepsilon$. Also ist $\nu \neq \mu$, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Beispiel 7.6 Die Rotation R_α des Einheitskreises ist eindeutig ergodisch genau dann, wenn α irrational ist. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ hatten wir bereits gesehen, dass R_α nicht ergodisch ist. Ist α irrational, so verwenden wir, dass trigonometrische Funktionen dicht in den stetigen Funktionen auf dem Einheitskreis liegen und dass $e^{2\pi i k \alpha} = 1$ genau dann, wenn $k = 0$ ist. Sei $f(t) = e^{2\pi i k t}$. Dann ist

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(R_\alpha^n(t)) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k(t+n\alpha)}.$$

Für $k = 0$ ist dieser Ausdruck gleich eins, für $k \neq 0$ ist dies ein Teilstück einer konvergenten geometrischen Reihe dividiert durch N , also ist der Limes gleich Null. Damit gilt die Eigenschaft iv) des obigen Satzes.

8 Gleichverteilung

Eine Folge reeller Zahlen im Intervall $X = [0, 1]$ ist *gleichverteilt*, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_0^1 f(x) dx$$

für jedes $f \in C(X)$ gilt. Den Begriff kann man gleichermaßen für jeden kompakten topologischen Raum X und ein endliches Maß μ auf X formulieren, aber $X = [0, 1]$ kommt in zahlentheoretischen Fragen am häufigsten vor. Ist $x_n = T^n(x)$ für ein dynamisches System T , so stehen im Limes in der Definition genau die ergodischen Mittel der Dirac-Maße von δ_x , aber der Begriff hier ist allgemeiner.

Zunächst zeigen wir auch hier, dass wie beim Ergodensatz, Gleichverteilung äquivalent zur Fairness auf Teilintervallen ist.

Lemma 8.1 Eine Folge (x_n) ist gleichverteilt, genau dann wenn für jedes $0 \leq a < b \leq 1$

$$\frac{1}{n} |\{j : 1 \leq j \leq n, x_j \in [a, b]\}| \rightarrow (b - a)$$

im Limes $n \rightarrow \infty$.

Die Gleichverteilung der Folge (x_n) ist auch äquivalent zu

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i k x_j} = 0$$

für alle $k \neq 0$.

Beweis: In der einen Richtung der ersten Aussage verwenden wir, dass jede stetige Funktion durch Indikatorfunktionen auf Intervallen angenähert werden kann.

Umgekehrt ist es leicht, zu gegebenem a, b, ε zwei stetige Funktionen f^- und f^+ zu basteln mit $f^- \leq \chi_{[a,b]} \leq f^+$ und $\int_0^1 (f^+(x) - f^-(x)) dx \leq 2\varepsilon$. Dann gilt aufgrund der Equidistributionsannahme

$$\begin{aligned} b - a - 2\varepsilon &\leq \int_0^1 f^-(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_{[a,b]}(x_j) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \chi_{[a,b]}(x_j) \leq \int_0^1 f^+(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon \end{aligned} \tag{8.1}$$

und im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt wie im Beispiel bsp:RalphUE aus der Dichtheit der Funktionen $f_k(x) = e^{2\pi i k x}$ in den stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1)$. \square

Damit können wir nun das zweite Beispiel aus dem Motivationsabschnitt behandeln. Die Rotation um den Winkel $\alpha = \log_{10} 2$ ist nach Beispiel 7.6 eindeutig ergodisch, da α irrational ist. Satz 7.1 besagt, dass die Bilder $R_\alpha^n(x)$ für jedes x gleichverteilt sind und Lemma 8.1 besagt dann, dass für jedes Intervall $[a, b) \subseteq [0, 1)$ und jedes t

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{[a,b)}(R_\alpha^n(t)) \rightarrow b - a$$

konvergiert. Nun hat 2^n die erste Ziffer gleich $k \in \{1, \dots, 9\}$ genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, mit $k10^m \leq 2^n < (k+1)10^m$, d.h. genau dann, wenn

$$\log_{10} k \leq \{n \log_{10} 2\} \leq \log_{10}(k+1),$$

wobei die geschweiften Klammern den Nachkommaanteil einer reellen Zahl bezeichnen. Also ist die Dichte der n , sodass die erste Ziffer von 2^n gerade k ist, gleich

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{[\log_{10}(k), \log_{10}(k+1))}(R_\alpha^n(0)) = \log_{10} \left(\frac{k+1}{k} \right).$$

Sei (X, \mathcal{B}, μ, T) ein dynamisches System. Wir sagen, dass $x \in X$ ein *generischer Punkt* des dynamischen Systems ist, falls die Folge $T^n(x)$ gleichverteilt bzgl. μ ist.

Proposition 8.2 *Ist X kompakt, T stetig und μ ergodisch bzgl. T , dann ist μ -fast jeder Punkt generisch bzgl. μ .*

Beweis: Sei (f_n) eine Folge von Funktionen, die in $C(X)$ bzgl. der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm dicht liegt. Dann impliziert Birkhoffs Ergodensatz, dass es eine Teilmenge $X' \subset X$ von vollem Maß gibt, sodass für alle $x \in X'$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_i(T^n(x)) \rightarrow \int_X f d\mu$$

für $N \rightarrow \infty$ konvergiert.

Sei nun $f \in C(X)$ beliebig und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein f_i mit $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in X$. Dann ist

$$\int_X f d\mu - 2\varepsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(T^n(x)) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_i(T^n(x)) \leq \int_X f d\mu + 2\varepsilon$$

und für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt die Behauptung. \square

8.1 Gleichverteilung der Werte irrationaler Polynomfunktionen

Sei $P = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom. Die Untersuchung der Verteilung Nachkomma-Anteile geht $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ auf Weyl zurück. Dieser zeigte, dass die Nachkommaanteile gleichverteilt sind, falls mindestens eines der a_1, \dots, a_d irrational ist. Den Fall $d = 1$ haben wir in der Form der irrationalen Rotation bereits kennengelernt.

Wir geben den Beweis von Fürstenberg des Resultats von Weyl. Er verwendet folgende allgemeine Konstruktion eines dynamischen Systems. Sei $T : X \rightarrow X$ ein dynamisches System, G eine Gruppe und $c : X \rightarrow G$ eine Abbildung. Dann wird das System $Y = X \times G$ zusammen mit der Abbildung

$$S : Y \rightarrow Y, \quad s(x, g) = (T(x), c(x)(g))$$

das *Schiefprodukt* von X mit S genannt.

Der folgende Satz gilt wörtlich mit dem gleichen Beweis auch für X einen kompakten metrischen Raum und G eine kompakte Gruppe mit Haar-Maß m_G (siehe Abschnitt 9.2), da diese für kompakte Gruppen invariant von links und von rechts ist.

Satz 8.3 Sei $X = (S^1)^n$, sei μ das Produktmaß der Lebesguemaße und $G = S^1$, versehen mit dem Lebesguemaß m_G . Ist $T : X \rightarrow X$ stetig und eindeutig ergodisch, $c : X \rightarrow G$ stetig und das Schiefprodukt S auf $Y = X \times G$ ergodisch bezüglich $\mu \times m_G$, so ist es eindeutig ergodisch.

Beweis: Zunächst prüfen wir, dass $\mu \times m_G$ invariant unter S ist. Für $f \in C(Y)$ ist

$$\begin{aligned} \int_Y (f \circ S)(x, g) d\mu dm_G(x, g) &= \int_X \int_G f(T(x), c(x)g) d\mu dm_G(x, g) \\ &= \int_X \int_G f(T(x), g) d\mu dm_G(x, g) \\ &= \int_X \int_G f(x, g) d\mu dm_G(x, g) = \int_Y f d\mu dm_G. \end{aligned} \tag{8.2}$$

da die Linkstranslation mit $c(x)$ eine maßerhaltende Bijektion auf G ist. Aus der Voraussetzung S ergodisch und Proposition 8.2 folgt, dass

$$E = \{(x, g) \in Y, (x, g) \text{ generisch bzgl } \mu \times m_G\}$$

volles $\mu \times m_G$ Maß hat. Wir rechnen nun nach, dass E invariant unter Rechtstranslation $R_h : (x, g) \mapsto (x, gh)$ mit einem beliebigen Gruppenelement $h \in G$ ist. Generisch bedeutet

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f(S^i(x, g)) \rightarrow \int_Y f d\mu dm_G.$$

Dann konvergiert

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f(S^i(x, gh)) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (f \circ R_h)(S^i(x, g)) \\ &\rightarrow \int_Y (f \circ R_h) d\mu dm_G = \int_Y f d\mu dm_G. \end{aligned} \tag{8.3}$$

aufgrund der Rechts- G -Invarianz von m_G . Also ist $E = E_1 \times G$ mit $\mu(E_1) = \mu(X)$.

Sei nun ν ein beliebiges S -invariantes ergodisches Maß und $p : Y \rightarrow X$ die Projektion auf den ersten Faktor. Dann ist $p_*\nu$ invariant und ergodisch, also $p_*\nu = \mu$ nach Voraussetzung. Also ist auch

$$\nu(E) = \nu(E_1 \times G) = p_*\nu(E_1) = \mu(E_1) = 1.$$

Da ν -fast jeder Punkt in Y generisch für ν ist, gibt es folglich einen Punkt in E der auch ν -generisch ist. Dies genügt nach Definition eines generische Punktes um zu zeigen, dass ν und $\nu \times m_G$ übereinstimmen. \square

Korollar 8.4 Ist α irrational, so ist die Abbildung $S : (S^1)^k \rightarrow (S^1)^k$ gegeben durch

$$\log(S) : [0, 1)^k \rightarrow [0, 1)^k, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + \alpha \\ x_2 + x_1 \\ \vdots \\ x_k + x_{k-1} \end{pmatrix}$$

eindeutig ergodisch.

Beweis: Die Abbildung ist durch $(k-1)$ -fache Schiefproduktkonstruktion aus der irrationalen Rotation entstanden. Aufgrund von Satz 8.3 genügt es induktiv nachzuweisen, dass S für alle k ergodisch ist. Sei $X = (S^1)^k$ und $f \in L^2(X)$ invariant unter S . Sei

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} c_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}$$

die Fourier-Entwicklung von f . Sei

$$S' : \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{k-1} \\ n_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} n_1 + n_2 \\ n_2 + n_3 \\ \vdots \\ n_{k-1} + n_k \\ n_k \end{pmatrix}.$$

Dann impliziert die S -invariant von f , dass

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} c_{\mathbf{n}} e^{2\pi i \mathbf{n} \cdot S\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} c_{\mathbf{n}} e^{2\pi i n_1 \alpha} e^{2\pi i (S'\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x}},$$

d.h. aufgrund der Eindeutigkeit der Fourier-Koeffizienten

$$c_{S'\mathbf{n}} = e^{2\pi i n_1 \alpha} c_{\mathbf{n}}$$

und insbesondere haben die beiden beteiligten Fourier-Koeffizienten den gleichen Betrag. Sind alle Fourier-Koeffizienten in einer $\langle S' \rangle$ verschieden, so sind sie gleich Null, da $\sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k} c_{\mathbf{n}} < \infty$. Also gibt es zu \mathbf{n} zwei natürliche Zahlen $p > q$ mit $(S')^p \mathbf{n} = (S')^q \mathbf{n}$. Die Untersuchung des größten von Null verschiedenen Eintrag ungleich Null von \mathbf{n} liefert $n_2 = n_3 = \dots = n_k = 0$ für alle \mathbf{n} , sodass $c_{\mathbf{n}}$ von Null verschiedenen ist. Dann aber vereinfacht sich die Gleichung zu $c_{\mathbf{n}} = e^{2\pi i n_1 \alpha} c_{\mathbf{n}}$ und damit $c_{\mathbf{n}} = 0$ oder $n_1 = 0$. Also ist f konstant und die Behauptung bewiesen. \square

Satz 8.5 (Weyl) Sei $P = a_d x^d + \dots a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom und mindestens einer der Koeffizienten a_1, \dots, a_d irrational. Dann ist die Folge $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ der Nachkommaanteile gleichverteilt in $[0, 1)$.

Beweis: Durch das Beispiel 7.6 und Satz 7.1 haben wir den Fall $d = 1$ behandelt, siehe auch obige Diskussion zu den ersten Ziffern der Zweierpotenzen. Wir nehmen also induktiv an, dass die Aussage für Polynome vom Grad $d - 1$ wahr ist.

Ist a_d rational mit Nenner q , so stimmen die Nachkommaanteile $\{P(qn+b)\}_{n \in \mathbb{N}}$ auf jeder Nebenklasse modulo q mit denen eines Polynoms vom Grad $d - 1$ überein. Diese sind nach Induktionsvoraussetzung alle gleichverteilt, also auch die gesamte Folge.

Wir nehmen nun also ohne Einschränkung an, dass a_d irrational ist. Das Polynom P können wir als

$$P(x) = \binom{x}{d} b_d + \binom{x}{d-1} b_{d-1} + \cdots + x b_1 + b_0$$

für geeignete Koeffizienten b_i schreiben, wobei $b_d = d! a_d$ irrational ist. Dies hat den Zweck, das für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A^n \begin{pmatrix} b_d \\ b_{d-1} \\ b_{d-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \binom{n}{1} & 1 & & & \\ \binom{n}{2} & n & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \binom{n}{d} & \cdots & \cdots & n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_d \\ b_{d-1} \\ b_{d-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_d \\ \binom{n}{1} b_d + b_{d-1} \\ \binom{n}{2} b_d + n b_{d-1} + b_{d-2} \\ \vdots \\ \binom{n}{d} b_d + \binom{n}{d-1} b_{d-1} + \cdots + n b_1 + b_0 \end{pmatrix}.$$

Die letzten d Zeilen dieser Gleichung beschreiben die Abbildung aus dem vorigen Korollar 8.4, die erste Zeile ist konstant. Die Werte diese Zeilen sind nach dem vorigen Korollar (und wiederum der Schlussweise aus Satz 7.1) auf $(S^1)^d$ bzw. $[0, 1)^d$ gleichverteilt bezüglich dem Produktmaß. Dies impliziert, dass auch die letzte Koordinate auf $[0, 1)$ gleichverteilt ist, was zu zeigen war. \square

Wir beweisen noch ein Kriterium für Gleichverteilung im Intervall $[0, 1]$ um die Nützlichkeit der Methode von Weyl zu zeigen.

Satz 8.6 (Fejér) Sei $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, sodass die Differenzen $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$ monoton (wachsend oder fallend). Gilt weiterhin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta f(n) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n |\Delta f(n)| = \infty,$$

so ist die Folge der Nachkommaanteile $\{f(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, 1)$ gleichverteilt.

Beweis: Wir wollen Lemma 8.1 anwenden und für alle $k \neq 0$ zeigen, dass

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k f(n)} = 0 \tag{8.4}$$

gilt. Mit partieller Integration rechnet man für alle reellen u, v nach, dass

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i u} - e^{2\pi i v} - 2\pi i(u-v)e^{2\pi i v}| &= |e^{2\pi i(u-v)} - 1 - 2\pi i(u-v)| \\ &= 4\pi^2 \left| \int_0^{u-v} (u-v-w)e^{2\pi i w} dw \right| \\ &\leq 4\pi^2 \left| \int_0^{u-v} (u-v-w) dw \right| \\ &= 2\pi^2(u-v)^2. \end{aligned}$$

Dieses wenden wir auf $u = kf(n+1)$ und $v = kf(n)$ an. Dann besagt die vorige Gleichung, dass

$$\left| \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n)} - \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ik e^{2\pi ikf(n)} \right| \leq 2\pi^2 k^2 |\Delta f(n)| \quad \text{für } n \geq 1;$$

und damit, da $f(n)$ reellwertig ist,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} - \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)} - 2\pi ik e^{2\pi ikf(n)} \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)} \right| + 2\pi^2 k^2 |\Delta f(n)| \quad \text{für } n \geq 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt, mit Hilfe der Dreiecksungleichung,

$$\begin{aligned} & \left| 2\pi ik \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi ikf(n)} \right| \\ & = \left| \sum_{n=1}^{N-1} \left(2\pi ik e^{2\pi ikf(n)} - \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)} \right) + \frac{e^{2\pi ikf(N)}}{\Delta f(N)} - \frac{e^{2\pi ikf(1)}}{\Delta f(1)} \right| \\ & \leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| 2\pi ik e^{2\pi ikf(n)} - \frac{e^{2\pi ikf(n+1)}}{\Delta f(n+1)} + \frac{e^{2\pi ikf(n)}}{\Delta f(n)} \right| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|} \\ & \leq \sum_{n=1}^{N-1} \left| \frac{1}{\Delta f(n)} - \frac{1}{\Delta f(n+1)} \right| + 2\pi^2 k^2 \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)| + \frac{1}{|\Delta f(N)|} + \frac{1}{|\Delta f(1)|} \end{aligned}$$

Damit folgt, da $\Delta f(n)$ monoton ist und in der vorigen Zeile eine Teleskopsumme steht, dass

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} e^{2\pi ikf(n)} \leq \frac{1}{\pi|k|} \left(\frac{1}{N|\Delta f(N)|} + \frac{1}{N|\Delta f(1)|} \right) + \frac{\pi|k|}{N} \sum_{n=1}^{N-1} |\Delta f(n)|.$$

Aufgrund der Wachstumsvoraussetzungen an $\Delta f(n)$ folgt hieraus die Behauptung. \square

Dieses Kriterium kann man zum Beispiel auf Folgen der Bauart $\alpha n^\sigma \log^\tau n$ für $0 < \sigma < 1$ und $\alpha \neq 0$ bei beliebigem τ anwenden. Auch bei $\alpha \log^\tau n$ für $\alpha \neq 0$ und $\tau > 1$ ist das Kriterium anwendbar.

Eine ausführliche Diskussion von Kriterien für die Gleichverteilung von Folgen in $[0, 1]$ findet man im Buch [KN74].

9 Gruppenaktionen

Bisher haben wir die Aktion einer Selbstabbildung T betrachtet, und im invertierbaren Fall mit deren Potenzen die Aktion der Gruppe \mathbb{Z} . Für tieferliegende

Existenzaussagen von invarianten Maßen haben wir zudem noch Stetigkeit vorausgesetzt. Wir werden dies nun verallgemeinern, in dem wir die Operation einer allgemeinen Gruppe G auf X betrachten. Wie vorher nach Definition eines dynamischen Systems T und damit alle Potenzen maßerhaltend vorausgesetzt waren, besteht nun ein dynamisches System (X, \mathcal{B}, μ, G) aus einem Homomorphismus $T : G \rightarrow \text{MET}(X, \mathcal{B}, \mu)$ in die Gruppe der maßerhaltenden Transformationen von (X, \mathcal{B}, μ) .

9.1 Topologische Gruppen und invariante Metriken

Eine *topologische Gruppe* ist ein topologischer Raum G , der eine Gruppenstruktur trägt, sodass die Multiplikationsabbildung $(g, h) \mapsto gh$ und die Inversion $g \mapsto g^{-1}$ stetig sind.

Aus dieser Definition folgt bereits, dass Linksmultiplikation, Rechtsmultiplikation und Inversion allesamt Homöomorphismen sind. Untergruppen topologischer Gruppen sind wiederum topologische Gruppen mittels der Spurtopologie und für einen Normalteiler H von G ist der Quotient G/H wieder eine topologische Gruppe mit der Quotiententopologie.

Lemma 9.1 *Ist G kompakt und die Topologie durch eine Metrik $\|\cdot\|_A$ induziert, so gibt es eine Metrik $\|\cdot\|$ auf G , die die gleiche Topologie induziert und invariant unter allen Translationen (d.h. bi-invariant) ist.*

Beweis: Seien U_n offene Umgebungen des neutralen Elementes e mit $\cap U_n = \{e\}$. Nach dem Uryson-Lemma kann man zu jedem n eine stetige Funktion $f_n : G \rightarrow [0, 1]$ finden, die im Punkte e gleich 1 und ausserhalb von U_n gleich Null ist. Dann definieren wir

$$f(g) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(g)/2^n$$

und haben somit eine stetige Funktion $f : G \rightarrow [0, 1]$ gebastelt, die nur am Punkte e den Wert 1 annimmt. Dann definiert man

$$d(x, y) = \sup_{a, b \in G} \{f(axb) - f(ayb)\}.$$

Aufgrund der Kompaktheit von G existiert das Supremum, die Supremumkonstruktion macht die Abbildung bi-invariant. Die Eigenschaften einer Metrik rechnet man direkt nach und aufgrund der Stetigkeit von f erzeugt diese Metrik die Topologie von G . \square

Beispiel 9.2 Die Topologie auf $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ kann man als Spurtopologie der Topologie auf \mathbb{C}^{n^2} auffassen. Die Operatornorm

$$\|M\|_{\text{Op}} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Mv\|}{\|v\|},$$

wobei $\|\cdot\|$ die L^2 -Norm auf \mathbb{C}^n ist, induziert diese Topologie. Mit ihrer Hilfe definieren wir die Metrik

$$d(M, N) = \log(1 + \|M^{-1}N - I_n\| + \|N^{-1}M - I_2\|).$$

Diese ist invariant unter Linksmultiplikation, aber nicht unter Rechtsmultiplikation. Auf $GL_n(\mathbb{C})$ gibt es keine bi-invariante Metrik, denn dann wäre Konjugation eine Isometrie, aber

$$\begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und im Limes für $m \rightarrow \infty$ konvergiert die Ausgangsmatrix gegen die Einheitsmatrix, das Konjugat aber nicht.

Im Folgenden werden wir fast ständig voraussetzen, dass G lokal kompakt ist (d.h. dass das neutrale Element eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt) und dass G zudem σ -kompakt ist (d.h. G lässt sich als abzählbare Vereinigung kompakter Mengen schreiben). Als nicht-lokal-kompakte Gruppen sind z.B. unendlichdimensionale Vektorräume ausgeschlossen.

9.2 Das Haar-Maß

Satz 9.3 (Haar) *Sei G eine lokal-kompakte Gruppe. Dann gibt es ein Maß m_G auf G , genannt (Links-)Haar-Maß, welches unter Linkstranslation invariant ist, strikt positiv auf jeder nicht-leeren, offenen Menge und welches auf jeder kompakten Menge endlich ist.*

Das Maß m_G ist eindeutig in dem Sinne, dass jedes andere Maß mit den im vorigen Satz genannten Eigenschaften ein skalares Vielfaches von m_G ist.

Weiterhin ist $m_g(G)$ endlich genau dann, wenn G kompakt ist.

Wir werden hier keine Beweise dieses Satzes geben (dazu siehe z.B. ??), sondern nur m_G in einigen wichtigen Beispielen angeben. Es ist naheliegend, dass der gleiche Beweis auch ein Rechts-Haar-Maß liefert, welches unter Rechtstranslationen invariant ist.

Mit m_G ist für jedes $g \in G$ auch $A \mapsto m_G(Ag)$ ein Links-Haar-Maß, also ein skalares Vielfaches von m_G . Wir definieren die modulare Funktion $\text{mod}(g) = m_G(Ag)/m_G(A)$ für eine beliebige offene Menge A . Es gibt also ein bi-invariantes Maß auf G genau dann, wenn die modulare Funktion identisch gleich Eins ist. Da es keine nicht-trivialen kompakten Untergruppen von $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ gibt, folgt, dass das Haar-Maß für kompakte Gruppen bi-invariant ist. Ebenso ist es offenbar für abelsche Gruppen bi-invariant.

Beispiel 9.4 Offenbar ist das Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n translationsinvariant, es gibt positives Maß auf allen offenen Mengen und es ist endlich auf kompakten Mengen. Daher ist das Lebesgue-Maß das Haar-Maß.

Auf diese Art sieht man auch ein, dass das Exponentialbild des Lebesguemaßes auf $[0, 1]^n$ das Lebesguemaß auf dem n -dimensionalen (reellen) Torus $(S^1)^n$ definiert.

Wir können das Haar-Maß angeben, indem wir in translationsinvarianter Art, das Integral von einer Funktion angeben. Dabei muss das Integral einer Funktion mit kompaktem Träger endlich sein.

Beispiel 9.5 Ist $G = \text{GL}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so gilt nach den Integraltransaktionsregeln, dass

$$\int f(ax) \frac{dx}{|x|} = \int f(x) \frac{dx}{|x|}$$

für alle $a \neq 0$ und damit ist m_G definiert durch

$$\int f(x) dm_G(x) = \int f(ax) \frac{dx}{|x|}.$$

Die gleiche Formel, unter Verwendung des komplexen Betrags funktioniert auch für $\text{GL}_1(\mathbb{C})$.

Beispiel 9.6 Ist $G = \{x \mapsto ax + b\}$ die affine Gruppe des \mathbb{R}^1 , so ist

$$\int_G f(a, b) dm_G^{(\ell)}(a, b) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(a, b)}{a^2} da db$$

ein Links-Haar-Maß und

$$\int_G f(a, b) dm_G^{(r)}(a, b) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(a, b)}{|a|} da db$$

ein Rechts-Haar-Maß. In diesem Fall ist $\text{mod}(a, b) = 1/|a|$ nichttrivial.

Beispiel 9.7 Ist $G = \text{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix} : \det(A) \neq 0\}$. Dann ist

$$\int f(x) dm_G(x) = \int \int \int \int \frac{f(a, b, c, d)}{(ae - bc)^2} da db dc de.$$

ein bi-invariantes Haar-Maß.

9.3 Ergodizität

Sei $G \times X \rightarrow X$ die Operation einer Gruppe auf einem Messraum (X, \mathcal{B}) . Wie im Falle einer Transformation wird ein Maß μ *invariant unter G* genannt, falls $g_*\mu = \mu$, d.h. $\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$ für alle $A \in \mathcal{B}$ und alle $g \in G$ gilt. Es sei $\mathcal{M}^G(X)$ die Menge aller G -invarianten Maße auf X .

Definition 9.8 Sei $\mu \in \mathcal{M}^G(X)$. Die Aktion $G \times X \rightarrow X$ auf (X, \mathcal{B}, μ) ist *ergodisch*, falls zu gegebenem $A \in \mathcal{B}$ aus $\mu(g^{-1}(A)\Delta A) = 0$ für alle $g \in G$ folgt, dass $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$ ist.

Genau wie in Proposition 7.3 zeigt man in dieser Situation:

Proposition 9.9 Die Menge $\mathcal{M}^G(X)$ ist konvex und die Extrempunkte sind gerade die G -ergodischen Maße.

Wie schon in Proposition 3.10 ist es nützlich zu wissen, dass man fast-invariante Mengen durch Abänderung um eine Nullmenge zu einer invarianten Menge machen kann.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass X ein topologischer Raum mit Borel-Sigma-Algebra \mathcal{B} , dass G eine σ -kompakte und lokal-kompakte topologische Gruppe ist und dass die Aktion $G \times X \rightarrow X$ stetig ist. Man beachte, dass diese Bedingung stärker ist, als nur zu verlangen, dass für jedes $g \in G$ die Multiplikation mit g als Abbildung $X \rightarrow X$ stetig ist.

Proposition 9.10 Für $B \in \mathcal{B}$ sind äquivalent:

- i) B ist fast-invariant, d.h. $\mu(gB \Delta B) = 0$ für alle $g \in G$.
- ii) Zu B gibt es eine invariante Menge $B' \in \mathcal{B}$, die invariant ist (d.h. $gB' = B'$), und die sich von B nur um eine Nullmenge unterscheidet (d.h. $\mu(B \Delta B') = 0$).

Beweis: Die Implikation ii) nach i) ist offensichtlich. Für die Umkehrung im Fall, dass G abzählbar ist, setzen wir $B' = \bigcap_{g \in G} gB$. Diese Menge ist in \mathcal{B} , invariant und

$$\mu(B \Delta B') = \mu(B \setminus B') = \mu(\bigcup_{g \in G} B \setminus gB) = 0.$$

Für den Fall, dass G abzählbar ist, müssen wir mehr topologische Information verwenden. Sei dazu $G' \subset G$ eine abzählbare, dichte Untergruppe. (Diese existiert, da G metrisierbar und damit separabel ist, also eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Die davon erzeugte Gruppe ist immer noch abzählbar.) Wir können also annehmen, dass die Menge B aus i) nach dem bereits gezeigten, strikt invariant unter G' ist.

Da G lokal-kompakt vorausgesetzt ist, gibt es ein Haar-Maß m_G . Die Mengen

$$B_x = \{g \in G : gx \in B\} \subset G$$

sind meßbar aufgrund der Stetigkeit der Aktion. Aufgrund der G' -Invarianz ist $hB_x = B_x$ für alle $h \in G'$ und alle $x \in X$. Wir behaupten, dass daraus für jedes $x \in X$ entweder $m_G(B_x) = 0$ oder $m_G(G \setminus B_x) = 0$ folgt. Angenommen, das ist falsch für ein x . Dann ist die Menge

$$O = \{g \in G : m_G(gB_x \setminus B_x) > 0\}$$

nichtleer und offen aufgrund des Lemmas 9.11 unten. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $G' \cap O$ leer und G' dicht ist.

Sei nun

$$B' = \{x \in X : m_G(B_x) > 0\} = \{x \in X : m_G(B \setminus G_x)\} = 0.$$

Da $B_{hx} = B_x h^{-1}$ nach Definition, ist mit $m_G(B_x) > 0$ auch $m_G(B_{hx}) > 0$.
Damit ist B' strikt G -invariant.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass B' messbar ist und dass $\mu(B \Delta B') = 0$ ist. Dazu sei $U \subset G$ messbar und von endlichem positivem Haar-Maß. Wir definieren

$$f(x) = \frac{1}{m_g(U)} \int_U \chi_B(gx) dm_G(g).$$

Damit ist nach Definition $f = \chi_{B'}$ auf U und damit folgt nach der Messbarkeitsaussage des Fubini-Satzes angewandt auf $U \times X$ und der Messbarkeit von B die Messbarkeit von B' . Schliesslich ist für jedes U , wegen $\chi_B(gx) = \chi_{g^{-1}B}(x)$ und $f = \chi_{B'}$,

$$\begin{aligned} \mu(B \Delta B') &= \int_X \chi_B + \chi_{B'} - 2\chi_B \chi_{B'} d\mu \\ &= \frac{1}{m_g(U)} \int_U \int_X \chi_B + \chi_{g^{-1}B} - 2\chi_B \chi_{g^{-1}B} d\mu dm_G(g) \quad (9.1) \\ &= \frac{1}{m_g(U)} \int_U \mu(B \Delta g^{-1}(B)) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile $f = \chi_{B'}$ benutzt haben. Das beweist die Proposition aufgrund der kompakten Ausschöpfbarkeit von G . \square

Lemma 9.11 Sind B_1, B_2 zwei messbare Borel-Mengen einer lokal-kompakten und σ -kompakten Gruppen, die beide positives Haar-Maß haben, so ist

$$O = \{g \in G : m_G(gB_1 \cap B_2) > 0\}$$

offen und nicht leer. Darüber hinaus ist $m_G(B) > 0$ genau dann, wenn $m_G(B^{-1}) > 0$ ist.

Beweis: Es ist

$$m_G(gB_1 \cap B_2) = \int \chi_{gB_1}(h) \chi_{B_2}(h) dm_G(h).$$

Mit Hilfe von $\chi_{gB_1}(h) = \chi_{hB_1^{-1}}(g)$ folgt daraus, dass

$$\begin{aligned} \int m_G(gB_1 \cap B_2) dm_G(g) &= \int \int \chi_{gB_1}(h) \chi_{B_2}(h) dm_G(h) dm_G(g) \\ &= \int \chi_{B_2}(h) \underbrace{\left(\int \chi_{hB_1^{-1}}(g) dm_G(g) \right)}_{m_G(B_1^{-1})} dm_G(h) \quad (9.2) \\ &= \int_{B_2} m_G(B_1^{-1}) dm_G(h) \\ &= m_G(B_1^{-1}) m_G(B_2). \end{aligned}$$

Dabei haben wir so getan, als wäre Fubini richtig für charakteristische Funktionen von Mengen, die nicht notwendigerweise endliches Maß haben. Dies kann man korrigieren, indem man B_i mit einer kompakten Ausschöpfung schneidet und die Limes über die Aussagen auf den Schnitten verwendet. Setzt man in der Gleichungskette $B_2 = G$ und dann $B_1 = G$, so liefert die korrekte Interpretation der Gleichungskette die zweite Aussage.

Verwendet man die zweite Aussage, so folgt auch noch, dass die Funktion $m_G(gB_1 \cap B_2)$ integriert über O positiv ist und damit O nicht leer.

Um nun noch zu zeigen, dass O offen ist, sei $B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Ausschöpfung durch Mengen A_n mit kompaktem Abschluss. Aufgrund der Sigma-Additivität von m_G gibt es ein n , sodass $\varepsilon = m_G(gA_n \cap B_2) > 0$. Damit ist also

$$m_G(gA_n \cap B) = \int \chi_{gA_n} \chi_B dm_G = \int_{A_n} (g^{-1}h) \chi_B(h) dm_G(h).$$

Zweimalige Anwendung, mit der Notation $f = \chi_{A_n}$ besagt also, dass

$$\begin{aligned} |m_G(gA_n \cap B_2) - m_G(g_1A_n \cap B_2)| &\leq \left| \int (f(g^{-1}h) - f(g_1^{-1}h)) \chi_{B_2} dm_G(h) \right| \\ &= \|f(g^{-1}\cdot) - f(g_1^{-1}\cdot)\|_1. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass für g_1 nahe bei g , der letzte Term kleiner als ε gemacht werden kann. Diese Aussage formulieren wir für spätere Verwendung allgemeiner im folgenden Lemma. \square

Lemma 9.12 *Seien G, X eine Gruppe bzw. ein Raum, die lokal-kompakt und σ -kompakt sind. G operiere stetig auf X und lasse das Maß μ invariant. Dann ist für jedes $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(X)$ die Funktion $U_g(f)$ definiert durch*

$$U_g(f)(x) = f(g^{-1}(x))$$

für jedes $g \in G$ wieder in $L^p(X)$. Zudem ist $\|U_g f\|_p = \|f\|_p$ und die Abbildung $g \mapsto U_g f$ von G nach $L^p(X)$ ist stetig.

Beweis: Die ersten zwei Aussagen sind direkte Konsequenzen der Invarianz von μ . Für die Stetigkeitsaussage genügt es nun mit einem offensichtlichen Dreiecksungleichungsschluss nur stetige Funktionen mit kompaktem Träger zu betrachten, da diese dicht in $L^p(X)$ für alle $p \in [1, \infty)$ liegen. Da U_g invertierbar ist, genügt es die Stetigkeit bei Null zu zeigen, d.h. auf einer kompakten Umgebung V_0 von Null, die wir auch noch symmetrisch unter Inversion voraussetzen können. Ist S der Träger von f , so ist für $g \in V_0$ also f und $f \circ g$ außerhalb der kompakten Menge $K = V_0 S$ gleich Null. Im Inneren von K sind beide Funktionen gleichmäßig stetig. Daraus folgt leicht die Behauptung. \square

9.4 Starkes und schwaches Mischen

Für die Definition von schwach mischend verwenden wir das Kriterium aus Satz 5.6 ii).

Definition 9.13 Sei $\mu \in \mathcal{M}^G(X)$. Die Aktion $G \times X \rightarrow X$ auf (X, \mathcal{B}, μ) ist schwach mischend, falls die Diagonalaktion auf $X \times X$ ergodisch ist.

Definition 9.14 Die Aktion $G \times X \rightarrow X$ auf (X, \mathcal{B}, μ) ist mischend, falls für alle $A_0, A_1 \in \mathcal{B}$ und jede Folge $g_n \rightarrow \infty$ gilt

$$\mu(A_0 \cap g_n^{-1}A_1) \rightarrow \mu(A_0)\mu(A_1).$$

Dabei bedeutet $g_n \rightarrow \infty$, dass jede kompakte Menge K in G ab einem gewissen N_0 nicht wieder besucht wird (d.h. $g_n \notin K$ für $n \geq N_0$).

Die Operation ist mischend von Ordnung k , falls für alle A_0, \dots, A_k und Folgen $g_{i,n}$ mit $g_i \rightarrow \infty$ und $g_{i,n}^{-1}g_{j,n} \rightarrow \infty$ für alle $i \neq j$ gilt

$$\mu(A_0 \cap g_{1,n}^{-1}A_1 \cap \dots \cap g_{k,n}^{-1}(A_k)) \rightarrow \mu(A_0)\mu(A_1) \cdots \mu(A_k).$$

Die Operation ist mischend von beliebiger Ordnung, falls sie mischend von Ordnung k für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

In der Situation von Gruppenaktionen einer größeren Gruppe als nur \mathbb{Z} kennt man Beispiele von mischenden Systemen, die nicht mischend von beliebiger Ordnung sind. Ein solches ist Ledrappiers 'Drei-Punkte-Gruppe'. Dazu sei $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ die Standardbasis von \mathbb{R}^2 und

$$X_L = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2} : x_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} + x_{\mathbf{n}+\mathbf{e}_2} + x_{\mathbf{n}} = 0 \text{ für alle } \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^2\}$$

eine Gruppe mit komponentenweiser Addition. Diese ist offenbar kommutativ und mit der Spurtopologie von $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$ kompakt. Da die definierenden Gleichungen von X_L invariant unter Indexverschiebung sind, operiert \mathbb{Z}^2 vermöge des Shifts, d.h. für $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2$ sei

$$T_{\mathbf{m}} : (x_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}} \mapsto (x_{\mathbf{n}+\mathbf{m}})_{\mathbf{n}}.$$

Für die Beschreibung des Haar-Maßes definieren wir zu $A \subset \mathbb{Z}^2$ die Projektion $\pi_A : X_L \rightarrow \{0, 1\}^A$. Die Zylindermenge $\{x \in X_L : x_{\mathbf{a}} = 0 \text{ für alle } \mathbf{a} \in A\}$ hat also Index $|\pi_A(X_L)|$. Das Haar-Maß ist durch seine Werte auf Zylindermengen eindeutig vorgegeben. Ist C eine solche Menge, vorgegeben durch die Werte auf A und ist $C \cap X_L \neq \emptyset$, so definieren wir

$$m(C) = \frac{1}{|\pi_A(X_L)|}$$

Das somit bestimmte Maß ist offenbar translationsinvariant und erfüllt auch die anderen beiden definierenden Eigenschaften des Haar-Maßes, d.h. m ist das Haar-Maß.

Satz 9.15 Die Aktion von \mathbb{Z}^2 auf X_L ist mischend, aber nicht mischend von beliebiger Ordnung.

Ist G eine abelsche topologische Gruppe, so ist ein *Charakter* ein stetiger Homomorphismus $\chi : G \rightarrow S^1$. Diese Begriff erweitert den aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, wenn man diese mit der diskreten Topologie versieht.

Die weiteren Vorbemerkungen zum Beweis haben als Ziel zu skizzieren, weswegen für eine kompakte Gruppe G , die Charaktere dicht in $L^2_{m_G}(G)$ liegen. Zunächst ist nach dem Stone-Weierstraß-Satz (siehe z.B. [Wer00, Satz VIII.4.7]) ein Untervektorraum U in den stetigen Funktionen eines kompakten Raumes dicht, falls er die Konstanten enthält, unter Multiplikation und komplexer Konjugation abgeschlossen ist und Punkte des Raumes trennt. Da stetige Funktion in $L^2_{m_G}(G)$ dicht liegen, ist der wesentliche Schritt zu zeigen, dass Charaktere in G Punkte trennen. Dies ist für $G = X_L$ (und auch z.B. für $G = (S^1)^d$ offensichtlich durch explizite Angabe von Charakteren und im allgemeinen Fall kann man es mit Hilfe von Fourier-Transformation beweisen (Satz von Herglotz-Bochner, siehe [EW10, Anhang C]).

Beweis: Wie im Fall von \mathbb{Z} -Aktionen ist mischend äquivalent zu

$$\int f_0(x)f_1(T_{\mathbf{n}}x) dm(x) \rightarrow \int f_0 dm \int f_1 dm \quad (9.4)$$

für $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ und für alle $f_0, f_1 \in L^2_m(X_L)$, wobei wir den Divergenzbegriff wie in der Definition von Mischen verwenden. Wir verwenden nun, dass endliche Linearkombinationen von Charakteren in $L^2_m(G)$ dicht liegen, falls G eine kompakte abelsche Gruppe ist, wie oben erläutert. Mit dem bereits eingangs verwendeten Dichteschluss genügt es also die Aussage für $f_0 = \chi_0$ und $f_1 = \chi_1$ zwei Charaktere zu zeigen. Der für endliche Gruppen übliche Beweis der Orthogonalitätsrelationen lässt sich wörtlich auf kompakte Gruppen übertragen, da das Haar-Maß endlich ist. Wir erhalten also durch Paarung mit dem trivialen Charakter, dass $\int \chi dm = 0$, falls χ nichttrivial ist und gleich Eins sonst. Die Konvergenz in (9.4) ist also automatisch erfüllt, falls einer der beiden Charaktere trivial ist. Für die Eigenschaft mischend genügt es also für je zwei nichttriviale Charaktere χ_0, χ_1 zu zeigen, dass

$$\int \chi_0(x)\chi_1(T_{\mathbf{n}}x) dm(x) \rightarrow 0$$

für $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ gilt.

Dazu untersuchen wir X_L genauer. Ein Element von X_L ist durch die Angabe von $x_{\mathbf{n}}$ für $\mathbf{n} \in F$, wobei

$$F = \{\mathbf{n} : n_2 = 0 \text{ oder } (n_1 = 0 \text{ und } n_2 < 0)\},$$

eindeutig bestimmt und die Angabe dieser Werte bestimmt eindeutig ein Element von X_L . Mit anderen Worten, X_L ist als Gruppe isomorph zu $\{0, 1\}^F$.

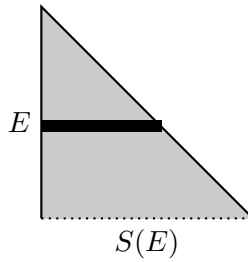


Abbildung 9.1: Schatten $S(E)$ von E

Mit der gleichen Überlegung sieht man ein, dass die Werte von $\pi_A(X_L)$ für jede endliche Menge $A \subset F$ bestimmt sind, indem man die Werte auf $\pi_E(X_L)$ kennt, wobei

$$E = E(\mathbf{m}, s) = \{\mathbf{m}, \mathbf{m} + e_1, \dots, \mathbf{m} + se_1\}$$

ein geeigneter, genügend langer horizontaler Streifen (der Höhe Eins) ist. Die zweite Koordinate m_2 von \mathbf{m} kann man dabei auch noch beliebig wählen, sofern man mit m_2 nur kleiner bleibt als die kleinste zweite Koordinate, die in A vorkommt.

Zu jedem Charakter χ gibt es, aufgrund der Stetigkeitsbedingung in der Definition von Charakteren, eine endliche Menge A , sodass χ über π_A faktorisiert. Aufgrund der vorigen Überlegung kann man also jeden Charakter χ mit Hilfe eines Streifens $E(\mathbf{m}, s)$ eindeutig festlegen, und zwar durch

$$\chi_F(X) = e^{\pi i \sum_{\mathbf{n} \in F} x_{\mathbf{n}}} \quad (9.5)$$

für $F \subset E(\mathbf{m}, s)$. Ohne Einschränkung werden wir ab sofort dabei annehmen, dass der linke und rechte Randpunkt des Streifens in F liegen.

Will man zwei Charaktere χ_0 und χ_1 vergleichen, so kann man annehmen, dass sie beide durch die Formel (9.5) mit F_0 und F_1 in Streifen der selben Höhe (d.h. gleiches m_2) gegeben sind. In diesem Fall folgt, dass die Charaktere orthogonal sind, d.h. dass $\int \chi_0(x) \chi_1(x) dm(x) = 0$ gilt, es sei denn F_0 und F_1 sind gleich, da für X_L alle Charaktere ± 1 -wertig sind.

Die Orthogonalität geht also bei zwei Charakteren, die durch F_0 und F_1 in Streifen gegeben sind, höchstens dann schief, falls die Schatten $S(F_0)$ und $S(F_1)$, wie in Bild 9.1 definiert, die Eigenschaft $S(F_0) \Delta S(F_1) = \emptyset$ haben. Zu gegebenem F_0 und F_1 ist $S(F_0) \Delta S(F_1 + \mathbf{n}) = \emptyset$ für höchstens ein \mathbf{n} erfüllt, also sicher nicht für $\mathbf{n} \rightarrow \infty$. Daraus folgt, dass die Aktion von \mathbb{Z}^2 mischend ist.

Wir zeigen nun, dass diese Aktion nicht mischend auf drei Mengen ist. Durch Induktion zeigt man aus der definierenden Bedingung von X_L , dass

$$x_{2^k e_2} = \sum_{j=0}^{2^k} \binom{2^k}{j} x_{j e_1} \equiv x_{(0,0)} + x_{2^k e_1} \pmod{2}.$$

Sei $M = \{x \in X_L : x_{(0,0)} = 0 \text{ und } y \in X_L \text{ beliebig mit } y_{(0,0)} \neq 0, \text{ sodass } X_L = M \cup (M + y) \text{ eine disjunkte Vereinigung ist. Also ist } m(M) = m(M + y) = 1/2.$ Aber aus der obigen Kongruenz folgt, dass wenn $x \in M$ und auch in $T_{-2^k e_1} M$ liegt, dass es auch in $T_{-2^k e_2} M$ liegt. Also ist

$$M \cap T_{-2^k e_1} M \cap T_{-2^k e_2} (M + y) = \emptyset$$

für alle $k \leq 1$, was die Behauptung des Nicht-Mischens auf drei Mengen beweist. \square

9.5 Existenz invarianter Maße

Im Gegensatz zum Fall einer Transformation ist die Existenz invarianter Maße bei allgemeinen Gruppenoperationen eine delikate Frage.

Beispiel 9.16 Sei X der Einheitskreis, zentriert bei i , wie im Beispiel 7.2 der Nord-Süd-Abbildung und sei T eben jene Abbildung. Dann sind die T -invarianten Maße gerade die Konvexkombinationen aus δ_N und δ_S , den Punktmaßen beim Nord- und Südpol. Sei S die analog definierte Ost-West-Abbildung, welche alles außer $-1 + i$ in Richtung des Punktes $1 + i$ verschiebt. Dann hat die Gruppe $G = \langle S, T \rangle$ offenbar keine invarianten Maße.

Eine Bedingung, die die Existenz invarianter Maße sicherstellt ist folgende.

Definition 9.17 Eine lokal-kompakte, σ -kompakte Gruppe G ist amenabel, falls es zu jedem kompakten $K \subset G$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge eine messbare Menge F gibt, sodass FK messbar ist und

$$m_G(F \Delta KF) < \varepsilon m_G(F)$$

gilt, wobei m_G das Haar-Maß auf G ist.

Grob gesprochen ist F eine Menge, deren Rand (bzgl. kleines Maß im Verhältnis zur Gesamtmasse hat. Man sagt auch, so ein F sei (K, ε) -invariant.

Das Wort amenabel ist eine Übersetzung der ursprünglich deutschsprachigen Definition einer 'messbaren' (manche Quellen sagen 'mittelbaren') Gruppe. Eine Gruppe ist demnach 'amenable, if there exists a mean', d.h. ein endliches 'Maß', welches auf jeder Teilmenge der Gruppe definiert ist, links-invariant ist, aber nur endlich-additiv (statt σ -additiv) vorausgesetzt ist. Als Wortspiel hat es keine gute Rückübersetzung ins Deutsche, 'mittelbar' ist auch ein gebräuchlicher Begriff. Wir werden die Äquivalenz der Existenz eines Mittels zu dem obigen Begriff nicht benötigen und nicht zeigen.

Eine Folge F_n von Teilmenge von G heißt Følner-Folge, falls es zu jedem (K, ε) ein Index n gibt, abdem alle Folgeglieder (K, ε) -invariant sind. Die Existenz einer Følner-Folge ist äquivalent zur Amenabilität: Eine Richtung ist offensichtlich, sei also umgekehrt G amenabel. Wir verwenden die σ -Kompaktheit

und nehmen eine Ausschöpfung von $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ durch kompakte Mengen mit $A_n \subset A_{n+1}$ her. Sei F_n eine Menge, die die Definition von amenable für $(K = A_n, \varepsilon = 1/n)$ erfüllt. Da die A_n ineinander enthalten sind, leistet diese das Verlangte.

Beispiel 9.18 Die diskrete Gruppe $G = \mathbb{Z}$ (oder auch $G = \mathbb{Z}^n$) ist amenabel, denn eine Følner-Folge sind die Intervalle $F_n = [-n, n]$ (bzw. die Kugeln vom Radius n in \mathbb{R}^n geschnitten mit G). Allgemein sind abelsche Gruppen amenabel. Die üblichen Beweise benötigen eine Portion mengentheoretische Topologie (Ultrafilter) und das Auswahlaxiom.

Kompakte Gruppen sind amenabel, indem man $F = G$ für alle ε nimmt.

Eine diskrete Gruppe die eine freie Gruppe auf zwei Erzeugern enthält, ist nicht amenabel. Die Umkehrung war lange eine berühmte Vermutung, die inzwischen widerlegt ist.

Die Gruppe $SO_n(\mathbb{R})$ für $n \geq 3$ ist nicht amenabel, aber $SO_2(\mathbb{R})$ ist amenabel. Das ist der Grund für das Banach-Tarski-Paradoxon in drei Dimensionen und die Tatsache, dass eine analoge Aussage in Dimension zwei nicht gibt.

Satz 9.19 Ist G amenabel und $G \times X \rightarrow X$ eine stetige Operation auf einem kompakten metrischen Raum, so gibt es ein G -invariantes Maß.

Beweis: Sei wie schon zuvor $\mathcal{M}(X)$ der konvexe Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf X . Die stetige Operation definiert einen Homomorphismus $G \rightarrow \text{Homöo}(X)$ und, via $g \mapsto (\nu \mapsto g_*\nu)$ auch einen Homomorphismus $G \rightarrow \text{Homöo}(\mathcal{M}(X))$. Sei $\nu \in \mathcal{M}(X)$ und F_n eine Folner-Folge in G . Dann definieren wir die Mittel entlang der Følner-Folge

$$\mu_n = \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} g_*\nu \, dm_G(g),$$

was konkret bedeutet, dass μ_n das Maß ist, sodass für alle $f \in C(X)$ gilt

$$\int f \, d\mu_n = \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} \int f(gx) \, d\nu(x) \, dm_G(g).$$

(Die Existenz eines solchen Maßes muss man rechtfertigen, der sorgfältige Beweis verwendet bedingte Erwartungswerte.)

Aus dieser Folge extrahieren wir mit Hilfe des Satzes von Banach-Alaoglu eine schwach*-konvergente Teilfolge μ_{n_j} , deren Limes wir mit μ bezeichnen. Wir müssen noch nachrechnen, dass μ in der Tat invariant ist. Vorbereitend notieren wir, dass für alle $f \in C(X)$ und $h \in G$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \int f(hx) \, d\mu_n(x) &= \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} \int f(hgx) \, d\nu(x) \, dm_G(g) \\ &= \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{hF_n} \int f(gx) \, d\nu(x) \, dm_G(g) \end{aligned} \tag{9.6}$$

gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left| \int f(hx) d\mu_n(x) - \int f(x) d\mu_n(x) \right| &\leq \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n \Delta hF_n} |f(gx)| d\nu(x) dm_G(g) \\ &\leq \frac{m_G(F_n \Delta hF_n)}{m_G(F_n)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \tag{9.7}$$

und damit die behauptete Invarianz für jeden schwach*-Limes der Folge μ_n . \square

10 Ergodensätze für Gruppenaktionen

In diesem Abschnitt werden wir die Ergodensätze aus Abschnitt 3 auf Gruppenaktionen ausdehnen. Sei grundsätzlich $G \times X \rightarrow X$ eine Gruppenoperation. Rekurrentes Thema ist dabei die Nützlichkeit von Følner-Folgen, d.h. der Amenabilität. Wie in jenem Abschnitt definieren wir die unitäre Darstellung zu G durch

$$U_g(f)(x) = f(g^{-1}(x)) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die Inversion ist notwendig, damit dies eine Gruppenaktion wird, wie man an der Rechnung

$$U_h(U_g(f))(x) = U_g(f)(h^{-1}(x)) = f(g^{-1}h^{-1}x) = U_{hg}(f)(x)$$

sieht. Wenn G ein Maß μ auf X invariant lässt, so erhält man somit eine unitäre Transformation $U_g : L^2_\mu(X) \rightarrow L^2_\mu(X)$.

Die Integrale im folgenden Satz sind über Funktionen der Bauart $\phi : G \rightarrow V$ (konkret $G \ni g \mapsto U_g f$ bei gegebenem f) mit Werten in einem topologischen Vektorraum. Solche Integrale sind durch die definierende Gleichung

$$\ell \left(\int_G \phi dm_G \right) = \int_G \ell(\phi) dm_G \tag{10.1}$$

für alle Funktionale $\ell : V \rightarrow \mathbb{C}$ charakterisiert, falls der topologische Vektorraum genügend viele solche Funktionale besitzt. Ist V ein Hilbertraum, so besagt der Rieszsche Darstellungssatz gerade, dass die Hilbertraumwertigen Integrale existieren und eindeutig sind.

Satz 10.1 (Ergodensatz im Mittel) *Sei G eine lokal-kompakte und σ -kompakte amenable Gruppe mit Links-Haar-Maß m_G . Die Gruppe operiere stetig auf X und lasse das Wahrscheinlichkeitsmaß μ invariant. Sei P_G die Orthogonalprojektion auf den abgeschlossenen Unterraum*

$$I = \{f \in L^2_\mu(X) : U_g f = f \text{ für alle } g \in G\}$$

der U_g -invarianten Funktionen. Dann konvergieren die Mittel entlang jeder Følner-Folge F_n , d.h. ist $f \in L^2_\mu(X)$, so konvergiert

$$\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} f dm_G(g) \rightarrow P_G(f)$$

in $L^2_\mu(X)$.

Daraus folgt unmittelbar:

Korollar 10.2 *Unter den Voraussetzungen wie im Satz ist die Aktion ergodisch, genau dann, wenn für alle f in einer dichten Teilmenge von $L^2_\mu(X)$ gilt*

$$\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g) \rightarrow \int_X f \, dm_\mu$$

in $L^2_\mu(X)$.

Beweis von Satz 10.1: Sei in $f \in L^2_\mu(X)$ und $v(x) = f(hx) - f(x)$ für ein $h \in G$, d.h. v ist im Bild des Operators $U_h - \text{Id}$. Wir zeigen im ersten Schritt, dass die Mittel entlang der Følner-Folge für so ein v gegen Null konvergieren. Dazu beobachten wir, dass

$$\int_{F_n} U_{g^{-1}} U_{h^{-1}} f \, dm_G(g) = \int_{F_n} U_{(hg)^{-1}} f \, dm_G(g) \int_{hF_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g)$$

und deswegen ist

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} v \, dm_G(g) \right\|_2 \\ &= \left\| \frac{1}{m_G(F_n)} \left(\int_{hF_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g) - \int_{F_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g) \right) \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n \Delta hF_n} \|U_{g^{-1}} f\|_2 \, dm_G(g) \end{aligned}$$

Damit konvergiert auch das $L^2_\mu(X)$ -wertige Integral gegen Null.

Im zweiten Schritt definieren wir V als den Abschluss in $L^2_\mu(X)$ des Raums endlicher Linearkombinationen von Funktionen der Form $U_h - \text{Id}$. Genau wie im Fall einer Transformation (Satz 3.14) zeigt man, dass $V = I^\perp$ ist und damit $L^2_\mu(X) = I \oplus V$. Also genügt es, die Aussage für $f \in V$ zu zeigen, was wiederum wie in Satz 3.14 mit einem Dichteschluss aus dem ersten Schritt folgt. \square

11 Flüsse auf der oberen Halbebene und Quotienten

Sei \mathbb{H} die obere Halbebene und $T\mathbb{H} = \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ das Tangentialbündel an \mathbb{H} . Auf $T\mathbb{H}$ definieren wir eine Kollektion von Skalarprodukten

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{1}{y^2} (v, w),$$

falls $z = x + iy$ und wobei (v, w) das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ ist. Diese bilden eine Riemannsche Metrik, die *hyperbolische*

Metrik. Damit kann man jedem Pfad $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$ (d.h. einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve) eine Länge

$$L(\varphi) = \int_0^1 \|D\varphi(t)\|_{\varphi(t)} dt$$

zuordnen, wobei $D\varphi(t) = (\varphi(t), \varphi'(t)) \in T\mathbb{H}$ der Tangentialvektor an den Weg zum Zeitpunkt t ist. Damit definiert man einen Abstandsbegriff auf \mathbb{H} vermöge

$$d(z_1, z_2) = \inf_{\varphi} L(\varphi), \quad (11.1)$$

wobei φ alle Pfade mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2 durchläuft. Bevor man diese Abstände konkret ausrechnet, ist es nützlich eine natürliche Gruppenaktion zu betrachten.

Die Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ operiert auf \mathbb{H} durch

$$\gamma \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{falls } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dass das Bild wieder in \mathbb{H} liegt, folgt aus der allgemein nützlichen Formel

$$\text{Im}(\gamma(z)) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}. \quad (11.2)$$

Die Operation der Untergruppe $\pm I$ auf \mathbb{H} ist offenbar trivial, wir definieren daher $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$.

Lemma 11.1 *Die Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf \mathbb{H} , der Stabilisator des Punktes $i \in \mathbb{H}$ ist $SO_2(\mathbb{R})$.*

Die Operation von $SL_2(\mathbb{R})$ bewahrt die Riemannsche Metrik und damit auch den Abstandsbegriff.

Beweis: Für die erste Aussage genügt zu bemerken, dass die Matrix $\begin{pmatrix} \sqrt{y} & x/\sqrt{y} \\ 0 & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix}$ den Punkt i auf $x + iy$ abbildet. Für die zweite Aussage folgern wir aus $\gamma i = i$ mit Hilfe von (11.2) die Bedingung $c^2 + d^2 = 1$ folgt. Schreibt man also $c = \sin \theta$ und $d = \cos \theta$ mit $\theta \in \mathbb{R}$, so folgt aus $\gamma i = i$, dass $a = \cos \theta$ und $b = -\sin \theta$.

Ist $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, so ist $g'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$. Also ist

$$D(\gamma) : T\mathbb{H} \rightarrow T\mathbb{H}, \quad (z, v) \mapsto \left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{v}{(cz + d)^2} \right). \quad (11.3)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \langle D(\gamma)u, D(\gamma)v \rangle_{\gamma z} &= \left(\frac{y}{|cz + d|^2} \right)^{-2} \left(\frac{u}{(cz + d)^2}, \frac{v}{(cz + d)^2} \right) \\ &= \frac{1}{y^2} \langle u, v \rangle, \end{aligned} \quad (11.4)$$

denn das zweite Argument einer Hermiteschen Form ist komplex-linear. Da der Abstandsbegriff über die Länge von Wegen und diese wiederum mit Hilfe der Riemannschen Metrik definiert sind, folgt hieraus auch die letzte Behauptung. \square

Das *Einheitstangentialbündel* ist der Unterraum

$$T^1\mathbb{H} = \{(z, v) \in T\mathbb{H} : \|v\| = 1\} \subset T\mathbb{H}.$$

Das vorige Lemma besagt, dass die Operation von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ eine Aktion auf $T\mathbb{H}$ induziert, die das Einheitstangentialbündel invariant lässt. Diese Aktion ist einfach transitiv, d.h. zu zwei Punkte $(z_1, v_1), (z_2, v_2) \in T\mathbb{H}$ gibt es genau ein $\gamma \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit $\gamma \cdot (z_1, v_1) = (z_2, v_2)$. Dies folgt aus dem Lemma, wenn man noch beachtet, dass $\gamma = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ vermöge

$$D(\gamma)(v) = \frac{v}{(i \sin \theta + \cos \theta)^2} = (\cos(2\theta) - i \sin(2\theta))v$$

auf $S^1 \subset \mathbb{C}$ einfach transitiv operiert. Anders gesagt, $\gamma \mapsto D(\gamma)(i, i)$ gibt einen Isomorphismus $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow T^1\mathbb{H}$ (von Mannigfaltigkeiten).

11.1 Geodäten und der geodätische Fluß

Ziel dieses Abschnitts ist es herauszufinden, welche Pfade den Abstandsbe-
griff in (11.1) minimieren. Wir werden alles auf den folgenden Spezialfall zu-
rückführen.

Lemma 11.2 *Seien $z_0 = y_0i$ und $z_1 = y_1i$ zwei Punkte auf der imaginären Achse in \mathbb{H} . Dann ist*

$$d(z_0, z_1) = \log(y_1/y_0)$$

und

$$\varphi(t) = e^t y_0 i, \quad t \in [0, \log(y_1/y_0)]$$

definiert einen Pfad mit konstanter Geschwindigkeit Eins von z_0 nach z_1 .

Der Pfad φ ist eindeutig, d.h. ist $\psi(t) : [0, \log(y_1/y_0)] \rightarrow \mathbb{H}$ ein weiterer Pfad von Länge $\log(y_1/y_0)$, so gibt es eine Reparametrisierung durch eine stückweise differenzierbare, monoton wachsende Selbstabbildung f von $[0, \log(y_1/y_0)]$, sodass $\psi = \varphi \circ f$ ist.

Beweis: Der angegebene Pfad hat Geschwindigkeit Eins und damit ist $d(z_0, z_1) \leq \log(y_1/y_0)$. Ist $\eta(t) = \eta_x(t) + \eta_y(t)$ für $t \in [0, 1]$ ein weiterer Pfad mit den geforderten Endpunkten, zerlegt in seinen Real- und Imaginärteil, so ist

$$L(\eta) = \int_0^1 \frac{\|\eta(t)\|}{\eta_y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\eta_y(t)|}{\eta_y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\eta_y(t)}{\eta_y(t)} dt = \log(y_1) - \log(y_0).$$

Dabei impliziert Gleichheit in der Ungleichungskette, dass $\eta_x = 0$ ist und $\eta_y(t) \geq 0$ ist. \square

Proposition 11.3 Zu je zwei Punkten z_0, z_1 in \mathbb{H} gibt es genau einen Pfad $\varphi : [0, d(z_0, z_1)] \rightarrow \mathbb{H}$ mit $\varphi(0) = z_0, \varphi(d(z_0, z_1)) = z_1$ mit konstanter Geschwindigkeit Eins. Darüber hinaus gibt es genau eine Isometrie $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, sodass $\varphi(t) = g(e^t i)$.

Beweis: Aufgrund der Transitivität der $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ -Operation gibt es ein $g_1 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit $g_1 z_0 = i$. Alle Elemente mit dieser Eigenschaft haben nach Lemma 11.1 die Gestalt hg_1 mit $h \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Dabei macht die Forderung $hg_1(z) \in i\mathbb{R}_{>1}$ das Element h eindeutig. Wir setzen $g = (hg_1)^{-1}$. Dann ist also $\varphi(t) = ge^t(i)$ für $t \in [0, \log(g^{-1}z_1/g^{-1}z_0)]$ ein Pfad von z_0 nach z_1 . Gäbe es einen weiteren Pfad η von gleicher oder kürzerer Länge, so wäre $g^{-1}\eta$ ein weiteren Pfad von gleicher oder kürzerer Länge von i nach $g^{-1}z_1 \in i\mathbb{R}$. Damit ist nach dem vorangehenden Lemma η eine Umparametrisierung von φ , also unter der Voraussetzung konstanter Geschwindigkeit Eins gleich φ . \square

Die Pfade, die in der obigen Proposition den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten realisieren, werden *Geodäten* genannt.

Korollar 11.4 Eine Geodäte auf \mathbb{H} ist in einer vertikalen Geraden oder in einem Kreis mit Mittelpunkt auf \mathbb{R} enthalten.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass das Bild einer vertikalen Geraden oder eines Kreises der Form $(x - f)^2 + y^2 = r^2$ unter einer Möbiustransformation wieder ein solches Objekt ist. Die Transformationen $z \mapsto az + b$ und $z \mapsto -1/z$ erzeugen diese Gruppe. Unter $z \mapsto az + b$ gehen vertikale Geraden auf vertikale Geraden und $(x - f)^2 + y^2 = r^2$ auf $(x - (af + b))^2 + y^2 = a^2r^2$. Die Abbildung $z \mapsto -1/z$ ist in Polarkoordinaten gegeben durch $(r, \theta) \mapsto (\frac{1}{r}, \pi - \theta)$. Da sowohl vertikalen Geraden als auch Kreise mit Mittelpunkt auf \mathbb{R} durch eine Gleichung der Form

$$\alpha r^2 + \beta r \cos(\theta) + \gamma = 0$$

mit $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ definiert werden, sieht man, dass die Menge solcher Objekte unter $z \mapsto -1/z$ invariant ist. \square

Schliesslich wollen wir noch die Menge aller geodätischen Pfade mit Hilfe eines Flusses, d.h. einer Aktion von \mathbb{R} auf $T^1\mathbb{H} \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ beschreiben. Der *geodätische Fluss* $g_t : T^1\mathbb{H} \rightarrow T^1\mathbb{H}$ ist definiert im Punkt (z, v) als der Endpunkt der Geoäte durch z mit Tangentialvektor v von Länge t . Insbesondere ist $g_t(i, i) = (e^t i, e^t i)$.

Da das Einheitstangentialbündel eine Gruppenstruktur hat, gibt es die Möglichkeit mit Rechts- oder Linksmultiplikation zu arbeiten. Beide werden in der Literatur verwendet, die jeweils andere wird für die Aktion der Fuchsschen Gruppe benötigt, wie wir sie im nächsten Abschnitt einführen.

Wir (und [EW10]) verwenden die Konvention, dass die Flüsse auf \mathbb{H} mit Hilfe von Rechtsmultiplikation beschrieben werden, aber (wie alle Operationen

hier) von Links wirken. Deswegen müssen wir das wirkende Gruppenelement invertieren. Sei also

$$a_t = \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}.$$

Damit können wir den geodätischen Fluss in einem beliebigen Punkt $(z, v) = g(i, i)$ als Linkswirkung von a_t durch Rechtsmultiplikation auf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ beschreiben, denn es gilt

$$g_t(z, v) = Dg(g_t(i, i)) = Dg(Da_t^{-1}(i, i)) = D(ga_t^{-1})(i, i).$$

11.2 Der horozyklische Fluss, stabile und instabile Mannigfaltigkeit

Die Geodäten durch die beiden Punkte (i, i) und $(x + i, i) \in T^1\mathbb{H}$ sind gegeben durch

$$g_t(i, i) = (e^t i, e^t i), \quad \text{bzw.} \quad g_t(x + i, i) = (x + e^t i, e^t i).$$

Diese laufen also parallel und der Abstand der zugrundeliegenden Basispunkte $e^t i$ und $x + e^t i$ ist beschränkt durch $|x|/e^t$, geht also gegen Null. Wir werden in diesem Abschnitt eine Metrik auf $T^1\mathbb{H}$ einführen, die invariant unter der Linkstranslation von $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist und in der dieser Abstand auch gegen Null geht. Bei vorgegebenem Punkt (z, v) nennen wir die Menge der Punkte (z', v') , deren Abstand $d(g_t(z', v'), g_t(z, v))$ unter dem geodätischen Fluss für $t \rightarrow \infty$ nach Null geht die *stabile Mannigfaltigkeit* durch (z, v) . Für den Punkt (i, i) enthält die stabile Mannigfaltigkeit die Punkte $(x + i, i)$. Es wird sich herausstellen, dass dies alle Punkte der stabilen Mannigfaltigkeit sind. Diese sind wiederum die Bahn eines Flusses, den wir wie folgt definieren. Sei

$$U^- = \{u_s = \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\}.$$

Zu $(z, v) \in T^1$ sei $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, sodass $(z, v) = Dg(i, i)$. Dann ist die Bahn des (stabilen) *horozyklischen Flusses* durch (z, v)

$$u^-(s)(z, v) = D(gu_s)(i, i).$$

Analog definieren wir

$$U^+ = \{v_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}\}.$$

Dann definiert die Bahn des *instabilen horozyklischen Flusses* $u^+(s)(z, v) = D(gv_s)(i, i)$ die *instabile Mannigfaltigkeit*.

Wir wollen nun eine linksinvariante Metrik auf einer beliebigen abgeschlossenen Untergruppe G der linearen Gruppe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ definieren und dies im Folgenden speziell auf $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Sei \mathfrak{g} die Lie-Algebra von G . Dies ist der maximale lineare Unterraum von $\mathrm{Mat}^{d \times d}(\mathbb{R})$ mit $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$, wobei \exp die Matrixexponentialabbildung ist. (Als Übung zeige man, dass aufgrund der

Abgeschlossenheit von G die so definierte Menge \mathfrak{g} in der Tat ein Untervektorraum ist.) Im konkreten Falle ist die Lie-Algebra von $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gleich

$$\mathfrak{sl}_2 = \{v \in \mathrm{Mat}^{2 \times 2} : \mathrm{tr}(v) = 0\}.$$

Wir fassen zunächst alle Eigenschaften über die Metrik auf G , die wir in Rest von Abschnitt 11 benötigen, in der folgenden Proposition zusammen.

Proposition 11.5 *Sei $G \subset \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ abgeschlossen. Der Tangentialraum TG an G kann mit $G \times \mathfrak{g}$ identifiziert werden. Unter dieser Identifikation ist die Tangentialabbildung der Linksmultiplikation mit g im Punkt h gleich*

$$(DL_g)_h : T_h G \rightarrow T_{gh} G, \quad (h, v) \mapsto (gh, v),$$

während die Tangentialabbildung an die Rechtstranslation (mit g^{-1}) durch

$$(DR_g)_h : T_h G \rightarrow T_{gh} G, \quad (h, v) \mapsto (hg^{-1}, gvg^{-1})$$

gegeben ist. Zu jeder Wahl eines Skalarprodukts (\cdot, \cdot) auf \mathfrak{g} erhält man mittels

$$\langle u, v \rangle_g = (u, v) \tag{11.5}$$

eine linksinvariante Riemannsche Metrik, ausserdem durch

$$L(\varphi) = \int_0^1 \|D\varphi(t)\|_{\varphi(t)} dt$$

eine Längenbegriff für jeden Weg $\varphi : [0, 1] \rightarrow G$. Der damit definierte Abstand

$$d_G(g_0, g_1) = \inf_{\varphi} L(\varphi), \quad (\text{wobei } \varphi \text{ ein Weg von } g_0 \text{ nach } g_1 \text{ ist})$$

auf jeder Zusammenhangskomponente von G ist linksinvariant. Die Rechtsmultiplikation ist Lipschitz-stetig für diese Metrik.

Damit können wir die Behauptungen über stabile und instabile Mannigfaltigkeiten beweisen.

Korollar 11.6 *Ein Punkt γ_1 ist in der stabilen Mannigfaltigkeit von γ_0 (d.h. $d(g_t(\gamma_0), g_t(\gamma_1)) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$) genau dann, wenn $\gamma_1 \in \gamma_0 U^-$. Ein Punkt γ_1 ist in der instabilen Mannigfaltigkeit von γ_0 (d.h. $d(g_t(\gamma_0), g_t(\gamma_1)) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$) genau dann, wenn $\gamma_1 \in \gamma_0 U^+$.*

Beweis: Es ist nach der Definition des geodätischen Flusses und aufgrund der Linksinvarianz der Metrik

$$d(g_t(\gamma_0), g_t(\gamma_1)) = d(\gamma_0 a_t^{-1}, \gamma_1 a_t^{-1}) = d(I_2, a_t \gamma_0^{-1} \gamma_1 a_t^{-1}).$$

Sei $\gamma_0^{-1} \gamma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann ist

$$a_t \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} a_t^{-1} = \begin{pmatrix} a & b e^{-t} \\ c e^t & d \end{pmatrix}.$$

Falls der Abstand gegen Null geht, muss also $c = 0$ sein und damit $\gamma_0^{-1} \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U^-$. Ist umgekehrt $\gamma_0^{-1} \gamma_1$, so geht der Abstand offenbar gegen Null. Die zweite Aussage beweist man analog. \square

Wir beweisen nun Proposition 11.5. Dabei fällt auf, dass die Formel (11.5) viel einfacher aussieht als die entsprechende Formel für $T\mathbb{H}$. Dies liegt an der geschickter gewählten Trivialisierung des Tangentialbündels, die dafür sorgt, dass die Linkstranslation hier viel einfacher aussieht als die entsprechende Formel für die Trivialisierung $T\mathbb{H} = \mathbb{H} \times \mathbb{C}$ in (11.3).

Beweis von Proposition 11.5: Zunächst zeigen wir, dass \mathfrak{g} der Tangentialraum am neutralen Element I_d ist, d.h. dass für jeden differenzierbaren Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow G$ mit $\varphi(t) = I_d$ gilt, dass $\varphi'(t) \in \mathfrak{g}$. Dazu zeigt man, dass es eine Umgebung B von I_d gibt, sodass $\log(B)$ eine Umgebung von Null in \mathfrak{g} ist. Die Behauptung folgt dann aus der Beobachtung, dass die Ableitung des Logarithmus an der Einheitsmatrix gleich der Identität ist. Zur Konstruktion von B nehmen wir zunächst ein Komplement \mathfrak{h} von \mathfrak{g} in $\text{Mat}^{d \times d}(\mathbb{R})$ her. Die Abbildung

$$\psi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{h} \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{R}), \quad (u, v) \mapsto \exp(u) \exp(v)$$

ist in einer Umgebung C_1 vom Null invertierbar, da die Ableitung bei Null gleich der Identität ist. Sei $B_1 = \psi(C_1)$. Wir wollen zeigen, dass es eine Umgebung B von I_d gibt, sodass $\log(B \cap G) \subset \mathfrak{g}$ ist. Angenommen, dies ist falsch. Dann gibt es eine Folge $v_n \in (\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}) \setminus \{0\}$ mit $v_n \rightarrow 0$, sodass $\exp(v_n) \in G$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass $v_n/||v_n|| \rightarrow v$ konvergiert, da die Einheitskugel in einem endlichdimensionalen Vektorraum kompakt ist. Es ist $\exp(tv) \in G$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn zu jedem solchen t gibt es eine Folge $m_n \in \mathbb{Z}$ mit $m_n ||v_n|| \rightarrow t$ und dann ist

$$\exp(tv) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(m_n ||v_n|| \frac{v_n}{||v_n||}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\exp(v_n))^{m_n} \in G$$

aufgrund der Abgeschlossenheit. Das aber widerspricht der Definition von \mathfrak{g} als maximalem linearen Unterraum mit Exponentialbild in G .

Nun können wir TG mit $G \times \mathfrak{g}$ identifizieren, indem wir für jeden differenzierbaren Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow G$ den Tangentialvektor $D\varphi(t_0)$ mit

$$D\varphi(t_0) = (\varphi(t_0), \varphi(t_0)^{-1} \varphi'(t_0))$$

identifizieren. Dazu ist zunächst zu zeigen, dass das zweite Argument tatsächlich in \mathfrak{g} liegt. Der Weg $\eta(t) = \varphi(t_0)^{-1} \varphi(t)$ hat auch Werte in G und $\eta(t_0) = I_d$. Also ist nach dem ersten Schritt $\eta'(t_0) = \varphi(t_0)^{-1} \varphi'(t_0) \in \mathfrak{g}$.

Mit dieser Identifikation ist

$$D(g\varphi)(t_0) = (g\varphi(t_0), (g\varphi(t_0))^{-1} g\varphi'(t_0)) = (g\varphi(t_0), \varphi(t_0)^{-1} \varphi'(t_0))$$

und

$$\begin{aligned} D(\varphi g^{-1})(t_0) &= (\varphi(t_0) g^{-1}, (\varphi(t_0) g^{-1})^{-1} \varphi'(t_0) g^{-1}) \\ &= (\varphi(t_0) g^{-1}, \varphi(t_0)^{-1} g \varphi'(t_0) g^{-1}) \end{aligned}$$

woraus die Behauptungen über Links- und Rechtstranslation folgen.

Es ist klar, dass d_G in der Tat eine Metrik definiert. Aufgrund der Eigenschaften der Rechtstranslation ist $L(\varphi g) \leq L(\varphi)\|Ad(g)\|$, wobei

$$Ad(g)(v) = gvg^{-1}$$

die adjungierte Darstellung von G ist. Daraus folgt die Lipschitzstetigkeit der Rechtstranslation. \square

Als Übung überzeuge man sich davon, dass die Topologie auf G induziert von d_G und die Spurtopologie von $\text{Mat}^{d \times d}$ übereinstimmen. Dazu zeigt man, dass jedes $g \in G$ eine Umgebung besitzt, sodass d_G und die Metrik zu einem Skalarprodukt auf $\text{Mat}^{d \times d}$ zueinander Lipschitz-äquivalent sind.

11.3 Gitter und die hyperbolische Volumenform

Eine *Fuchssche Gruppe* ist eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Ist Γ eine Fuchssche Gruppe, so definieren wir auf dem Quotientenraum $X = \Gamma \backslash G$ eine Metrik durch

$$d_X(\Gamma g_1, \Gamma g_2) = \inf_{\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma} d_G(\gamma_1 g_1, \gamma_2 g_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d_G(g_1, \gamma g_2).$$

Die zweite Gleichheit folgt dabei aus der Linksinvarianz der Metrik auf G . Die Dreiecksungleichung folgt aus der von G unter Verwendung des mittleren Ausdrucks. Wir beobachten, dass eine Fuchssche Gruppe Γ stets uniform diskret ist, d.h. es gibt ein $C > 0$, sodass $d_G(\gamma_1, \gamma_2) > C$ für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. (Ein Widerspruchsbeweis und die Linksinvarianz der Metrik zeigt dies.) Aufgrund der Lipschitzstetigkeit der Rechtsmultiplikation ist auch Γg_2 uniform diskret und damit $\inf_{\gamma \in \Gamma} d_G(g_1, \gamma g_2) > 0$, es sei denn $g_1 = \gamma g_2$ für eine $\gamma \in \Gamma$. Dies zeigt die Definitheit der Metrik auf X .

Wir haben nun Metriken auf \mathbb{H} und $T^1\mathbb{H}$ definiert. Für alle dynamischen Anwendungen benötigen wir noch ein Maß (oder eine Volumenform) auf \mathbb{H} und $T^1\mathbb{H}$. Dieses sollte linksinvariant sein, damit es zu einem Maß auf X absteigt. Falls die Gruppe X so groß ist, dass das Maß endlich ist, können wir mit der Untersuchung der Eigenschaften Ergodizität, Mischen, etc. starten. Wir parametrisieren dazu einen Punkt $(v, u) \in T^1\mathbb{H}$ mit $u = e^{i\theta}$.

Lemma 11.7 Die Volumenform $dA = \frac{1}{y^2} dx dy$ auf \mathbb{H} und die Volumenform $dm = \frac{1}{y^2} dx dy d\theta$ auf $T^1\mathbb{H}$ sind beide invariant unter der Linksaktion von $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis: Wir haben bereits berechnet, dass die Ableitung von $z \mapsto z' = g(z)$ gleich $\frac{1}{(cz+d)^2}$ ist. Also gilt für jede stetige Funktion mit kompaktem Träger $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Schreibweise $z' = x' + y'i$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{H}} f \circ g dA &= \int_{\mathbb{H}} f(g(z)) \frac{1}{y(z)^2} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{H}} f(z') \frac{1}{(y')^2} dx' dy' = \int_{\mathbb{H}} f dA. \end{aligned} \tag{11.6}$$

Mit gleicher Rechnung folgt auch der Beweis für $T^1\mathbb{H}$, sobald wir nachgerechnet haben, dass die Jacobi-Determinante der Ableitung auch in diesem Fall gleich $\frac{1}{|cz+d|^2}$ ist. Im Koordinatensystem (x, y, θ) hat die Ableitung die Blockgestalt

$$\begin{pmatrix} Dg & 0 \\ * & a \end{pmatrix},$$

da die Linksmultiplikation auf $T^1\mathbb{H}$ die Linksmultiplikation auf \mathbb{H} fortsetzt und letztere nicht von θ abhängt. Eine invertierbare holomorphe Selbstabbildung von \mathbb{C} , die den Einheitskreis auf sich abbildet ist eine Drehung. Also ist $|a| = 1$ und daraus folgen alle Behauptungen. \square

Definition 11.8 Ein (striker) Fundamentalbereich \mathcal{F} für eine Fuchssche Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist eine Teilmenge von \mathbb{H} , sodass $|\mathcal{F} \cap \Gamma g| = 1$ für alle $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist.

In analoger Weise definiert man auch einen Fundamentalbereich in $T^1\mathbb{H}$, aber diese sind aufwendiger anzugeben und werden seltener benötigt. Für alle Volumenfragen genügt es einen Fundamentalbereich in \mathbb{H} zu betrachten, da das Volumen von S^1 (einer Faser der Abbildung $T^1\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$) endlich ist.

Für alle Volumenfragen ist es äquivalent und einfacher mit dem folgenden Begriff zu arbeiten. Ein *abgeschlossener Fundamentalbereich* ist für eine Fuchssche Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Teilmenge \mathcal{F} von \mathbb{H} , sodass das Volumen $A(\mathcal{F} \cap \gamma\mathcal{F}) = 0$ für alle $\mathrm{id} \neq \gamma \in \Gamma$ und sodass $\mathbb{H} = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\mathcal{F}$.

Definition 11.9 Ein Gitter ist eine Fuchssche Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, sodass ein Fundamentalbereich \mathcal{F} für Γ endliches Volumen hat. Es ist *uniform* oder *kokompakt*, falls $\Gamma \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ kompakt ist.

Diese Definition wirft eine Wohldefiniertheitsfrage auf, die wir in der folgenden Proposition mitbeantworten. Man beachte, dass dm ein linksinvariantes Maß auf $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ und offenbar ein Haar-Maß ist.

Proposition 11.10 Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $GL_d(\mathbb{R})$ und Γ eine diskrete Untergruppe von G , sodass ein Fundamentalbereich \mathcal{F} für Γ endliches Volumen für ein Haar-Maß m_G hat. Dann hat jeder Fundamentalbereich das Volumen von \mathcal{F} , die Gruppe G ist unimodular und durch

$$m_X(B) = m_G(\pi^{-1}(B) \cap \mathcal{F})$$

wird ein endliches Maß auf $X = \Gamma \backslash G$ definiert. Die Rechtsoperation von G auf X lässt m_X invariant.

Beweis: Wir zeigen, dass für zwei messbare Mengen $B, B' \subset G$ sodass die Einschränkung von $\pi : G \rightarrow X \backslash G$ auf B und B' injektiv ist und $\pi(B) = \pi(B')$

gilt, notwendigerweise $m_G(B) = m_G(B')$ folgt. Aus den Voraussetzungen folgt, dass

$$B = \cup_{\gamma \in \Gamma} B \cap \gamma B' \quad \text{und} \quad B' = \cup_{\gamma' \in \Gamma} B' \cap \gamma' B$$

disjunkte Vereinigungen sind. Es gibt die offensichtlich Beziehung

$$\gamma^{-1}(B \cap \gamma B') = B' \cap \gamma^{-1} B$$

zwischen den Bausteinen dieser Zerlegung. Damit folgt $m_G(B) = m_G(B')$ aus der Linksinvarianz von m_G . Dies zeigt die Volumengleichheit von Fundamentalbereichen und die Wohldefiniiertheit von m_X .

Ist \mathcal{F} ein Fundamentalbereich und $g \in G$, so ist $\mathcal{F}' = \mathcal{F}g$ ein weiterer Fundamentalbereich. Nach Definition des modularen Charakters von G ist

$$m_G(\mathcal{F}) = m_G(\mathcal{F}') = \text{mod}(g)m_G(\mathcal{F}).$$

Da der Fundamentalbereich endliches Volumen hat, folgt hieraus $\text{mod}(g) = 1$, also dass G unimodular ist.

Für die letzte Aussage sei $B \subset X$ messbar und $C = \pi^{-1}(B) \cap \mathcal{F}$. Dann ist $Cg = \pi^{-1}(Bg) \cap \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}' = \mathcal{F}g$. Nach der Unimodularität folgt $m_G(C) = m_G(Cg)$ und damit die Behauptung. \square

Ein wichtiges Beispiel ist die modulare Gruppe $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Proposition 11.11 *Die Menge $\mathcal{F} = \{z \in \mathbb{H} : |z| \geq 1, |\text{Re}(z)| \leq \frac{1}{2}\}$ ist ein abgeschlossener Fundamentalbereich für $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$.*

Beweis: Wir zeigen, dass das Volumen von \mathcal{F} endlich ist. Für alle $z \in \mathcal{F}$ ist $\text{Im}(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Also ist

$$\begin{aligned} A(\mathcal{F}) &= \int_{\mathcal{F}} dA \leq \int_{\sqrt{3}/2}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{\sqrt{3}/2}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} < \infty. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft abgeschlossener Fundamentalbereich wird an vielen Stellen z.B. in [EW10, Proposition 9.18] bewiesen. \square

11.4 Die Ergodizität des geodätischen Flusses

Die Beweisidee des folgenden, zentralen Ergodizitätssatzes ist auch als Hopf-Argument bekannt.

Satz 11.12 *Sei $\Gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ ein Gitter. Dann ist jedes nichttriviale Element des geodätischen Flusses, d.h. jede Rechtsmultiplikation R_{a_t} für $t \neq 0$ ergodisch auf $X = \Gamma \backslash \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ bezüglich dem von dm auf $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ induzierten Maß m_X .*

Die grobe Idee ist, dass eine R_{a_t} -invariante Funktion f auch U^- -invariant sein muss, da zwei Punkte im gleichen U^- -orbit unter $R_{a_t}^n$ für große n einander beliebig nahe kommen. Ausserdem muss sie unter U^+ invariant sein, indem man $-n$ groß werden lässt. Da diese Gruppen $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ erzeugen, muss sie zusammen konstant sein. Technisch wird das Argument komplizierter als diese Skizze, da f nur messbar (bzw. stetig) vorausgesetzt werden kann, aber das Argument mit großem n eine Gleichmässigkeit benötigt.

Beweis: Wir normieren m_X um, sodass $m_X(X) = 1$ ist. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ unter R_{a_t} invariant und messbar. Sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann gibt es nach Lusins Satz ein Kompaktum $K \subset X$ sodass $m_X(K) > 1 - \varepsilon$ und sodass $f|_K$ stetig ist. Wir behaupten, dass

$$B = \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \chi_K(R_{a_t}^\ell x) > \frac{1}{2} \right\}$$

das Maß $m_X(B) \leq 1 - 2\varepsilon$ hat. Dazu betrachten wir

$$g^* = \lim_{N \rightarrow \infty} (A_N \chi_K)(x).$$

Dieser Limes existiert nach Birkhoffs Ergodensatz fast überall und $\int_X g^* dm_X = m_X(K) \geq 1 - \varepsilon$. Damit folgt

$$1 - \varepsilon \leq \int_B g^* dm_X + \int_{X \setminus B} g^* dm_X \leq m_X(B) + \frac{1}{2} m_X(X \setminus B) = \frac{1}{2} m_X(B) + \frac{1}{2},$$

und somit auch die Behauptung.

Seien nun x und y im gleichen Blatt der stabilen Mannigfaltigkeit, d.h. sei $y = R_{u^-(s)}x$ für $s \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f(x) = f(R_{a_t}^\ell(x)), \quad \text{und} \quad f(y) = f(R_{a_t}^\ell(y)) \quad (11.7)$$

für alle $\ell \geq 1$. Also geht der Abstand

$$\begin{aligned} d_X(R_{a_t}^\ell(x), R_{a_t}^\ell(y)) &= d_X(x a_t^{-\ell}, y a_t^{-\ell}) \\ &\leq d_{\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})}(I_2, a_t^{-\ell} u^-(-s) a_t^\ell) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $\ell \rightarrow \infty$. Nehmen wir an, dass x und y zudem beide in B liegen. Da die $R_{a_t}^\ell(x)$ und $R_{a_t}^\ell(y)$ jeweils zu mehr als der Hälfte der Zeit in K liegen, gibt es eine Teilfolge ℓ_j , sodass $R_{a_t}^{\ell_j}(x)$ und $R_{a_t}^{\ell_j}(y)$ gleichzeitig in K liegen. Auf K ist f aber gleichmässig stetig, sodass mit (11.7) das erste Ziel

$$f(x) = f(R_{u^-(s)}(x)) \quad \text{für} \quad x, R_{u^-(s)}(x) \in B. \quad (11.8)$$

Für ein $\varepsilon_1 < \varepsilon$ wählen wir nun $K \subset K_1$ mit $m_X(K_1) > 1 - \varepsilon_1$ und sodass $f|_{K_1}$ stetig ist. Wir definieren B_1 wie B , aber mit χ_{K_1} und so ist offenbar $B_1 \supseteq B$. Damit erreichen wir nun (11.8) mit B_1 statt B . Im Limes erhalten wir als die Folgerung $f(x) = f(R_{u^-(s)}(x))$ zunächst bei gegebenem x für fast jedes und

mit Fubini für alle Paare $(x, y) \in (X')^2$ mit $y = R_{u^-(s)}(x)$ in einer Menge $X' \subseteq X$ mit $\mu(X') = 1$.

Das gleiche Argument für negative Exponenten liefert $f(x) = f(R_{u^+(s)}(x))$ auf einer Teilmenge X'' von vollem Maß und auf $X_1 = X' \cap X''$ gelten dann beide Eigenschaften.

Wir verwenden nun, dass $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ von Worten endlicher Länge in U^+ und U^- erzeugt ist. Genauer gesagt, lässt sich jedes $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ schreiben als

$$g = u^+(s_4)u^-(s_3)u^+(s_2)u^-(s_1).$$

Also hat die Menge

$$\begin{aligned} X_g &= X_1 \cap R_{u^-(s_1)}^{-1}(X_1) \cap R_{u^+(s_3)u^-(s_1)}^{-1}(X_1) \\ &\quad \cap R_{u^-(s_3)u^+(s_2)u^-(s_1)}^{-1}(X_1) \cap R_g^{-1}(X_1) \end{aligned}$$

volles m_X -Maß und es gilt $f(x) = f(R_g(x))$ für alle $g \in X_g$.

Angenommen f ist nicht konstant. Also gibt es zwei disjunkte Intervalle I_1 und I_2 in \mathbb{R} , sodass beide Mengen

$$C_j = \{h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) : f(\Gamma h) \in I_j\} \quad j = 1, 2$$

weder Maß Null noch Eins (bzgl. dm) haben. Nach Lemma 9.11 gibt es also ein Element g mit

$$m(C_1 \cap C_2 g) > 0.$$

Andererseits hat aufgrund der Eigenschaften von X das Komplement von $D_g = \{h \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) : \Gamma h \in X_g\}$ das Maß Null, sodass es ein Element

$$h \in C_1 \cap C_2 g \cap D_g$$

geben muss. Das ist aber offenbar ein Widerspruch zur Definition der Mengen C_j und D_g . \square

11.5 Die Ergodizität der Gauss-Abbildung II: Flüsse mit Dachfunktion und geometrische Codierungen

Wir hatten in Abschnitt über Kettenbrüche in Satz 4.8 auf knapp 2 Seiten die Ergodizität der Gauss-Abbildung beweisen. Wir geben hier noch einen Beweis, der auf der Ergodizität des geodätischen Flusses beruht und damit (zusammen mit dem Hopf-Argument im vorigen Unterabschnitt) wesentlich länger ist. Rechtfertigung hierfür ist ein allgemeines Prinzip einzuführen, mit dem man von einer geometrischen Ergodizitätsaussage (in reeller Zeit) zu einer zahlentheoretischen Ergodizitätsaussage (in diskreter Zeit) kommt: Das Prinzip einer geometrischen Codierung.

Zuvor eine allgemeine Konstruktion.

Lemma 11.13 Sei T eine invertierbare, maßerhaltenden Selbstabbildung eines Wahrscheinlichkeitsraums (Y, \mathcal{C}, μ) und $r : Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine messbare Funktion. Wir definieren

$$X_r = \{(y, s) : y \in Y, 0 \leq s \leq r(y)\}.$$

Dann ist

$$T_t(y, s) = \begin{cases} (y, s + t) & \text{falls } 0 \leq s + t < r(y) \\ (Ty, s + t - r(y)) & \text{falls } 0 \leq s + t - r(y) < r(T(y)) \\ (T^2y, s + t - r(y) - r(T(y))) & \text{falls } 0 \leq s + t - r(y) - r(T(y)) < r(T^2(y)) \\ \dots & \dots \end{cases}$$

ein Fluss, d.h. ein Halbgruppenhomomorphismus $\mathbb{R}^+ \rightarrow \text{MET}(X_r, m_r)$ und das Maß m_r , gegeben durch die Einschränkung von $\mu \times m_{\mathbb{R}}$ auf X_r , ist invariant unter dem Fluss.

Die Abbildung T_t wird auch der Fluß über T mit Dachfunktion r genannt.

Beweis: Wir interpretieren X_r als Fundamentalgebiet für die Aktion der von

$$\tilde{T}(y, s) = (Ty, s - r(y))$$

erzeugten Gruppe. (Die Inverse ist $\tilde{T}^{-1}(y, s) = (T^{-1}y, s + r(T^{-1}y))$.) D.h. es ist offenbar $\tilde{T}^n X_r \cap X_r = \emptyset$ falls $n \neq 0$ ist. Ausserdem behaupten wir, dass es zu $\mu \times m_{\mathbb{R}}$ -fast jedem $x = (y, s)$ genau ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\tilde{T}^n x \in X_r$. Nehmen wir dazu vereinfachend an, dass r nach unten beschränkt ist. Dann ist die Folge $\sum_{n=0}^N r(T^n y)$ monoton wachsend und divergent. Ist also $s > 0$, so gibt es genau ein N mit

$$s - \sum_{n=0}^N r(T^n y) < 0 \quad \text{und} \quad s - \sum_{n=0}^{N-1} r(T^n y) \geq 0.$$

Dann ist $\tilde{T}^N(y, s) \in X_r$. Den Fall $s < 0$ behandelt man analog. Ist r nicht nach unten beschränkt vorausgesetzt, muss man genauer argumentieren, siehe [EW10, Lemma 9.23].

Da offenbar T_t und \tilde{T} beide das Maß $\nu \times m_{\mathbb{R}}$ auf $Y \times \mathbb{R}$ erhalten, wird offenbar die Einschränkung davon auf X_r von T_t bewahrt. \square

Lemma 11.14 In der Situation des vorigen Lemma ist m_r endlich genau dann wenn r integrierbar ist und in diesem Fall ist T ergodisch genau dann wenn der Fluß T_t ergodisch ist.

Beweis: Die erste Aussage rechnet man direkt nach, denn

$$m_r(X_r) = \int_{X_r} dm_r = \int_Y r(y) d\mu(y).$$

Angenommen T ist ergodisch und f auf X_r beschränkt und T_t -fast-invariant. Wie in Proposition 9.10 kann man durch Modifikation von f auf einer Nullmenge annehmen, dass f sogar T_t -invariant ist (indem man dies zunächst auf einer dichten Untergruppe, hier \mathbb{Q} erreicht und danach mit Fubini bzgl. dem Haar-Maß auf \mathbb{R} argumentiert). Also ist $g(y) = f(y, 0)$ eine T -invariante Funktion auf Y , fast-überall konstant nach Voraussetzung und damit ist auch f fast überall konstant.

Sei umgekehrt T_t ergodisch und f auf Y invariant unter T . Dann definieren wir $g(y, s) = f(y)$ und diese Funktion g ist offenbar T_t -invariant und damit fast überall konstant. Daraus folgt offenbar die Behauptung. \square

Wir arbeiten nun auf $X = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ und wie oben ist $\pi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow X$ die Projektion. Wir basteln nun eine Teilmenge C von $T^1\mathbb{H}$ sodass das nächste Mal, dass eine Geodäte ausgehend von C wieder auf C trifft, durch die Gaussabbildung in geeigneten Koordinaten gegeben ist.

Wir betrachten nur Geodäten ausgehend von $(x, v) \in T^1\mathbb{H}$, die durch Kreise mit Mittelpunkte auf \mathbb{R} gegeben sind, also mit $v \notin \mathbb{R}i$. Ist $x = ib \in i\mathbb{R}$, so bezeichnen wir die Endpunkte der Geodäten (in $\mathbb{R} \subset \partial\mathbb{H}$) mit $-\tilde{y}$ (links) und y (rechts), falls $\mathrm{Re}(v) > 0$ und mit $-y$ (links) und \tilde{y} (rechts), falls $\mathrm{Re}(v) < 0$, sodass in beiden Fällen y und \tilde{y} positiv sind und das Symbol ohne Tilde die Zukunft der Geodäten beschreibt. Sei

$$C_+ = \{(ib, v) : \mathrm{Re}(v) > 0, \mathrm{Im}(v) < 0, y \in [0, 1), \tilde{y} \geq 1\}$$

und

$$C_- = \{(ib, v) : \mathrm{Re}(v) < 0, \mathrm{Im}(v) < 0, y \in [0, 1), \tilde{y} \geq 1\},$$

sowie schließlich $C = C_+ \cup C_-$. Der Punkt (ib, v) ist durch die Endpunkte der Geodäten und damit auch durch y und den reziproken Durchmesser des Kreises $z = 1/(y + \tilde{y})$ eindeutig bestimmt. Wir nennen (y, z) die natürlichen Koordinaten von C .

Lemma 11.15 *Falls ein Punkt in C_+ die natürlichen Koordinaten (y, z) hat und die zugehörige Geodäte die Menge $\pi(C)$ trifft, so geschieht das in $\pi(C_-)$ und der zugehörige Punkte hat die natürlichen Koordinaten*

$$\tilde{T}(y, z) = \left(\left\{ \frac{1}{y} \right\}, y(1 - yz) \right).$$

Die gleiche Aussage gilt, wenn man die Rollen von C_+ und C_- vertauscht.

Beweis: Sei $\sigma(z) = -\frac{1}{z}$ die Spiegelung am Einheitskreis. Eine Geodäte in \mathbb{H} , die an einem Punkt von C_+ startet verläuft (nach Definition von C_+) ab einem gewissen Zeitpunkt im Einheitskreis und hat zuvor keinen Punkte in $\pi(C_-)$ getroffen. Wir können also am Einheitskreis spiegeln und erkennen, wann die gespiegelte Geodäte $\pi(C_-)$ trifft. Diese ist nun nach links orientiert und

hat Endpunkte $1/\tilde{y}$ und $-1/y$ (in positiver Zeit). Die Geodäte trifft $\pi(C_-)$ im Punkte $(x, v) \in T^1\mathbb{H}$ höchstens dann, wenn $\operatorname{Re}(x) = -n$ eine negative ganze Zahl ist. Damit sie auch die weiteren Bedingungen von $\pi(C_-)$ erfüllt, muss $-\frac{1}{y} + n \in (-1, 0]$ sein. Dann ist das neue y gleich $\{\frac{1}{y}\}$ und der neue reziproke Radius gleich

$$\frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{y}} = y(1 - yz), .$$

Die letzte Aussage des Lemmas folgt, indem man das Argument an der imaginären Achse spiegelt. \square

Um die Gaussabbildung mit Flüssen unter einer Dachfunktion in Verbindung zu bringen, benötigen wir noch die Funktion r . Für $x \in \pi(C)$ sei

$$r_C(x) = \min \{t : t > 0, R_{at}x \in \pi(C)\}$$

die *Rückkehrzeit* auf die Menge C . Das genaue Ausrechnen von r_C ist unangenehm kompliziert, da man die hyperbolische Länge zwischen Schnittpunkten der Geodäten mit $\pi(C)$ bestimmen muss. Offensichtliche Eigenschaften von r_C sind jedoch, dass die Funktion r_C differenzierbar auf den Teilmengen von C ist, auf denen sich die ganze Zahl n im vorigen Beweis nicht ändert, also auf den Mengen $\frac{1}{n+1} < y < \frac{1}{n}$. Offensichtlich ist auch, dass r_C nach unten beschränkt und nach oben unbeschränkt ist. Im folgenden Satz werden wir mitbeweisen, dass r_C integrierbar ist.

Satz 11.16 *Die Gauß-Abbildung ist ergodisch bzgl. $d\mu = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1+x} dx$. Genauer gilt: Sei $\hat{T} : C \rightarrow C$ die Transformation, die $x \in C$ auf den ersten Rückkehrpunkt abbildet. Der Fluss über $\hat{T} : C \rightarrow C$ mit Dachfunktion r_C ist zum geodätischen Fluss auf $X = \operatorname{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ konjugiert.*

Beweis: Sei $Ty = \{\frac{1}{y}\}$ die Gauß-Abbildung und wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{T}(y, z) = \left(Ty, y(1 - yz) \right)$$

auf der Menge

$$\tilde{Y} = \left\{ (y, z) \in [0, 1)^2 : 0 \leq z \leq \frac{1}{1+y} \right\} .$$

Die Abbildung \tilde{T} bewahrt das Lebesgue-Maß, denn die Jacobi-Matrix ist $\begin{pmatrix} -1/y^2 & 0 \\ 1-2zy & -y^2 \end{pmatrix}$. Das Bildmaß des normierten Lebesgue-Maßes unter der Projektion $(y, z) \rightarrow y$ ist $d\mu$. Man kann zeigen, dass man aus \tilde{Y} eine Menge vom Maß Null entfernen kann und \tilde{T} auf dem Komplement bijektiv ist ([EW10, Proposition 3.15]). Mit dem gleichen Argument wie in Lemma 11.14 genügt es zu zeigen, dass \tilde{T} auf \tilde{Y} ergodisch ist, um die Behauptung über die Gauss-Abbildung zu zeigen.

Um den zwei Teilmengen in der Definition von C Rechnung zu tragen führen wir noch $\widehat{Y} = \widetilde{Y} \times \{\pm 1\}$ ein und wir definieren

$$\widehat{T} : \widehat{Y} \rightarrow \widehat{Y}, \quad (y, z, \varepsilon) \mapsto (\widetilde{T}(y, z), -\varepsilon).$$

Für die Behauptung über die Gauss-Abbildung genügt es, die Ergodizität von \widehat{T} zu zeigen, wobei wir auf $\{\pm 1\}$ das Maß gleichverteilt wählen.

Die zentrale Behauptung ist, dass man den Fluss auf \widehat{Y} unter der Dachfunktion r_C wie folgt als den geodätischen Fluss auf X auffassen kann. Sei dazu

$$\phi : X_{r_C} \rightarrow X, \quad \phi(y, z, \varepsilon, s) = R_{a_s}(y, z, \varepsilon).$$

Zunächst ist ϕ injektiv, denn aus

$$\phi(y_1, z_1, \varepsilon_1, s_1) = x = \phi(y_2, z_2, \varepsilon_2, s_2)$$

folgt, dass $s_1 = \min\{s : R_{a_s}(x) \in C\} = s_2$ nach Definition des Begriffs der ersten Rückkehrzeit. Dann aber sind $(y_1, z_1, \varepsilon_1) = (y_2, z_2, \varepsilon_2)$ die natürlichen Koordinaten von $R_{a_{s_1}}(x)$. Weiterhin ist das Komplement des Bildes von ϕ in X eine Nullmenge, denn fast jede Geodäte trifft C . Schließlich prüft man nach, dass

$$\phi(T_t(y, z, \varepsilon, s)) = R_{a_t}(\phi(y, z, \varepsilon, s)),$$

indem man eine Fallunterscheidung wie in Lemma 11.13 durchführt. Also ist ϕ äquivariant und fast bijektiv.

Es verbleibt die Behauptung, dass das Bildmaß $\phi_*(m_{r_C}) = cm_X$ ein konstantes Vielfaches des endlichen Maßes m_X ist. Damit wäre m_{r_C} endlich (was im Moment noch nicht gezeigt ist) und r_C auch integrierbar und die Ergodizität der Gauß-Abbildung folgt aus Satz 11.12.

Für die verbleibende Behauptung verwenden wir, dass bei einer injektiven differenzierbaren Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit nirgends verschwindender Jacobi-Determinante J_ψ das Bildmaß eines gegen Lebesgue absolut stetigen Maßes $d\mu = f dm_{\mathbb{R}^n}$ durch $(f \circ \psi^{-1})(J_\psi^{-1} \circ \psi^{-1}) dm_{\psi(U)}$ gegeben ist (siehe z.B. [EW10, Lemma A.26]). Diese Aussage wenden wir hier auf ϕ an und rechnen das Nichtverschwinden der Jacobi-Determinante auf C_+ nach (und auf C_- geht alles analog). Zunächst betrachten wir die Abbildung, die den natürlichen Koordinaten $(x, y, +1)$ zunächst (y, \widetilde{y}) und dann $(b, \theta) \in \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, 0)$, sodass $(ib, \exp(i\theta)) \in C_+$ liegt, zuordnet. Deren Jacobideterminante verschwindet für $y > 0$ und $z > 0$ nicht. Als nächstes betrachten wir ϕ als Abbildung nach $T^1\mathbb{H}$ und nennen die Koordinaten eines Bildpunktes $(a + ib, \exp(i\theta))$. Dabei hängt a nicht von y und z sondern höchstens von s ab, und die s -Ableitung von a ist wirklich von Null verschieden, da die betrachteten Geodäten nicht vertikal sind. Damit reduziert sich das Nichtverschwinden der 3×3 Jacobi-Determinante auf die 2×2 Jacobi-Determinante, deren Nichtverschwinden wir soeben gezeigt haben.

Damit ist also $\phi_*(m_{r_C})$ absolutstetig gegen $da db d\theta$ und aufgrund von Lemma 11.7 auch absolutstetig gegen dm_X . Da $R_{a_t} \circ \phi = \phi \circ T_t$ folgt formal

$$(R_{a_t})_* \phi_* m_{r_C} = (R_{a_t} \phi)_* m_{r_C} = (\phi T_t)_* m_{r_C} = \phi_* m_{r_C}$$

und damit die R_{a_t} -Invarianz von $\phi_*(m_{r_C})$. Sei $F = \frac{\phi_*(m_{r_C})}{dm_X}$ die Radon-Nikodym-Ableitung. Da auch m_X unter R_{a_t} invariant ist, folgt

$$\int (f \circ R_{a_t}) F dm_X = \int f F dm_X = \int f (F \circ R_{a_t}) dm_X$$

für jedes messbare f , also $F = F \circ R_{a_t}$ fast überall und aufgrund der Ergodizität des geodätischen Flusses ist $F = c$ konstant. Die Endlichkeit von c ist direkte Konsequenz aus den Rechnungen mit der Jacobi-Determinante. \square

12 Matrixkoeffizienten: Die Sätze von Mautner und Howe-Moore

12.1 Ergodizität des geodätischen und horozyklischen Flusses

Im vorigen Kapitel haben wir die Ergodizität des geodätischen Flusses mit Hilfe des Hopf-Arguments bewiesen. Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis der Ergodizität des horozyklischen Flusses. Das Argument wird die Aussage für den geodätischen Fluß nochmal beweisen. Es gibt gute Gründe die zwei Beweise nebeneinander zu sehen: je nach Situation verallgemeinert sich der eine oder andere auf die höherdimensionale Situation.

Satz 12.1 Sei Γ ein Gitter in $SL_2(\mathbb{R})$ und $X = \Gamma \backslash SL_2(\mathbb{R})$. Sei $g \in SL_2(\mathbb{R})$ ein Element, welches nicht zu einem Element in $SO_2(\mathbb{R})$ konjugiert ist. Dann ist die Rechtsmultiplikation R_g auf (X, \mathcal{B}, m_X) ergodisch.

Wir erinnern daran, dass jedes Element in $SL_2(\mathbb{R})$ entweder *hyperbolisch* ist (und zu einer Diagonalmatrix mit Eigenwerten λ und $1/\lambda$ konjugiert ist) oder *parabolisch* ist (und zu einer Dreieckmatrix mit Einsen auf der Diagonale konjugiert ist) oder *elliptisch* ist (und zu einer Drehmatrix in $SO_2(\mathbb{R})$ konjugiert ist). Der Beweis hiervon ist unmittelbare Konsequenz der Jordan-Normalform.

Zum Beweis kommen wir (nochmal) auf den Begriff einer unitären Darstellung zurück.

Definition 12.2 Sei G eine metrisierbare Gruppe und \mathcal{H} ein Hilbertraum. Eine Aktion $G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ von G auf \mathcal{H} ist eine unitäre Darstellung falls für jedes g auf \mathcal{H} unitär operiert und für jedes $v \in \mathcal{H}$ die Abbildung $g \mapsto g(v)$ stetig ist.

Der Begriff ist auf die folgende Situation modelliert. Die Aussage folgt unmittelbar aus Lemma 9.12.

Lemma 12.3 Ist (X, \mathcal{B}, μ) ein lokal-kompakter metrischer Maßraum mit einem endlichen Maß μ . Falls eine metrisierbare Gruppe G stetig und maßerhaltend auf X operiert, so ist die Aktion von G auf $L^2_\mu(X)$ definiert durch $(g, f) \mapsto f \circ g^{-1}$ eine unitäre Darstellung.

Die wesentliche Idee des Ergodizitätsbeweises steckt in der folgenden Proposition. Sei B_δ^G die Kugel vom Radius δ um das neutrale Element in G (bzgl. der linksinvarianten Metrik d_G) und $B_\delta^G(h) = hB_\delta^G$ die Kugel um h .

Proposition 12.4 Ist \mathcal{H} eine unitäre Darstellung von G und v_0 ein Element, das von einer Untergruppe $L \subset G$ fixiert wird. Dann wird v_0 auch von jedem Element $h \in G$ fixiert, welches die Eigenschaft

$$B_\delta^G(h) \cap LB_\delta^G L \neq \emptyset$$

für alle $\delta > 0$ hat.

Dieses Argument kann man insbesondere auf die stabile horospherische Gruppe von $g \in G$

$$U_g^- = \{h \in G : g^n h g^{-n} \rightarrow I, \text{ für } n \rightarrow \infty\}$$

und auf die instabile horospherische Gruppe von $g \in G$

$$U_g^+ = \{h \in G : g^n h g^{-n} \rightarrow I, \text{ für } n \rightarrow -\infty\}$$

anwenden, d.h. für $L = g^{\mathbb{Z}}$ erfüllt jedes $h \in U_g^-$ und jedes $h \in U_g^+$ die Bedingung von Proposition 12.4

Der Begriff der (in)stabilen horospherische Gruppe passt zur bisherigen Definition von stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit, denn für $g = a_t$ mit $t \neq 1$ ist $U_g^- = U^-$ und $U_g^+ = U^+$.

Als Folge dieser Überlegungen erhalten wir folgenden Zwischenschritt in Richtung des Beweises von Satz 12.1.

Korollar 12.5 Sei $\Gamma \subset G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein Gitter und $X = \Gamma \backslash G$. Hat $g \in G$ die Eigenschaft, dass G von U_g^+ und U_g^- erzeugt ist, so ist R_g ergodisch bzgl. des Haar-Maßes m_X auf X .

Beweis von Proposition 12.4: Wir können v_0 skalieren, sodass $\|v_0\| = 1$ ist. Wir definieren für $h \in G$ die Hilfsfunktion

$$p(h) = \langle h(v_0), v_0 \rangle \tag{12.1}$$

(Jedes Element von H kann anstelle von v_0 verwendet werden, um eine solche Hilfsfunktion zu definieren. Diese Hilfsfunktionen werden *Matrixkoeffizienten* genannt.) Aufgrund der Stetigkeitsvoraussetzung in der Definition einer unitären Darstellung hängt p stetig von h ab. Der Matrixkoeffizient p ist L -biinvariant, d.h. für $g_1, g_2 \in L$ und $h \in G$ gilt

$$p(g_1 h g_2) = \langle g_1 h(g_2(v_0)), v_0 \rangle = \langle h(v_0), g_1^{-1}(v_0) \rangle = p(h).$$

Da die Darstellung unitär ist, folgt $\|h(v_0)\| = 1$. Daher impliziert $p(h) = 1$, dass $h(v_0) = v_0$, denn dies ist der Gleichheitsfall der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Für ein h , das die Voraussetzung der Proposition erfüllt, wählen wir eine Folge g_n , die gegen das neutrale Element $e \in G$ konvergiert und die zugehörigen Elemente $\ell_n \in L$ und $\ell'_n \in L$ die uns die Voraussetzung liefert, sodass $\ell_n g_n \ell'_n \rightarrow h$ für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Dann konvergiert einerseits

$$p(\ell_n g_n \ell'_n) = p(g_n) \rightarrow p(e) = \|v_0\|^2 = 1$$

und andererseits konvergiert für $n \rightarrow \infty$

$$p(\ell_n g_n \ell'_n) \rightarrow p(h)$$

sodass insgesamt aufgrund der Stetigkeit $p(h) = 1$ und damit die Behauptung $h(v_0) = v_0$ folgt. \square

Beweis von Satz 12.1: Ein Gitter wird durch Konjugation mit einem festen Element von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ wieder in ein Gitter übergeführt. Nach der Diskussion der Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ genügt es also die Fälle $g = a_t$ und $g = u_s^-$ zu betrachten. Der Fall $g = a_t$ wird von Korollar 12.5 abgedeckt. (Im zweiten Fall ist dieses Korollar nutzlos, denn beide horosphärischen Gruppen sind in diesem Fall trivial.)

Angenommen im Fall $g = u_s^-$ (mit $s \neq 0$ fixiert) sie $f \in L^2_{m_X}(X)$ invariant unter g . Wir wenden Proposition 12.4 direkt an.

$$\begin{aligned} h_\varepsilon &= g^n u_\varepsilon^+ g^m = \begin{pmatrix} 1 & ns \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & ms \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + ns\varepsilon & (1 + ns\varepsilon)ms + ns \\ \varepsilon & 1 + ms\varepsilon \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.2)$$

Sei ε klein genug, welches wir später gegen Null laufen lassen. Dann kann man $n = n(\varepsilon)$ gerade und außerdem so wählen, dass $1 + ns\varepsilon$ nahe bei 2 ist, genauer gesagt, sodass $|(1 + ns\varepsilon) - 2| < s\varepsilon$ gilt. Nun wählen wir $m = -n/2$, sodass

$$|(1 + ns\varepsilon)ms + ns| \leq s\varepsilon|n|s/2 \leq (1 + s\varepsilon)s/2 \leq s$$

für ε klein genug. In einer Folge für $\varepsilon \rightarrow 0$ sind also alle Matrixeinträge von h_ε außer dem rechts unten a priori beschränkt und wir wählen eine Teilfolge, sodass der Eintrag links oben gegen zwei und der rechts oben gegen ein r mit $|r| < s$ konvergiert. Dann konvergiert der Eintrag rechts unten notwendigerweise gegen $1/2$. Also kann man für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ wählen, sodass

$$h_\varepsilon \in B_\delta^G(h) \cap g^\mathbb{Z} B_\delta^G g^\mathbb{Z}, \quad h = \begin{pmatrix} 2 & r \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

liegt. Also ist nach Proposition 12.4 die Funktion f auch invariant unter h . Da h hyperbolisch ist, folgt die Behauptung aus der bereits bewiesenen Ergodizität des geodätischen Flusses (oder aus Korollar 12.5). \square

Als *Mautner-Phenomän* ist eine Verallgemeinerung des Prinzips bekannt, das hinter dem Beweis von Proposition 12.4 und Satz 12.1 steckt. Ist \mathcal{H} eine unitäre Darstellung einer Lie-Gruppe G und wird v_0 von einem Element h festgehalten, so wird v_0 auch noch von einer grösseren Gruppe festgehalten. Um diese allgemein zu definieren, müssten wir in die Theorie von Lie-Gruppen einsteigen. Wir beschränken uns hier auf die Bemerkung, dass für $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und h eine Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Einträgen (o.E. absteigend geordnet) die entsprechende Gruppe aus oberen (und für h^{-1} aus unteren) Dreiecksmatrizen besteht. Wie in diesem Fall erzeugen diese Untergruppen in vielen Fällen G , sodass wir wie oben Invarianz unter der ganzen Gruppe folgern können. Der allgemeine Fall steht in [Moo80]

12.2 Mischen

Wir haben gesehen, dass die Aktion des geodätischen Flusses und des horozyklischen Flusses auf $X = \Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ergodisch ist. Diese Aktionen sind noch 'chaotischer' in folgendem Sinn.

Satz 12.6 *Sei Γ ein Gitter in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dann ist die Rechtsoperation von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $X = \Gamma \backslash G$ mischend.*

Genauer ist diese (Rechts)operation sogar mischend von allen Ordnungen, aber dieses feinere Resultat werden wir hier nicht beweisen.

Hilfswise für den Beweis definieren wir für eine Folge $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (typischerweise wird später $a_n = a_{t_n}$ eine wachsende Folge von Diagonalelementen sein) die Menge

$$S(\alpha) = \{g \in G : e \in \overline{\{a_n^{-1}ga_n, n \in \mathbb{N}\}}\}.$$

Die nächsten zwei Hilfsaussagen beschreiben, wann Elemente einer unitären Darstellung unter $S(\alpha)$ (und damit unter dem Abschluss der davon erzeugten Untergruppe) festgelassen werden bzw. wie man Elemente in $S(\alpha)$ findet.

Proposition 12.7 *Sei \mathcal{H} eine unitäre Darstellung einer lokalkompakten Gruppe G . Sei $\alpha = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $v \in \mathcal{H}$, sodass $a_n(v)$ in der schwach*-Topologie gegen $v_0 \in \mathcal{H}$ konvergiert. Dann ist für jedes $g \in S(\alpha)$ das Element v_0 invariant unter g .*

Beweis: Sei $g \in S(\alpha)$ und (n_k) die Teilfolge aus der Definition, d.h. sodass $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}^{-1}ga_{n_k} = e$. Nach Definition der schwach*-Konvergenz erhalten wir für alle $w \in \mathcal{H}$

$$\langle gv_0, w \rangle = \langle v_0, g^{-1}w \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle a_{n_k}v, g^{-1}w \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle ga_{n_k}v, w \rangle$$

und ebenso $\langle v_0, w \rangle = \langle a_{n_k} v, w \rangle$. Also haben wir insgesamt, aufgrund der Stetigkeit und da die Darstellung unitär ist,

$$\begin{aligned} |\langle gv_0, w \rangle - \langle v_0, w \rangle| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |\langle (a_{n_k}^{-1} g a_{n_k}) v, a_{n_k}^{-1} w \rangle - \langle v, a_{n_k}^{-1} w \rangle| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|(a_{n_k}^{-1} g a_{n_k}) v - v\| \|w\| = 0. \end{aligned}$$

Da $w \in \mathcal{H}$ beliebig war, zeigt dies die Behauptung. \square

Lemma 12.8 *Sei $\alpha = (a_n)$ eine Folge in G , die gegen ∞ konvergiert, d.h. in jedem Kompaktum K liegen nur endlich viele Folgenglieder. Dann enthält $S(\alpha)$ ein vom neutralen Element verschiedenes unipotentes Element.*

Beweis: In Abschnitt 11.2 hatten wir die adjungierte Darstellung $\text{Ad} : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})), g \mapsto g v g^{-1}$ bereits verwendet. Die Norm von $\text{Ad}(g)$ geht gegen ∞ , wenn die Norm von g nach ∞ geht, denn ?? . Es ist $\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ die direkte Summe aus den Diagonalmatrizen (auf denen Ad trivial operiert) und $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Nach Durchdividieren können wir also erreichen, dass es eine Folge v_n in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ gibt mit den Eigenschaften $\|v_n\| \rightarrow 0$ und $\|\text{Ad}_{g_n}(v_n)\| \rightarrow c > 0$. Dabei wählen wir c so klein, dass die Exponentialabbildung auf einem Kreis vom Radius $2c$ injektiv ist. Wir exponentieren also und erhalten $h_n = \exp(v_n) \rightarrow I_2$ und $g_n h_n g_n^{-1} \rightarrow u \neq I_2$. Die Eigenwerte von h_n konvergieren also gegen 1 und da Konjugation die Eigenwerte nicht ändert, müssen die Eigenwerte von u auch 1 sein. Also ist $u \in S(\alpha)$ ein nicht-triviales unipotentes Element. \square

Beweis von Satz 12.6: Sei (a_n) eine Folge in $\text{SL}_2(\mathbb{R})$, die gegen ∞ konvergiert und $f \in L^2(X)$. Für die Eigenschaft Mischen genügt es zu zeigen, dass $a_n(f)$ in der schwach*-Topologie auf $L^2(X)$ gegen $\int_X f dm_X$ konvergiert. Da die Operation von jedem a_n unitär ist, da also $\|a_n(f)\|_2 = \|f\|_2$ ist, hat also nach dem Satz von Banach-Alaoglu eine schwach*-konvergente Teilfolge (da die Einheitskugel schwach*-kompakt ist). Sei $\alpha = (a_{n_k})$ diese Teilfolge und f_0 der schwach*-Limes. Wir können nun Lemma 12.8 anwenden und folgern, dass $S(\alpha)$ ein nicht-triviales unipotentes Element enthält. Nach Proposition 12.7 ist f_0 invariant unter diesem unipotenten Element und aufgrund der Ergodizität (Satz 12.1) ist f_0 konstant. Notwendigerweise ist also $f_0 = \int_X f dm_X$, was zu zeigen war. \square

Die Grundidee der beiden Hilfssätze zusammengenommen ergibt folgenden Satz, den man sich als 'Matrixkoeffizienten verschwinden im Unendlichen' merken kann.

Satz 12.9 (Howe-Moore) *Der Hilbertraum \mathcal{H} sei eine unitäre Darstellung von $G = \text{SL}_2(\mathbb{R})$ ohne invariante Vektoren. Dann konvergiert*

$$\langle g_n v, w \rangle \rightarrow 0$$

für alle $v, w \in \mathcal{H}$ und jede Folge $g_n \rightarrow \infty$.

13 Bahnabschlüsse im unipotenten Fall

Im vorigen Abschnitt über die Ergodizität haben der geodätische Fluss und der horozyklische Fluss die gleiche Rolle gespielt. In diesem Abschnitt werden wir die Geometrie der Bahnen dieser beiden Flüsse genauer betrachten, d.h. die Frage nach Abschlüssen der Bahnen stellen. Dabei werden sich der geodätische Fluss und der horozyklische Fluss sehr unterschiedlich verhalten.

13.1 Motivation: Oppenheim-Vermutung

Eine (reelle) quadratische Form Q ist ein homogenes Polynom vom Grad zwei mit reellen Koeffizienten. Die Anzahl der Variablen sei n . Über \mathbb{R} lässt sich eine quadratische Form stets diagonalisieren und die Diagonaleinträge können als $+1, 0, -1$ gewählt werden. Die Anzahl der positiven und negativen Einträge ist unabhängig von der Basiswechsellmatrix und wird Signatur der quadratischen Form genannt. Eine quadratische Form ist *indefinit*, falls sowohl $+1$ als auch -1 in der Diagonalgestalt auftreten. Eine quadratische Form ist *nichtausgeartet*, falls 0 nicht als Diagonaleintrag auftritt, d.h. falls es kein $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $Q(v+x) = Q(v-x)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

Der Wertebereich von quadratischen Formen (Minima, Maxima, alle ganzzahligen Werte, Häufungspunkte, Dichtheit) tritt in unzähligen Problemen ganz unterschiedlicher Schwierigkeit auf. Der folgende Satz löst eine Vermutung von Oppenheim aus den 30er-Jahren und wurde in den 70er Jahren bewiesen.

Satz 13.1 (Margulis) *Sei Q eine reelle, indefinite, nicht-ausgeartete quadratische Form in drei oder mehr Variablen. Falls Q nicht skalares Vielfaches einer quadratischen Form mit ganzzahligen Koeffizienten ist, so ist $Q(\mathbb{Z}^n)$ dicht in \mathbb{R} .*

Jede einzelne der Voraussetzungen ist notwendig, um die Dichtheit schließen zu können.

Wir werden den Satz als Spezialfall eines stärkeren Strukturresultats beweisen. Wir geben den allgemeinen Fall an, der Leser ohne Kenntnisse über Lie-Gruppen denke an den Fall $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Satz 13.2 (Ratner) *Sei G eine Lie-Gruppe und Γ ein Gitter in G , sei H eine zusammenhängende Untergruppe, die von unipotenten Elementen erzeugt ist. Dann ist für jedes $x \in G$ der Abschluss der Bahn xH in $X = \Gamma \backslash G$ homogen, d.h. es gibt eine zusammenhängende Lie-Untergruppe L mit $H \subset L \subset G$, sodass $\overline{xH} = xL$ in X . Darüber hinaus hat L die Eigenschaft, dass $\Gamma \cap L$ ein Gitter in L ist.*

Dieser Satz beinhaltet den Spezialfall $X = \mathbb{Z}^n \backslash \mathbb{R}^n \cong (S^1)^n$ eines Torus der Dimension n . Zu jedem Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir den Fluss $T_t(x) = [x + tv] \in X$ für $t \in \mathbb{R}$. Für $n = 2$ haben wir im Zusammenhang mit irrationalen Rotationen bereits implizit nachgerechnet, dass die Bahn von T_t

abgeschlossen ist genau dann wenn $v_2/v_1 \in \mathbb{Q}$ ist, und dass andernfalls der Abschluss der Bahn gleich X ist. Um das Problem der linearen Flüsse auf dem Torus in den Kontext des Ratner-Satzes zu stecken, sei $G \subset \mathrm{SL}_{n+1}$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Diagonale, bei denen die Nebendiagonalelemente höchstens in der ersten Zeile von Null verschieden sind. Sei H die Untergruppe erzeugt von der Matrix, deren Nebendiagonalelemente in der ersten Zeile gleich (v_1, \dots, v_n) sind und $\Gamma = G \cap \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{Z})$. Die Bahnabschlüsse sind also nach dem Ratner-Satz von der Form $(\Gamma \cap L) \backslash L$ für $H \subset L \subset G$. Die Gruppen L mit dieser Eigenschaft sind alle isomorph zu \mathbb{R}^k mit $1 \leq k \leq n$, d.h. der Bahnabschluss ist ein Untertorus der Dimension k .

Beweis des Satzes 13.1 mit Hilfe von Satz 13.2: Wir nehmen an, dass $n = 3$ ist, der allgemeine Fall kann auf diesen zurückgeführt werden. Sei $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ und $\Gamma = \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. Wir fixieren die quadratische Referenz-Form $Q_0(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Wir nehmen an, dass Q zu Q_0 konjugiert ist, der Fall dass Q die Signatur $(1, 2)$ hat, lässt sich wörtlich analog behandeln. Also gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^*$ und $g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$, sodass

$$Q = \lambda Q_0 \circ g$$

ist. Zu einer quadratischen Form Q sei

$$\mathrm{SO}(Q) = \{g \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) : Q(vg) = Q(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^n\}$$

die spezielle orthogonale Gruppe der quadratischen Form. Wir behaupten, dass die Zusammenhangskomponente der Eins $\mathrm{SO}(Q_0)^\circ$ isomorph zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\pm 1$ und damit von unipotenten Elementen erzeugt ist. Dazu betrachten wir die Abbildung $B : \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $B(X, Y) = \frac{1}{2} \mathrm{tr}(XY)$. Diese Abbildung ist eine quadratische Form und man prüft nach, dass die Signatur davon $(2, 1)$ ist, denn

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist eine Orthonormalbasis. Damit erhalten wir also eine Identifikation $\psi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix} \mapsto \left(v_1, \frac{v_2 + v_3}{2}, \frac{-v_2 + v_3}{2} \right)$$

und eine Abbildung $\rho : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SO}(B)$ mit $\psi(\mathrm{Ad}(g)v) = \rho(g)\psi(v)$, die explizit durch

$$\rho : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 + bc & -ac + bd & ac + bd \\ -ab + cd & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)/2 & (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)/2 \\ ab + cd & (-a^2 + b^2 - c^2 + d^2)/2 & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)/2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Durch Differentiation beim Einselement folgt, dass diese Abbildung eine Isomorphie der Tangentialräume (d.h. der Lie-Algebren dieser bei-

den Gruppen)

$$D\rho : \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & -v_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & v_3 - v_2 & v_2 + v_3 \\ v_2 - v_3 & 0 & 2v_1 \\ v_2 + v_3 & -2v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

induziert. Daraus folgt zumindest, dass $H = \text{SO}(Q_0)^\circ$ von unipotenten Elementen erzeugt ist und der Ratner-Satz anwendbar ist.

Es gibt also eine Zwischengruppe $H \subset L \subset G$, sodass $\overline{gH} = gL$. Durch Rechnen auf der Lie-Algebra zeigt man, dass es keine echten Zwischengruppen gibt, d.h. es ist $L = H$ oder $L = G$.

Im Fall $L = G$ ist also ΓgH dicht in G . Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned} Q(\mathbb{Z}^3) &= \lambda_{Q_0}(\mathbb{Z}^3 g) && \text{nach Definition von } Q_0 \\ &= \lambda_{Q_0}(\mathbb{Z}^3 \Gamma g) \\ &= \lambda_{Q_0}(\mathbb{Z}^3 \Gamma g H) && \text{nach Definition von } H \\ \text{dicht in } \lambda_{Q_0}(\mathbb{Z}^3 G) &&& \text{Voraussetzung dieses Falls und Stetigkeit} \\ &= \lambda_{Q_0}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

ist.

Im zweiten Fall $L = H$ müssen wir zeigen, dass Q ein Vielfaches einer Form mit rationalen Koeffizienten ist. Zunächst ist $\text{SO}(Q)^\circ = gHg^{-1}$. Der Ratner-Satz liefert, dass die Menge $\Gamma_g = \Gamma \cap gHg^{-1}$ ein Gitter in gHg^{-1} ist. Der Borelsche Dichtesatz besagt, dass der Zariski-Abschluss eines Gitters in einer Gruppe L alle unipotenten von L enthält. Da $\text{SO}(Q)^\circ$ von solchen Element erzeugt ist, enthält also der Zariski-Abschluss von Γ_g die Gruppe $\text{SO}(Q)^\circ$. Der Zariski-Abschluss einer Teilmenge T von $\text{SL}_n(\mathbb{Q})$ ist aber über \mathbb{Q} definiert (d.h. durch polynomiale Gleichungen mit \mathbb{Q} -Koeffizienten gegeben), denn dieser ist durch Gleichungen von höchstens einem gewissen Grad d gegeben und im Vektorraum aller Polynome (in $n^2 = \dim(\text{Mat}^{n \times n})$ Variablen) vom Grad kleiner gleich d sind diejenigen, die auf T verschwinden durch lineare Gleichungen mit rationalen Koeffizienten ausgeschnitten. Angewandt auf Γ_g ist damit also $\text{SO}(Q)^\circ$ über \mathbb{Q} definiert. Schließlich zeigt man (Übung), dass für zwei quadratische Formen Q_1 und Q_2 die Untergruppen $\text{SO}(Q_1)^\circ$ und $\text{SO}(Q_2)^\circ$ von $\text{SL}_n(\mathbb{R})$ verschieden sind, es sei denn Q_1 und Q_2 unterscheiden sich nur um ein skalares Vielfaches. Wir normalisieren nun Q so, dass ein Koeffizient gleich 1 ist. Ist $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C})$, so fixiert $\sigma(\text{SO}(Q)^\circ)$ offenbar die quadratische Form $\sigma(Q)$. Da $\text{SO}(Q)^\circ$ über \mathbb{Q} definiert ist, muss $\sigma(\text{SO}(Q)^\circ) = \text{SO}(Q)^\circ$ sein und damit auf Q fixieren. Also sind $\sigma(Q)$ und Q proportional und mit der Normierung in der Tat gleich. Da σ beliebig war, folgt nun endlich, dass Q eine Form mit rationalen Koeffizienten ist. \square

13.2 Invariante Maße für den horozyklischen Fluss

Wir beweisen nun den Satz von Ratner in Spezialfällen, und zwar zunächst eine maßtheoretische Version.

Satz 13.3 Sei $\Gamma \subset G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein Gitter und $X = \Gamma \backslash G$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß μ sei invariant und ergodisch unter dem horozyklischen Fluss $h(s)$, $s \in \mathbb{R}$. Dann ist entweder $\mu = m_X$ oder μ hat als Träger eine abgeschlossene U^- -Bahn und ist dort das eindeutig bestimmte invariante Maß.

Im Fall dass X kompakt ist, kann der zweite Fall offenbar nicht auftreten, Dann ist $\mu = m_X$ das einzige invariante Maß, d.h. der horozyklische Fluss ist eindeutig ergodisch.

Wir beweisen zunächst den Zusatz im kompakten Fall.

Lemma 13.4 Sei $\Gamma \subset G$ ein Gitter. Ist $x_0 \in X$ periodisch unter U^- , dann verlässt $R_{a_t}(x_0)$ jede kompakte Menge. Insbesondere gibt es keine periodischen U^- -Bahnen, falls X kompakt ist.

Beweis: Da Γ diskret ist, gibt es zu jedem Punkt $x \in X$ einen sogenannten Injektivitätsradius r_x , sodass die Abbildung

$$B_{r_x}(x) \rightarrow X, \quad g \mapsto xg$$

injektiv ist (Der Begriff wird oft auf für das Supremum aller möglichen r_x verwendet.) Ist $K \subset X$ kompakt, so gibt es ein r , dass als Injektivitätsradius für alle $x \in K$ gleichzeitig dient. Damit gibt es ein $\ell_0 > 0$ (der Durchmesser von B_r in der hyperbolischen Metrik), sodass eine periodische U^- -Bahn startend bei $x \in K$ mindestens die Länge ℓ_0 hat. Die Länger der Bahn xU^- sei ℓ , d.h. $h(\ell)x_0 = x_0$. Dann gilt

$$h(e^{-t}\ell) R_{a_t}(x_0) = x_0 a_t^{-1} u^-(-e^t \ell) = x_0 u^-(-\ell) a_t^{-1} = R_{a_t}(x_0),$$

also ist $R_{a_t}(x_0)$ periodisch mit Bahnlänge höchstens $e^{-t}\ell$. Angenommen die Behauptung ist falsch und es gibt eine unbeschränkte Folge von positiven Zeiten t mit $R_{a_t}(x_0) \in K$ für ein festes Kompaktum K . Dann liefert die allgemeine Minimallänge ℓ_0 von periodischen Bahnen einen Widerspruch zur obigen Rechnung. \square

Für den Beweis von Satz 13.3 benötigen wir auch eine Umkehrung dieses Arguments. Als Merkgeln: Geodäten kommen immer wieder in ein geeignet gewähltes Kompaktum zurück, mit Ausnahme der Geodäten ausgehend von einem Punkt, der periodisch für den horozyklischen Fluss ist.

Wir erinnern daran, dass der *Dirichlet-Bereich* für eine Fuchssche Gruppe Γ zu einem Punkt $p \in \mathbb{H}$ als die Menge

$$D = D(p) = \{x \in bH : d(x, p) < d(x, \gamma p) \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \setminus \{e\}\}$$

definiert ist. Jeder Dirichlet-Bereich ist zusammenhängend, konvex und, falls Γ ein Gitter ist, ein Polygon, d.h. von endlich vielen Seiten berandet. Der Abschluss eines Dirichlet-Bereichs ist ein abgeschlossener Fundamentaltbereich für Γ . Ist der Abschluss eines Dirichlet-Bereichs kompakt in \mathbb{H} , so ist $X = \Gamma \backslash G$ kompakt. Ist umgekehrt X kompakt, so ist der Injektivitätsradius r auf X strikt positiv, X also von endlich vielen r -Bällen überdeckt und damit jeder Dirichlet-Bereich kompakt in \mathbb{H} . Die Menge der Randpunkte des Dirichlet-Bereichs ist $\overline{D(p)} \setminus D(p)$, wobei der Abschluss in $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \infty$ mit der üblichen Horoballtopologie auf $\overline{\mathbb{H}}$ genommen wird. Diese Menge hängt von der Wahl von p ab, nicht aber die Anzahl. Genauer gesagt, wenn man die Äquivalenzklasse eines Punktes in $\partial\mathbb{H}$ als seine Γ -Bahn definiert, so ist die Menge der Äquivalenzklassen von Randpunkten unabhängig von der Wahl von p . Diese Menge wird die Menge der *Spitzen* von Γ genannt.

Lemma 13.5 *Ist $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein Gitter, aber $X = \Gamma \backslash G$ nicht kompakt, so gibt es periodische U^- -Bahnen in X . Genauer gesagt, gibt es zu jeder Spitze von X eine Einparameterfamilie periodischer U^- -Bahnen, parametrisiert durch die R_{a_t} -Aktion. Weiterhin ist $x \in X$ periodisch unter der Gruppe U^- genau dann wenn die Bahn $R_{a_t}(x)$ für $t \rightarrow \infty$ jedes Kompaktum verlässt.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass es zu jedem Randpunkt r eines Dirichlet-Bereichs ein nicht-triviales unipotentes Element in Γ gibt, das diesen Randpunkt fixiert. Wir können Γ mit einem Element in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ konjugieren, das r auf ∞ abbildet und somit ohne Einschränkung annehmen, dass von nun an $r = \infty$ ist. Der erste Teilschritt ist zu zeigen, dass ein Element $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty) \ni \gamma \neq \pm \mathrm{Id}$ notwendigerweise unipotent ist. Ein solches Element hat allgemein die Form $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $ad = 1$. Ohne Einschränkung enthält der Stabilisator, falls nichttrivial, also ein solches Element mit $a/d \geq 1$. Angenommen $a/d > 1$. Da $\gamma(p) = \frac{a}{d}p + t\frac{b}{d}$ ist in diesem Fall also $\mathrm{Im}(\gamma(p)) > \mathrm{Im}(p)$. Also ist die Geodäte

$$L_\gamma = \{z \in \mathbb{H} : d(z, p) = d(z, \gamma(p))\}$$

ein Halbkreis auf der reellen Achse und keine vertikale Gerade. Also liegen Punkte mit großem Imaginärteil näher an $\gamma(p)$ als an p , im Widerspruch zur Definition des Dirichletbereichs und zur Eigenschaft, dass ∞ ein Randpunkt hiervon ist. Es bleibt $a = d = \pm 1$ und damit ist, falls $\gamma \neq \pm \mathrm{Id}$, das Quadrat davon das gesuchte unipotente Element.

Der nächste Schritt ist zu zeigen, dass es ein Element $\mathrm{Stab}_\Gamma(\infty) \ni \gamma \neq \pm \mathrm{Id}$ gibt. Sei dazu E ein der Randkanten von D in der Nähe von r . Also ist $E \subset L_{\gamma_1}$ für ein $\gamma_1 \in \Gamma$, genauer gesagt ist $E = \overline{D} \cap L_{\gamma_1}$. Als Zwischenbehauptung zeigen wir, dass wir E auch als $E = \overline{\gamma_1(D)} \cap L_{\gamma_1}$ schreiben können. Sei dazu $y \in \overline{\gamma_1(D)} \cap L_{\gamma_1}$. Dann ist

$$d(y, p) = d(y, \gamma_1(p)) = \min_{\gamma \in \Gamma} d(y, \gamma(p)).$$

Wir zeigen nun, dass die Geodäte von y nach p zu D gehört. Angenommen dies ist falsch. Dann gibt es einen Punkt z auf dieser Geodäten, d.h. mit $d(y, p) = d(y, z) + d(z, p)$, welcher auch die Eigenschaft $d(z, \gamma_1(p)) \leq d(z, p)$ hat. Zusammen folgt

$$d(y, \gamma_1(p)) \leq d(y, z) + d(z, \gamma_1(p)) \leq d(y, z) + d(z, p) = d(y, p) \leq d(y, \gamma_1(p)).$$

Also folgt Gleichheit und damit liegen y, z, p und $\gamma_1(p)$ alle auf einer Geodäten. Dies ergibt offenbar einen Widerspruch. Also ist $\overline{\gamma_1(D)} \cap L_{\gamma_1} \subseteq \overline{D} \cap L_{\gamma_1}$. Die umgekehrte Inklusion folgt analog und damit die Zwischenbehauptung.

Falls $r = \infty$ der einzige Randpunkt ist, so behaupten wir, dass $\gamma_1 \in \text{Stab}_{\Gamma}$. Aufgrund der Zwischenbehauptung treffen sich D und $\gamma_1(D)$ genau in E , es ist also $\gamma_1 \neq \pm \text{Id}$ und es gibt eine Randkante E' von D , die unter γ_1 auf E abgebildet wird. Da E einen Randpunkt, nämlich $r_1 = \gamma_1^{-1}(r)$, beinhaltet, muss aufgrund der Zusatzannahme $r_1 = r$ sein, also γ_1 ein nichttriviales unipotentes Element im Stabilisator von r .

Der allgemeinere Fall mehrerer Randpunkte verlangt genaueres Buchhalten der Randkanten und Identifikationen, die Details sind z.B. in [EW10, Lemma 11.29] ausgearbeitet.

Ist $\gamma \in \Gamma$ ein unipotentes Element, so gibt es $g \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, sodass $g^{-1}\gamma g = u^- s \in U^-$. Also ist die Bahn

$$h(s)(\Gamma g) = \Gamma g u^- s = \Gamma g$$

periodisch unter dem horozyklischen Fluß.

Entfernt man aus D einen kompakten Ball Ω von genügend großem Radius, so bleibt eine disjunkte Vereinigung von Umgebungen der Randpunkte übrig. Alle verbleibenden Behauptungen folgen, wenn wir zeigen, dass eine Geodäte startend mit $v \in T_x \mathbb{H}$, welche sich ab $t \geq t_0$ in einer derartigen Umgebung von ∞ aufhält, in der Tat eine vertikale Geodäte ist und damit nach dem vorigen Lemma zu periodischen U^- -Bahnen gehört. Falls die Behauptung falsch ist, muss die Geodäte ein Halbkreis auf der reellen Achse sein, sie wird also irgendwann in der Zukunft die Menge $\{\text{Re}(z) = c\}$, für c genügend klein, schneiden. Das reelle Intervall $K = [ci, \gamma_1(ci)] \subset \{\text{Re}(z) = c\}$ ist kompakt, wir können also annehmen, dass Ω das Urbild von K in $T_1 \mathbb{H}$ enthält. Im Quotienten $X = \Gamma \backslash \text{SL}_2(\mathbb{R})$ trifft also die untersuchte Geodäte das Kompaktum Ω , im Widerspruch zur Voraussetzung, dass sie sich ab $t \geq t_0$ in einer Umgebung von ∞ aufhält. \square

Wir können nun mit dem eigentlichen Beweis beginnen, d.h. wir verlagern die Kernaussage in eine Proposition, die wir dann mit Hilfe der Mischungseigenschaften des geodätischen Flusses beweisen.

Beweis von Satz 13.3: Sei μ ergodisch und invariant unter dem horozyklischen Fluss $x \mapsto h(s)x = R_{u^-(s)}x$. Wir erinnern daran, dass ein Punkt $x_0 \in X$ für ein Maß μ generisch ist, falls das zeitliche Mittel seiner Bahn gegen das

räumliche Mittel konvergiert, d.h. falls für alle $f \in C_c(X)$

$$\frac{1}{S} \int_0^S f(h(s)x_0) dx \rightarrow \int f d\mu \quad (13.1)$$

für $S \rightarrow \infty$ konvergiert, und dass μ -fast jeder Punkt x_0 für μ generisch ist.

Sei also nun x_0 ein generischer Punkt für μ . Falls x_0 ein periodischer Punkt für den horozyklischen Fluss ist, so hat μ seinen Träger also auf der Bahn von x_0 und ist (z.B. aufgrund der eindeutigen Ergodizität einer irrationalen Rotation) gleich dem Lebesgue-Maß auf dieser Bahn. Also nehmen wir nun an, dass die Bahn von x_0 nicht periodisch ist. Wir behaupten, dass es genügt zu zeigen, dass es eine unbeschränkte Folge von Zeitpunkten gibt, sodass die linke Seite von (13.1) gegen $\int f dm_X$ konvergiert, denn daraus folgt $\int f dm_X = \int f d\mu$, und da f beliebig war, folgt dann $m_X = \mu$.

Da die Bahn von x_0 nicht periodisch ist, können wir nach Lemma 13.5 annehmen, dass es ein Kompaktum K und eine unbeschränkte Folge von Zeitpunkten t_n gibt, sodass $R_{at_n}(x) \in K$ für $n \geq 1$. Damit enthält also die Aussage von Proposition 13.6 alles was zur Vervollständigung des Beweises fehlt. \square

Proposition 13.6 *Sei $K \subset X$ kompakt und η ein Injektivitätsradius für alle Punkte in K . Falls (t_n) eine unbeschränkte Folge von Zeitpunkten mit $R_{at_n}(x) \in K$ ist, so konvergiert*

$$\frac{1}{\eta e^{t_n}} \int_0^{\eta e^{t_n}} f(h(s)x_0) dx \rightarrow \int f d\mu \quad (13.2)$$

für $n \rightarrow \infty$ für alle $f \in C_c(X)$.

Wir geben zunächst eine Beweisidee und führen dann die Details aus. Da stetige Funktionen mit kompaktem Träger gleichmäßig stetig sind, genügt es statt der Konvergenz in (13.2) auch die Konvergenz des Integrals einer tubularen Umgebung B_n des Integrationsstücks $x_0 u^-(-[0, e^{t_n}])$ zu zeigen. Wir wollen B_n so wählen, dass das R_{at_n} -Bild davon einfach zu beschreiben ist, denn über diese Bilder des Punktes x_0 haben wir die Kompaktheitsvoraussetzung. Das R_{at_n} -Bild des Integrationsstücks ist gerade $R_{at_n}(x_0)u^-(-[0, 1])$, das horozyklische Einheitsintervall angeheftet an einem Punkte in K , dementsprechend waren die Teilfolge gewählt. Wir definieren also $Q_\delta \subset \text{SL}_2(\mathbb{R})$ als ein 'Quader', bei dem eine Kante $u^-(-[0, 1])$ ist (und wobei δ) noch geeignet zu wählen ist. Dann ist

$$B_n = R_{at_n}^{-1}(R_{at_n}(x_0)Q_\delta) = x_0(a_{t_n}^{-1}Q_\delta a_{t_n}).$$

die gewünschte tubulare Umgebung.

Aufgrund der Quadereigenschaft werden wir zeigen, dass

$$\frac{1}{\eta e^{t_n}} \int_0^{\eta e^{t_n}} f(h(s)x_0) dx \sim \frac{1}{m_X(B_n)} \int_{B_n} f dm_x = \frac{1}{m_X(B_n)} \langle f, \chi_{B_n} \rangle,$$

wobei die Approximation bis auf ein ε ist, das von δ damit von n abhängt. Da B_n ein $R_{a_{t_n}}$ -Urbild ist, würde Mischen (falls B_n fest wäre und nicht von n abhängen würde) die Konvergenz

$$\frac{1}{m_X(B_n)} \langle f, \chi_{B_n} \rangle \rightarrow \frac{m_X(R_{a_{t_n}}(x_0)Q_\delta)}{m_X(B_n)} \int f dm_X = \int f dm_X$$

zeigen. Wir werden dieses Problem beheben, indem wir nutzen, dass B_n ein $R_{a_{t_n}}$ -Urbild ein und der selben Mengen Q_δ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ angeheftet an verschiedene Aufpunkte $R_{a_{t_n}}(x_0)$ ist, und dass die Aufpunkte nur in einem Kompaktum variieren.

Wir beginnen das Ausfüllen der Details mit einer Schreibweise von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ lokal als Produkt.

Lemma 13.7 *Sei G eine σ -kompakte unimodulare Gruppe und S und T abgeschlossene Untergruppen, sodass $S \cap T = \{e\}$ das Bild der Produktabbildung $\phi : S \times T \rightarrow G$ eine Umgebung von e enthält. Dann ist die Einschränkung des Haar-Maßes m_G auf $\phi(ST)$ proportional zum Bildmaß $\phi_*(m_S^\ell \times m_T^r)$, wobei m_S^ℓ ein Linkshaarmaß auf S und m_T^r ein Rechtshaarmaß auf T ist.*

Wir werden das Lemma auf $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, $S = U^-$ und $T \subset G$ die unteren Dreiecksmatrizen (mit beliebigen Diagonaleinträgen) anwenden. Die Voraussetzungen sind nach dem Satz über implizite Funktionen erfüllt, denn die Tangentialabbildung $D\phi$ ist einfach die Addition auf den Liealgebren und somit ein Isomorphismus.

Beweis: Wir verwenden auch die Hilfsabbildung $\psi : S \times T \rightarrow ST$ gegeben durch $\psi(s, t) = st^{-1} = \phi(s, t^{-1})$. Aufgrund der Voraussetzung $S \cap T = \{e\}$ ist die Restriktion von ϕ und ψ auf ein Produkt $K_S \times K_T$ geeigneter kompakter Mengen ein Homoöomorphismus.

Sei $\nu = (\psi^{-1})_* m_G$. Dann ist (in $S \times T$ mit koordinatenweiser Multiplikation) aufgrund der Unimodularität von G für alle $B \subseteq K_S \times K_T$

$$\nu((s, t)B) = m_G(\psi((s, t)B)) = m_G(s\psi(B)t^{-1}) = m_G(\psi(B)) = \nu(B).$$

Wenn man die Kompakta vergrößert, folgt dass ν ein Linkshaarmaß auf $S \times T$ und damit proportional zu $m_S^\ell \times m_T^\ell$. Wenn man stattdessen das ϕ^{-1} -Bildmaß nimmt, wird nur die zweite Komponente invertiert und daher m_T^ℓ durch m_T^r ersetzt. \square

Beweis von Proposition 13.6: Wir können f in seinen Positiv- und Negativteil zerlegen und uns darauf beschränken, die Proposition für $f \geq 0$ zu beweisen. Wir fixieren ε und wählen aufgrund der gleichmässigen Stetigkeit von f ein δ , sodass $d(x, y) < \delta$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ impliziert. Den in der Motivation erwähnten Quader definieren wir als $Q_\delta = u^-(-[0, 1]) B_\delta^T$ und wir setzen wie angekündigt

$$B_n = R_{a_{t_n}}^{-1}(R_{a_{t_n}}(x_0)Q_\delta) = x_0(a_{t_n}^{-1}Q_\delta a_{t_n}) \subseteq x_0 u^-(-[0, \eta e^{t_n}] B_\delta^T),$$

wobei die letzte Teilmengeninklusion daraus folgt, dass Konjugation (zwar U^- expandiert, aber) $U^+ \subset T$ kontrahiert und mit Diagonalmatrizen kommutiert. Als Vorbereitung für die Integralabschätzung aufgrund der Quadeigenschaften notieren wir noch, dass für ein beliebiges $s \in [0, \eta e^{t_n}]$ und $h \in B_\delta^T$ die Abstandsabschätzung

$$d(x_0 u^-(-s), x_0 u^-(-s)h) \leq d_G(e, h) < \delta$$

folgt, und damit die Funktionswerte an diesen Punkten nahe beieinander liegen, d.h.

$$|f(x_0 u^-(-s)) - f(x_0 u^-(-s)h)| < \varepsilon.$$

Nach dem vorangehenden Lemma ist also

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_X(B_n)} \int_{B_n} f dm_x &= \frac{1}{m_X(B_n)} \int_{a_{t_n}^{-1} Q_\delta a_{t_n}} f(x_0 g) dm_G(g) \\ &= \frac{1}{\eta e^{t_n}} \int_0^{\eta e^{t_n}} \frac{1}{m_T^r(a_{t_n}^{-1} B_\delta^T a_{t_n})} \int_{a_{t_n}^{-1} B_\delta^T a_{t_n}} f(x_0 u^-(s)h) dm_T^r(h) ds \end{aligned} \quad (13.3)$$

und damit aufgrund der Abschätzung der Funktionswerte

$$\left| \frac{1}{m_X(B_n)} \langle f, \chi_{B_n} \rangle - \frac{1}{\eta e^{t_n}} \int_0^{\eta e^{t_n}} f(h(s) x_0) dx \right| < \varepsilon, \quad (13.4)$$

wie angekündigt.

Es verbleibt, das Mischen des geodätischen Flusses korrekt anzuwenden. Dazu bemerken wir, dass Q_δ nach Definition 'halboffen' ist, ein abgeschlossenes Intervall in S und eine offene Kugel in T . Wir wählen uns Approximationen

$$P_\delta \subseteq Q_\delta^\circ \subseteq \overline{Q_\delta} \subseteq R_\delta$$

von Innen und von Außen, sodass P_δ kompakt und R_δ offen ist, und sodass

$$m_G(R_\delta \setminus P_\delta) < \varepsilon / m_G(Q_\delta) \quad (13.5)$$

gilt. Die Offenheit von R_δ bzw. Q_δ° impliziert, dass es ein $\kappa > 0$ gibt, sodass $B_\kappa^G Q_\delta \subseteq R_\delta$ und $B_\kappa^G P_\delta \subseteq Q_\delta$ ist. Da das K aus der Voraussetzung kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $y_i, i = 1, \dots, \ell$, sodass K von der Vereinigung der $y_i B_\kappa^G$ überdeckt wird. Mischen impliziert nun, dass es ein n gibt, sodass für $i = 1, \dots, \ell$

$$\frac{m_G(P_\delta)}{m_G(Q_\delta)} \int f dm_G - \varepsilon \leq \left\langle f, \frac{1}{m_G(Q_\delta)} \chi(y_i P_\delta) \circ R_{a_{t_n}} \right\rangle \quad (13.6)$$

und

$$\frac{m_G(P_\delta)}{m_G(Q_\delta)} \int f dm_G + \varepsilon \geq \left\langle f, \frac{1}{m_G(Q_\delta)} \chi(y_i P_\delta) \circ R_{a_{t_n}} \right\rangle. \quad (13.7)$$

Falls nun $x = R_{a_{t_n}}(x_0) \in K$, also $x \in y_i B_\kappa^G$ für ein geeignetes i , dann ist $y_i P_\delta \subseteq x Q_\delta \subseteq y_i R_\delta$. Da f nicht-negativ ist, folgt

$$\left\langle f, \frac{1}{m_G(Q_\delta)} \chi(y_i P_\delta) \circ R_{a_{t_n}} \right\rangle \leq \frac{1}{m_X(B_n)} \langle f, \chi_{B_n} \rangle \leq \left\langle f, \frac{1}{m_G(Q_\delta)} \chi(y_i R_\delta) \circ R_{a_{t_n}} \right\rangle$$

Es genügt nun, die Abschätzungen (13.5), (13.4), (13.6) und (13.7) zusammenzusetzen um die gewünschte Aussage bis auf einen in ε polynomialen Fehler zu erhalten. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt dann die Behauptung. \square

Die Aussage in Satz 13.3, die Existenz von wenigen gut beschreibbaren invarianten Maßen, wird auch als maßtheoretische Starrheit der Aktion des horozyklischen Flusses bezeichnet.

13.3 Quantitative Nichtdivergenz

Neben maßtheoretischer Starrheit hat die der Aktion des horozyklischen Flusses noch zwei weitere gute Eigenschaften. Zum einen ist die Gleichverteilung horozyklischer Bahnen, die wir im nächsten Abschnitt beweisen werden. Man beachte, dass die vorangehende Proposition nur die Konvergenz gegen das räumliche Mittel zu einer geeignet gewählten Teilfolge von Zeitpunkten beweist, nämlich wenn $R_{a_{t_n}} x_0$ in einem festen Kompaktum liegt. Die andere gute Eigenschaft ist quantitative Nichtdivergenz (oder 'non-space of mass'), die wir in diesem Abschnitt zeigen und für die Gleichverteilung als Hilfsmittel benötigen.

Wir wollen zeigen, dass jeder schwach*-Limes einer Folge von Maßen mit Träger auf einem 'Stück Horozykel'

$$\frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \delta_{x u^{-(-t)}} dt \tag{13.8}$$

wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Um einzusehen, dass dies nicht selbstverständlich ist, nehmen wir zum Vergleich den geodätischen Fluss. Für $X = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ hat das Bild der einer vertikalen Geodäten (beginnend bei i) nur das Nullmaß als schwach*-Limes, da jedes Kompaktum von dieser Geodäten irgendwann unwiderruflich verlassen wird.

Anhand der Geometrie eines Horoballs sieht man sofort, dass es andererseits für den horozyklischen Fluß zu jedem Orbit ein Kompaktum gibt, das vom Orbit in einer unbeschränkten Folge von Zeitpunkten besucht wird. Quantitativ ist das die folgende Aussage.

Satz 13.8 *Zu jedem Gitter Γ in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, zu jeder kompakten Menge K von Startpunkten und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein Kompaktum $L = L(K, \varepsilon) \subseteq X$, sodass*

$$m_{\mathbb{R}}(\{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq T, h(t)x \notin L\}) \leq \varepsilon T \tag{13.9}$$

für alle $T > 0$ und alle $x \in K$. Weiterhin gibt es ein $L = L(\varepsilon)$ (unabhängig von x und K), sodass jedes x in X entweder periodisch ist oder die quantitative Nichtdivergenz (13.9) für alle $T \geq T_0(x)$ gilt.

Für die motivierende Nichtdivergenzaussage über Limeses von (13.8) ist dies mehr als ausreichend. Wir wenden den Satz auf $K = \{x\}$ an und zu jedem ε auf eine Funktion $f \in C_c(X)$ mit $\chi_{L(K,\varepsilon)} \leq f \leq 1$. Dann besagt der Satz, dass $\mu(X) \geq 1 - \varepsilon$ für ein solches Limesmaß μ gilt.

Wir beweisen den Satz 13.8 hier nur in dem (wichtigen) Spezialfall $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Der Beweis im allgemeinen Fall erfordert Umgebungen aller Spitzen konkret (z.B. mit Hilfe eines Dirichlet-Fundamentbereichs anzugeben, siehe dazu [EW10, Abschnitt 11.6.2]).

Der Beweis hat zwei Schritte. Der erste Schritt ist eine von der Ergodentheorie unabhängig nützliche gittertheoretische Aussage. Dazu interpretieren wir $X = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ als Parameterraum von Gittern $\Lambda \in \mathbb{R}^2$ von Covolumen Eins. Wir können die Aussagen auch gleich für $X_d = \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ in \mathbb{R}_d mitbeweisen.

Satz 13.9 [Mahlersches Kompaktheitskriterium] *Eine Teilmenge $K \subseteq X_d$ hat kompakten Abschluss genau dann, wenn es ein $s > 0$ gibt, sodass für alle Gitter $\Lambda \in K$ es keinen von Null verschiedenen Gittervektor in Λ der Länge kleiner s gibt.*

Beweis: Wir starten mit der einfacheren Richtung, dass Gitter in einer kompakten Menge K gleichmäßig diskret sind. Angenommen diese Behauptung sei falsch und es gibt $\Lambda_n \in K$ mit $0 \neq v_n \in \Lambda_n \cap B_{1/n}(0)$. Aufgrund der Kompaktheit können wir durch Übergang zu einer Teilfolge zudem annehmen, dass $\Lambda_n \rightarrow \Lambda \in X_d$ konvergiert. Es gibt also $g_n, g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, sodass $\Lambda_n = g_n^{-1}(\mathbb{Z}^d)$ und $\Lambda = g^{-1}(\mathbb{Z}^d)$ und sodass $d(g_n, g) \rightarrow 0$ (d.h. $g_n \rightarrow g$) für $n \rightarrow \infty$. Also ist $gg_n^{-1}v_n$ eine Folge von Vektoren in $\Lambda \setminus \{0\}$, deren Länge gegen Null konvergiert.

Umgekehrt zeigen wir, dass zu gegebenem s es eine (explizit berechenbare Zahl $r(s)$ gibt, sodass jedes Gitter Λ mit der Eigenschaft $\Lambda \cap B_s(0) = \{0\}$ eine Basis aus Gittervektoren b_i besitzt, deren Länge universell durch $\|b_i\| < r$ für $i = 1, \dots, d$ beschränkt sind. Daraus folgt die gewünschte Kompaktheit offenbar. Um so eine Basis zu konstruieren, wählen wir als b_1 einen kürzesten Gittervektor. Dann ist offenbar $\|b_1\| \geq s$ und ausserdem gibt es eine obere Schranke C_d , die nur von der Dimension des Gitters abhängt, sodass $\|b_1\| \leq C_d$ ist. (Um dies einzusehen, kann man den Minkowskischen Gitterpunktsatz zitieren oder einfach verwenden, dass das Volumen des Balles (in \mathbb{R}^d) vom Radius $C_d/2$ kleiner Eins sein muss, sonst liegt dieser Ball injektiv in \mathbb{R}^d/Λ und wir erhalten einen Widerspruch zur Unimodularität.)

Wir arbeiten nun weiter mit $W = (\mathbb{R}b_1)^\perp$ und dem Bild Λ_W von Λ unter der Orthogonalprojektion π_W nach W . Da der Kern der Projektion einen Gittervektor von Λ enthält, ist Λ_W wieder ein Gitter. Es ist zwar nicht mehr uni-

modular, aber sein Covolumen ist durch $1/s$ und $1/C_d$ nach unten bzw. oben beschränkt. Ausserdem hat Λ_W keine Gittervektoren der Länge kürzer als s , denn wäre $\pi_W(x)$ kürzer als s in der Metrik auf dem Quotientengitter, so wäre $x + kb_1$ kürzer als s für ein $k \in \mathbb{Z}$, im Widerspruch zur Wahl von b_i .

Damit haben wir alle Voraussetzungen gesammelt um b_2, \dots, b_n per Induktion zu konstruieren, angefangen damit, dass man Λ_W durch einen nach oben und unten beschränkten Faktor zu einem unimodularen Gitter umskaliert. \square

Wir geben erst den Beweis des Satzes und analysieren dann das zugrundeliegende Konzept der polynomialen Divergenz.

Beweis von Satz 13.8: Nach dem Mahlerschen Kompaktheitskriterium können wir annehmen, dass das vorgegebene Kompaktum K in einer Menge der Form

$$\Omega_\delta = \{A \in X_2 : A \cap B_\delta(0) = \{0\}\}$$

enthalten ist, wobei $\delta \in (0, 1)$ aufgrund der Unimodularität liegt. Wir wollen das gesuchte L von der Form $L = \Omega_\eta$ wählen und suchen dazu ein geeignetes η , das wir auf jeden Fall kleiner als $\frac{\delta}{4}$ wählen.

Die Aktion der horozyklischen Flusses fixiert die x -Achse eines gegebenen Startgitters $X \ni x = \Gamma g$ und schert die y -Achse entlang der x -Achse. Wir müssen kontrollieren, zu welchen Zeitpunkten welche Vektoren des geschernten Gitter kurz werden und können uns dabei offenbar auf primitive Gittervektoren (d.h. solche $v \in \Lambda$, die sich nicht als $v = nv'$ mit $v \in \Lambda$ und $1 < n \in \mathbb{N}$ schreiben lassen) konzentrieren. Sei $\{v_1, v_2, \dots\}$ eine Aufzählung der paarweise verschiedenen primitiven, nicht-proportionalen Gittervektoren.

Da das Startgitter in K liegt, ist $\|v_i\| > \delta$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Für jedem Zeitpunkt T und jedes $i \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$B_i = \{t \in [0, T] : u^-(t)v_i \in B_\eta(0)\}$$

die für den Gittervektor v_i schlechten ('bad') Zeiten und

$$P_i = \{t \in [0, T] : u^-(t)v_i \in B_\delta(0)\} \subseteq B_i$$

die für den Gittervektor v_i schützenden ('protecting') Zeiten. Offenbar ist $P_i \cap P_j = \emptyset$ für $i \neq j$, denn in einem unimodularen Gittern können nicht gleichzeitig zwei Gittervektoren kürzer als Eins sein.

Wir wollen nun die Abschätzung

$$m_{\mathbb{R}}(B_i) \leq \frac{8\eta}{\delta} m_{\mathbb{R}}(P_i) \tag{13.10}$$

zeigen. Damit folgt die erste Behauptung des Satzes, denn aufgrund der Disjunktheit der P_i ist

$$m_{\mathbb{R}} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \right) \leq \frac{8\eta}{\delta} m_{\mathbb{R}} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} P_i \right) \leq \frac{8\eta}{\delta} T$$

und daher gibt jedes $\eta \leq \frac{\varepsilon\delta}{8}$ die gewünschte Abschätzung.

Um (13.10) zu zeigen, nehmen wir an, dass $v_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ ist. Wir müssen also die Länge von $u^-(t)v_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 + t\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ abschätzen. Falls $B_i \subset [0, T]$ leer ist, bleibt nichts zu zeigen, und das ist für $\alpha_2 = 0$ oder $|\alpha_2| \geq \frac{\delta}{4} \geq \eta$ der Fall. Andernfalls ist P_i ein Intervall, sagen wir $P_i = [T_1, T_2]$, welches einen Zeitpunkt T' mit $|\alpha_1 + T'\alpha_2| < \eta$ enthält. Andererseits gilt $\|u^-(T_1)v_i\| = \delta$ beim Eintrittszeitpunkt T_i , also $|\alpha_1 + T_1\alpha_2| \geq \frac{\delta}{2}$, da $|\alpha_2| \leq \frac{\delta}{4}$. Also ist

$$m_{\mathbb{R}}(P_i) = T_2 - T_1 \geq T' - T_1 \geq \frac{\delta}{4|\alpha_2|}.$$

Andererseits gilt $|\alpha_1 + t\alpha_2| \leq \eta \leq \frac{\delta}{4}$ für jedes $t \in B_i = [T_3, T_4]$, sodass

$$m_{\mathbb{R}}(B_i) = T_4 - T_3 \leq \frac{2\eta}{|\alpha_2|}.$$

Zusammen ergeben die beiden Gleichungen die gewünschte Abschätzung (13.10).

Für die zweite Aussage des Satzes nehmen wir zu vorgegebenem ε das $L = \Omega_\eta$, das aus der ersten Aussage angewandt auf $K = \Omega_{1/2}$ und $\varepsilon/2$. Sei $x \in X_2$ nicht periodisch unter dem horozyklischen Fluss, also gibt es im zugehörigen Gitter Λ keinen fixierten Gittervektor, insbesondere auch keinen kurzen fixierten Gittervektor. Wenn die gewünschte Aussage (13.10) nicht sowieso für alle T richtig ist, dann gibt es ein $v \in \Lambda$, welcher irgendwann kurz wird. Wir können also T_1 so wählen, dass $u^-(T_1)v$ eine Norm in $(\frac{1}{2}, 1)$ hat. Das Unimodularitätsargument von oben besagt, dass zu diesem Zeitpunkt T_1 die Gittervektoren $\pm u^-(T_1)v$ die einzigen in $u^-(T_1)\Lambda$ sind, die Länge kleiner 1 haben. Also ist $u^-(T_1)\Lambda \in K = \Omega_{1/2}$. Wenn man nun T_x so wählt, dass $T_1 = \frac{\varepsilon}{2}T_x$, dann impliziert die erste Aussage angewandt auf $u^-(T_1)\Lambda$ die gewünschte Aussage. \square

Für den allgemeinen Fall zerlegt man, wie bereits gesehen, einen Dirichlet-Fundamentbereich in ein Kompaktum und endlich viele Spitzenumgebungen. Diese sehen geometrisch aus wie im Fall von X_2 , die Aufenthaltsdauer eines Horozykelorbits in so einer Spitzenumgebung ist wie im Fall X_2 .

13.4 Gleichverteilung und Bahnabschlüsse

Der folgende Satz schließt den Beweis des Ratnerschen Satzes für $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ab, denn angewandt auf charakteristische Funktionen von kleinen offenen Mengen beweist er offenbar, dass Bahnen periodisch oder dicht sind.

Satz 13.10 Sei $\Gamma \subset G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein Gitter und $x \in X = \Gamma \backslash G$. Dann ist x entweder periodisch für den horozyklischen Fluss oder die horozyklische Bahn ist gleichverteilt, d.h. für jedes $f \in C_c(X)$ gilt

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(h(t)x) dt \rightarrow \int f dm_X$$

für $T \rightarrow \infty$.

Beweis: Angenommen x ist nicht periodisch. Sei also T_n eine unbeschränkte, monoton wachsende Folge. Wir definieren Maße μ_n durch

$$\int f d\mu_n = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} f(h(t)x) dt$$

für alle $f \in C_c(X)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir aufgrund des Satzes von Banach-Alaoglu annehmen, dass $\mu_n \rightarrow \mu$ in der schwach*-Topologie konvergiert. Aufgrund des Arguments im Satz von Krylov-Bogoljubov ist μ invariant unter dem horozyklischen Fluss. Wir müssen zeigen, dass $\mu = m_X$ ist. Nach Satz 13.8 ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, also nach Satz 13.3 und Satz 7.4 eine verallgemeinerte Konvexkombination von m_X und Maßen mit Träger auf periodischen Bahnen, d.h. es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\mathcal{M}^{U^-}(X)$, sodass $\mu = \int \mu_y d\nu(y)$. Also ist unsere Aufgabe, zu zeigen dass

$$\mu(\{y \in X : h(t_y)y = y \text{ für ein } t_y > 0\}) = 0$$

ist.

Dazu verwenden wir das Kriterium, dass eine kompakte, messbare Menge B das Maß $\mu(B) = 0$ hat, falls es zu jedem ε eine offene Menge $O \supseteq B$ mit kompaktem Abschluss gibt, sodass $\limsup_{i \rightarrow \infty} \mu_i(O) \leq \varepsilon$. Zum Beweis dieses Kriteriums bemerken wir, dass es nach dem Uryson-Lemma zu so einem Paar von Mengen (B, O) eine durch 1 beschränkte, stetige Funktion f gibt, sodass $f \equiv 1$ auf B und $f \equiv 0$ außerhalb von O ist.

Um das Kriterium anzuwenden, genügt es die Menge periodischer Punkte als eine abzählbare Vereinigung von Kompakte zu schreiben und das Kriterium dann auf jedes Kompaktum anzuwenden. Nach Lemma 13.5 ist die Menge periodischer Punkte eine Vereinigung von ein-parameter-Bahnen zu jeder Spitze. Wir können also diese gesamte Menge als abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $B = B(y, I) = \{yu^-(x)a(-t) : y \in [0, t_y], t \in I\}$ schreiben, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall ist.

Wir fixieren also $\varepsilon > 0$ und so ein B und es sei $L = L_\varepsilon$ die Menge aus der zweiten Aussage von Satz 13.8 zu diesem ε . Ist y periodisch mit Periode t_y , so hat $ya(-t)$ die Periode $e^{-2t}t_y$, welche mit $t \rightarrow \infty$ immer kleiner wird. Da I kompakt ist, gibt es ein t_ε , sodass $Ba(-t_\varepsilon) \subseteq X \setminus L$ ist. Wir definieren also die offene Menge $O = (X \setminus L)a(t_\varepsilon) \subseteq B$. Nun ist

$$\begin{aligned} \mu_i(O) &= \frac{1}{T_i} m_{\mathbb{R}}(\{s \in [0, T_i] : h(s)x \in O\}) \\ &= \frac{1}{T_i} m_{\mathbb{R}}(\{s \in [0, T_i] : xa(-t_\varepsilon)u^-(-e^{-2t}s) \notin L\}) \\ &= \frac{1}{e^{-2t}T_i} m_{\mathbb{R}}(\{s \in [0, e^{-2t}T_i] : xa(-t_\varepsilon)u^-(-s) \notin L\}) \end{aligned}$$

Da x nicht periodisch ist, gilt in der zweiten Aussage von Satz 13.8 die Abschätzung (13.9) und diese besagt $\mu_i(O) \leq \varepsilon$. Zusammen mit den vorbereitenden Bemerkungen beweist dies den Satz. \square

14 Diophantische Approximation

Im Abschnitt 4 haben wir Kettenbrüche als Methode zur Konstruktion guter, sogar in gewissem Sinne bester Näherungen für reelle Zahlen kennengelernt. Diophantische Approximation fragt danach welche Teilmenge von reellen Zahlen wie gut durch rationale Zahlen approximiert werden kann. Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, wie Diophantische Approximation mit Ergodentheorie auf $SL_d(\mathbb{Z}) \backslash SL_d(\mathbb{R})$ zusammenhängt. Diophantische Approximation beginnt mit folgendem Satz von Dirichlet (1842).

Satz 14.1 Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $N > 1$ vorgegeben. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q \leq N$, sodass

$$|q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Ist α irrational, so gibt es unendlich viele gekürzte Brüche p/q , sodass

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}. \quad (14.1)$$

Die zweite Aussage folgt offenbar aus der ersten, da für irrationale Zahlen $p\alpha - q$ nie Null ist. Wir beweisen den Satz ohne zusätzlichen Aufwand in der höherdimensionalen Version.

Satz 14.2 Sei $\alpha \in \mathbb{R}^d$ und $N > 1$ vorgegeben. Dann gibt es $p_1, \dots, p_d, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q \leq N$, sodass

$$|q\alpha_i - p_i| < N^{-1/d}.$$

Ist mindestens eines der α_i irrational, so gibt es unendlich Tupel $(\frac{p_1}{q}, \dots, \frac{p_d}{q})$ mit $\text{ggT}(q, p_1, \dots, p_d) = 1$ und

$$\left| \alpha_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{q^{1+(1/d)}}.$$

Beweis: Wir betrachten das Gitter $\mathbb{Z}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ und die Menge

$$B = \{y \in \mathbb{R}^{d+1} : |\alpha_i y_{d+1} - y_i| \leq N^{-1/d}, i = 1, \dots, d, |y_{d+1}| \leq N\}.$$

Diese Menge ist abgeschlossen, konvex, nullpunktsymmetrisch und hat das Volumen 2^{d+1} , das 2^{d+1} -fache des Kovolumens von \mathbb{Z}^{d+1} . Also sind die Voraussetzungen des Minkowskischen Gitterpunktsatzes erfüllt. Dieser besagt, dass es ein $0 \neq y \in \mathbb{Z}^{d+1}$ in B gibt. Setzt man $y_{d+1} = q$ und $y_i = p_i$, dann liefert dieser Punkte genau das gesuchte Tupel. \square

Dieser Satz wirft schon für $d = 1$ die Frage auf, ob man die Approximationsgüte für irrationale Zahlen verbessern kann. Man kann zeigen, dass man in (14.1) die rechte Seite durch $\frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ ersetzen kann. Schon für quadratische Irrationalzahlen liefert das folgende Lemma die Antwort, dass sowohl die Konstante $\sqrt{5}$ als auch der quadratische Exponent optimal sind.

Lemma 14.3 Sei α eine quadratische Irrationalzahl mit $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $D = b^2 + 4ac$ die Diskriminante von α . Dann gibt es für alle $A > \sqrt{D}$ nur endliche viele Brüche p/q mit

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{Aq^2}. \quad (14.2)$$

Beweis: Wir schreiben das Minimalpolynom von α als

$$f(X) = aX^2 + bX + c = a^2(X - \alpha)(X - \alpha').$$

Dann ist $D = a^2(\alpha - \alpha')^2$. Ist p/q eine Approximation, die (14.2) erfüllt, dann gilt aufgrund der Ganzzahligkeit von f

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} &\leq |f(x/y)| = \left| a \left(\frac{x}{y} - \alpha \right) \left(\frac{x}{y} - \alpha' \right) \right| \\ &< \frac{\alpha}{Ay^2} \left| \left(\frac{x}{y} - \alpha + \alpha - \alpha' \right) \right| \\ &< \frac{\alpha}{Ay^2} \left(\sqrt{D} + \frac{a}{A^2y^4} \right) \end{aligned} \quad (14.3)$$

Dies kann man zu

$$y^2 < \frac{a}{\alpha(A - \sqrt{D})}$$

auflösen, was die Behauptung beweist. \square

Diese Lemma gibt Anlass für folgende Definition, die wir direkt für beliebiges d angeben.

Definition 14.4 Ein Element $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ist schlecht approximierbar, falls es eine reelle Zahl $c > 0$ gibt, sodass für alle $p \in \mathbb{Z}^d$ und für alle $q \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\left\| \alpha - \frac{p}{q} \right\|_\infty > \frac{c}{q^{1+(1/d)}}.$$

Nach dem obigen Lemma sind also quadratische Irrationalzahlen schlecht approximierbar.

Wir wollen nun schlechte Approximierbarkeit mit dem geodätischen Fluss auf $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ in Verbindung bringen. Sei $p : T^1\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ die Projektion und zu einem Punkte $v \in T^1\mathbb{H}$ sei $e(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} g_t(z)$ der Endpunkt der Geodäten.

Satz 14.5 Sei $v \in T^1\mathbb{H}$. Dann ist der Vorwärtsorbit $\{p(g_t(v))\}_{t \geq 0}$ auf der Modulfläche $X_2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ beschränkt, genau dann wenn $e(v)^{-1}$ schlecht approximierbar ist.

Beweis: Wir identifizieren $T^1\mathbb{H}$ wieder mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Sei also $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ein Tangentialvektor. Dann gibt es zwei Fälle. Der erste Fall besteht aus Matrizen g , deren linker oberer Eintrag nicht Null ist. Eine solche Matrix kann man als

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b' \\ ax & c' \end{pmatrix}$$

faktorisieren. In diesem Fall ist einerseits der Endpunkt

$$e(g) = \lim_{t \rightarrow \infty} g_t(g)i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{ae^{ti} + b'e^{-t}}{axe^{ti} + c'e^{-t}} = \frac{1}{x}.$$

Andererseits ist

$$g_t(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & be^{-t} \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

wobei die letzte Matrix uniform für $t \geq 0$ beschränkt ist und damit in allen folgenden Beschränktheitsargumenten irrelevant ist.

Der Vorwärtsorbit (aufgefasst als Menge von Gittern) ist gleich $\{g_t(\mathbb{Z}^2 g)\}_{t \geq 0}$, und diese Menge ist beschränkt in X_2 genau dann, wenn $\{g_t(\mathbb{Z}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix})\}_{t \geq 0}$ beschränkt ist. Sei also

$$\Lambda_x = \mathbb{Z}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} = \{(p + xq, q) : (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Nach dem Mahlerschen Kompaktheitskriterium ist $g_t(\Lambda_x)$ beschränkt genau dann, wenn es ein $s > 0$ gibt, sodass $\max(e^{t/2}|p + xq|, e^{-t/2}|q|) > s$ für alle $p \in \mathbb{Z}^2$ und $q \in \mathbb{N}$ und für alle $t \geq 0$.

Angenommen $e(g)^{-1} = x$ ist schlecht approximierbar, also gibt es ein $c > 0$, sodass $|x - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^2}$ für alle $p \in \mathbb{Z}^2$ und $q \in \mathbb{N}$. Also ist

$$e^{-t/2}|q| e^{t/2}|p + xq| \geq c$$

für alle $p \in \mathbb{Z}^2$ und $q \in \mathbb{N}$ und alle $t \geq 0$ und damit ist das Maximum der beiden Faktoren mindestens \sqrt{c} . Damit ist also der Vorwärtsorbit beschränkt in X_2 .

Ist umgekehrt der Vorwärtsorbit beschränkt, so wählen wir $t = t(q) \geq 0$ so, dass $e^{-t/2}|q| = s/2$. Der andere Term muss dann also für das Maximum verantwortlich sein und es folgt für alle p , dass

$$\frac{2}{s}|q||p + xq| \geq s, \quad \text{also} \quad \left|x + \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\delta^2/2}{q^2}$$

und damit, dass x schlecht approximierbar ist.

Der zweite Fall verbleibt als Übung. □

Dieser Satz besitzt eine höherdimensionale Version und die umgekehrte Situation, besonders gute Approximation hat auch eine Beschreibung mit Hilfe des geoätischen Flusses.

Literatur

- [AF07] Artur Avila und Giovanni Forni. "Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows". In: *Ann. of Math. (2)* 165.2 (2007), S. 637–664.
- [EW10] Manfred Einsiedler und Thomas Ward. *Ergodic Theory: with a view towards number theory*. Graduate Texts in Mathematics 259. Springer, 2010.
- [KN74] L. Kuipers und H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974, S. xiv+390.
- [Moo80] Calvin C. Moore. "The Mautner phenomenon for general unitary representations". In: *Pacific J. Math.* 86.1 (1980), S. 155–169. ISSN: 0030-8730. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102780621>.
- [Wer00] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Berlin: Springer-Verlag, 2000, S. xii+501.
- [Yoc06] Jean-Christophe Yoccoz. "Continued fraction algorithms for interval exchange maps: an introduction". In: *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*. Berlin: Springer, 2006, S. 401–435.