

6. Übungsblatt (erschienen am 23.06.2021)

Aufgabe 6.1 (Votieraufgabe)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zur Lösung des linearen schlechtgestellten Problems $Kx = y$ mit $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ betrachten wir die n -fach iterierte Tikhonov-Regularisierung,

$$R_{\alpha, n} y^\delta := x_{\alpha, n}^\delta,$$

wobei $x_{\alpha, m}^\delta \in X$, $m = 0, 1, \dots, n$ definiert ist durch die Rekursionsvorschrift:

$$x_{\alpha, 0}^\delta = 0, \quad (K^*K + \alpha I)x_{\alpha, m+1}^\delta = K^*y^\delta + \alpha x_{\alpha, m}^\delta, \quad m = 0, \dots, n-1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $R_{\alpha, n} = F_{\alpha, n}(K^*K)K^*$, wobei

$$F_{\alpha, n}(\lambda) := \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} \right)^n \right)$$

(b) Zeigen Sie, dass F_α ein regularisierender Filter und damit R_α eine Regularisierung ist.

Aufgabe 6.2 (Programmieraufgabe [8 Punkte])

Wir betrachten das inverse Problem der numerischen Differentiation, d.h. die Invertierung des Integrationsoperators

$$A : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1), \quad (Af)(x) := \int_0^x f(y) dy.$$

Zur numerischen Behandlung ersetzen wir eine Funktion $f \in L^2(0, 1)$ durch den zugehörigen Vektor $\bar{f} \in \mathbb{R}^n$ ihrer Auswertungen auf dem äquidistanten Gitter $(x_i)_{i=1}^n$, wobei $x_i = (i-1)h$ und $h = \frac{1}{n-1}$ zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$.

(a) Bestimmen Sie die Diskretisierung $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des Operators A auf diesem äquidistanten Gitter, indem Sie die Trapezregel zur Approximation der Integration verwenden.

Wie lautet die Diskretisierung von A^* ?

Untersuchen Sie dann numerisch die Anwendung verschiedener Regularisierungsverfahren auf das inverse Problem

$$\bar{A}\bar{f} = \bar{g}.$$

Verwenden Sie dabei als rechte Seite eine Diskretisierung von $g(x) = x^4 - x^2$.

(b) Erzeugen Sie Diskretisierungen \bar{g}^δ von mit Messfehlern behafteten rechten Seiten $g^\delta \in L^2(0, 1)$, $\|g^\delta - g\| \leq \delta$.

- (c) Lösen Sie das inverse Problem jeweils mit der Moore-Penrose-Inverse, und mit dem Tikhonov-Verfahren unter Anwendung der Parameterwahlstrategie $\alpha := \delta$.

Untersuchen Sie die Verfahren numerisch auf Konvergenz. Zur qualitativen Untersuchung plotten Sie die Ergebnisse der zwei Verfahren jeweils zu unterschiedlichen Werten von δ gemeinsam mit der analytischen Lösung. Wie hängen die Ergebnisse vom Diskretisierungsparameter n ab?

- (d) Lösen Sie das Problem außerdem durch Anwendung finiter Differenzen

$$\frac{\bar{g}_{\delta,i+k} - \bar{g}_{\delta,i}}{kh}$$

wobei Sie $k \in \mathbb{N}$ gemäß $k = \text{ceil}(\text{sqrt}(\delta)/h)$ wählen.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 05.07.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Fortgeschrittene Optimierung und inverse Probleme* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.