

5. Übungsblatt (erschienen am 09.06.2021)

Aufgabe 5.1 (Votieraufgabe)

Gegeben sei eine *unendlich dimensionale Matrix*

$$(m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

wobei $l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ analog $l^2(\mathbb{N})$ definiert ist, also

$$l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) := \left\{ (m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}, \sum_{i,j=1}^{\infty} |m_{ij}|^2 < \infty \right\}, \quad \|(m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}\|_{l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})} := \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |m_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Wir definieren damit den Operator $M : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$ gemäß der Vorschrift

$$Mv := \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_{ij} v_j \right)_{i \in \mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $M \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))$ und dass

$$\|M\|_{\mathcal{L}(l^2(\mathbb{N}))} \leq \|(m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}\|_{l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}.$$

Berechnen Sie außerdem die Adjungierte M^* .

(b) Sei $(m_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ eine Diagonalmatrix, also $m_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass dann $(m_{ii})_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist und dass M kompakt ist.

Aufgabe 5.2 (Schriftliche Aufgabe [6 Punkte])

Betrachten Sie den Operator

$$A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \quad (Af)(x) := \int_0^x f(y) dy.$$

(a) Geben Sie den adjungierten Operator A^* an.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$Av_j(x) = \sigma_j u_j(x) \quad \text{und} \quad A^*u_j(x) = \sigma_j v_j(x) \tag{1}$$

mit $\sigma_j := \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) \pi \right)^{-1}$,

$$v_j(x) := \sqrt{2} \cos \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) \pi x \right) \quad \text{und} \quad u_j(x) := \sqrt{2} \sin \left(\left(j - \frac{1}{2} \right) \pi x \right).$$

(c) Zeigen Sie, dass $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ Orthonormalsysteme in $L^2(0, 1)$ sind.

(Tipp: Sie können dies aus (1) ohne partielle Integration folgern.)

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 21.06.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Fortgeschrittene Optimierung und inverse Probleme* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.