GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 28.04.2021)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)

Satz von Lax-Milgram:

Es sei X ein Hilbertraum und

$$b : X \times X \to \mathbb{R},$$

eine stetige, symmetrische, koerzive Bilinearform, d.h.

$$\begin{aligned} b(u,v) &= b(v,u) && \forall u,v \in X && \text{(Symmetrie)} \\ \exists\, C > 0 : |b(u,v)| &\leq C\,\|u\|\,\|v\| && \forall u,v \in X && \text{(Stetigkeit)} \\ \exists\, \beta > 0 : b(u,u) &\geq \beta\,\|u\|^2 && \forall u \in X && \text{(Koerzivität)} \end{aligned}$$

und b ist in beiden Komponenten linear. Weiterhin sei $l \in X'$.
Zeigen Sie, dass dann genau ein $u \in X$ existiert mit

$$b(u,v) = l(v) \quad \text{für alle } v \in X, \tag{1}$$

dass u stetig und linear von l abhängt,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\beta}\,\|l\|_{X'}\,,$$

und dass u das eindeutige Minimum ist von

$$J:\ X \to \mathbb{R}, \quad J(v) := \frac{1}{2}b(v,v) - l(v).$$

Gehen Sie zum Beweis der Existenz wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie zunächst, dass J nach unten beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein Minimum $u \in H$ dieses Funktionals existiert, indem Sie beweisen, dass jede J minimierende Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ eine Cauchyfolge ist. Verwenden Sie dazu

$$b(u_k - u_l, u_k - u_l) = 4J(u_k) + 4J(u_l) - 8J\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right).$$

(c) Zeigen Sie, dass das Minimum von J die Gleichung (1) löst, indem Sie neben dem Minimum u auch Elemente $u + cv$ mit $c \in \mathbb{R}$, $v \in H$ betrachten.

Aufgabe 2.2 (Schriftliche Aufgabe [4 Punkte])

Der Hilbertraum l^2:

Betrachten Sie den Raum aller quadratisch summierbaren Folgen

$$l^2(\mathbb{N}) := \left\{ x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $l^2(\mathbb{N})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n, \quad x, y \in l^2(\mathbb{N}),$$

ein unendlich-dimensionaler (reeller) Hilbertraum ist.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 10.05.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Fortgeschrittene Optimierung und inverse Probleme* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.