Fortgeschrittene Optimierung und inverse Probleme:
Regularisierung inverser Probleme
Sommersemester 2021
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

1. Übungsblatt (erschienen am 14.04.2021)

Aufgabe 1.1 (Programmieraufgabe)

Der Käufer einer binären Option erhält in T Tagen einen festgelegten Betrag (Payoff) Q, falls dann der Kurs S_T einer bestimmten Aktie über einem gewissen Wert (Strike) K liegt. Ansonsten erhält er nichts.

Der Wert V der Option hängt vom erwarteten Verlauf des Aktienkurses ab. Sei r der risikolose Zinssatz, zu dem wir den Kaufpreis bis zum Verfallszeitpunkt hätten anlegen können. Wissen wir schon heute, dass der Kurs sicher über dem Strike liegen wird (Insiderinformationen), so sind wir bereit einen Preis bis zu $V = e^{-rT}Q$ zu bezahlen (e^{-rT} heißt Diskontierungsfaktor). Glauben wir hingegen, dass der Kurs mit Wahrscheinlichkeit p über dem Strike liegen wird, so beträgt für uns der Wert der Option $V = e^{-rT}Qp$.

Eine verbreitete Modellannahme (*Black-Scholes-Modell*) ist, dass die relative Änderung des Aktienkurses in einer kurzen Zeitspanne normalverteilt ist, also

$$\frac{S_{t+\delta t} - S_t}{S_t} \sim N(\mu\delta t, \sigma^2\delta t).$$

Unter dieser Annahme kann man zeigen[1], dass

$$S_T = S_0 e^{XT},$$

wobei S_0 der heutige Aktienwert ist und

$$X \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right).$$

(a) Implementieren Sie ein einfaches *Monte-Carlo-Verfahren* zur numerischen Berechnung der Wahrscheinlichkeit p. Erzeugen Sie dazu n normalverteilte Zufallszahlen s und testen Sie, wie oft $S_T = S_0 e^{sT}$ über dem Strike liegt.

(b) Plotten Sie den Wert V einer binären Option in Abhängigkeit von dem heutigen Aktienpreis S_0. Verwenden Sie dabei die Parameterwerte $r = 0.0001$, $T = 30$, $K = 0.5$, $Q = 1$, $\mu = 0.01$, $\sigma = 0.1$ und $S0 = 0 : 0.001 : 1$. Für die Anzahl der Zufallszahlen wählen Sie $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$ und $n = 10000$ und vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem (hier ohne Herleitung verwendeten) exakten Optionswert

$$V = e^{-rT}Q\Phi(d),$$

[1] siehe z.B. Hull: Optionen, Futures und andere Derivate, 6. Auflage, Pearson Studium, München, 2006

wobei

$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \mathrm{d}\xi, \qquad d := \frac{\ln \frac{S_0}{K} + T\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

(c) Berechnen Sie die Ableitung der in (b) erzeugten Funktionen durch rechtsseitige finite Differenzen mit Schrittweite 10^{-3}. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Anwendung finiter Differenzen auf den exakten Optionswert.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 26.04.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Fortgeschrittene Optimierung und inverse Probleme* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.