Numerik partieller Differentialgleichungen Wintersemester 2020/21 Prof. Dr. Bastian von Harrach Dr. Sarah Eberle



2. Übungsblatt (erschienen am 18.11.2020)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)

Berechnen Sie die (distributionelle) Ableitung $u' \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ von

$$u(x) := \begin{cases} -x^2/2 - x/6 + 1/3 & \text{für } x \in (-1,0) \\ -x^2/4 - x/12 + 1/3 & \text{für } x \in (0,1) \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass u die Differentialgleichung

$$-(k(x)u'(x))' = f(x)$$
 $x \in (-1,1)$, $u(-1) = 0$, $u(1) = 0$,

mit f(x) := 1 und

$$k(x) = 1$$
 für $x \in (-1, 0)$, $k(x) = 2$ für $x \in (0, 1)$

löst.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)

Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.17 (Rechenregeln für die Ableitung) der Vorlesung.

Aufgabe 2.3 (Schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]

Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.13 der Vorlesung:

Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\partial_i f = 0$ für alle i = 1, ..., n, dann ist f lokal konstant, d.h. zu jedem Punkt $x \in \Omega$, existiert eine Umgebung U und ein $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{U} c\varphi dx \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Warum ist es immer möglich, U als geeignetes mehrdimensionales Intervall $I =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$ zu wählen?
- Zeigen Sie, dass

$$\langle f, \varphi \rangle = 0$$
 für alle $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ mit $\int_{a_i}^{b_i} \varphi(x_1, \dots, x_n) \, \mathrm{d}x_i = 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$.

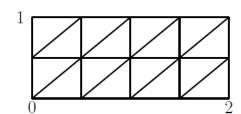
• Verwenden Sie nun Funktionen $\psi_j \in \mathcal{D}(]a_j, b_j[), j = 1, \ldots, n$ mit $\int_{a_j}^{b_j} \psi_j(x_j) dx_j = 1$, um die Aussage für U = I zu zeigen.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]

(a) Betrachten Sie ein beliebiges Rechteck $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

$$[P,T] = gen_mesh(a,b,c,d,m,n)$$

welche zu einem Rechteck, gegeben durch $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, sowie $m,n\in\mathbb{N}$ eine Triangulierung des Rechteckes in 2nm viele, gleichgroße Dreiecke erzeugt, vergleiche Abbildung 1 für ein Beispiel. Dabei soll die Ausgabe $P\in\mathbb{R}^{(n+1)(m+1),2}$ eine Matrix sein, welche in der i-ten Zeile die (x,y)-Koordinaten des i-ten Gitterpunktes enthält. $T\in\mathbb{R}^{2mn,3}$ soll eine Matrix sein, welche in der j-ten Zeile die Indizes der drei, zum j-ten Dreieck gehörenden, Gitterpunkte enthält.



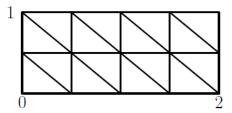


Abbildung 1: Beispielhafte Triangulierungen des Rechteckes $[0,2] \times [0,1]$ für n=4 und m=2.

(b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

die eine durch gen_mesh erzeugte Triangulierung visualisiert. Verwenden Sie dazu nicht die MATLAB-interne Funktion triplot.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 30.11.2020 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff Abgabe Numerik partieller Differentialgleichungen an.
- Zu Votieraufgaben wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.