Numerik partieller Differentialgleichungen
Wintersemester 2020/21
Prof. Dr. Bastian von Harrach
Dr. Sarah Eberle

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

2. Übungsblatt (erschienen am 18.11.2020)

Aufgabe 2.1 (Votieraufgabe)
Berechnen Sie die (distributionelle) Ableitung $u' \in \mathcal{D}(]-1,1[)$ von

$$u(x) := \begin{cases} -x^2/2 - x/6 + 1/3 & \text{für } x \in (-1,0) \\ -x^2/4 - x/12 + 1/3 & \text{für } x \in (0,1) \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass u die Differentialgleichung

$$-(k(x)u'(x))' = f(x) \quad x \in (-1,1), \quad u(-1) = 0, u(1) = 0,$$

mit $f(x) := 1$ und

$$k(x) = 1 \quad \text{für } x \in (-1,0), \qquad k(x) = 2 \quad \text{für } x \in (0,1)$$

löst.

Aufgabe 2.2 (Votieraufgabe)
Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.17 (Rechenregeln für die Ableitung) der Vorlesung.

Aufgabe 2.3 (Schriftliche Aufgabe)[6 Punkte]
Beweisen Sie die Aussage von Satz 2.13 der Vorlesung:
Ist $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\partial_i f = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, dann ist f lokal konstant, d.h. zu jedem Punkt $x \in \Omega$, existiert eine Umgebung U und ein $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_U c\varphi \mathrm{d}x \quad \textit{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Warum ist es immer möglich, U als geeignetes mehrdimensionales Intervall $I =]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$ zu wählen?
- Zeigen Sie, dass
$$\langle f, \varphi \rangle = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}(I) \text{ mit } \int_{a_i}^{b_i} \varphi(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_i = 0 \text{ für ein } i \in \{1, \ldots, n\}.$$
- Verwenden Sie nun Funktionen $\psi_j \in \mathcal{D}(]a_j, b_j[)$, $j = 1, \ldots, n$ mit $\int_{a_j}^{b_j} \psi_j(x_j) \, \mathrm{d}x_j = 1$, um die Aussage für $U = I$ zu zeigen.

Aufgabe 2.4 (Programmieraufgabe)[4 Punkte]

(a) Betrachten Sie ein beliebiges Rechteck $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
[P,T] = gen_mesh(a,b,c,d,m,n)
```

welche zu einem Rechteck, gegeben durch $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sowie $m, n \in \mathbb{N}$ eine Triangulierung des Rechteckes in $2nm$ viele, gleichgroße Dreiecke erzeugt, vergleiche Abbildung 1 für ein Beispiel. Dabei soll die Ausgabe $P \in \mathbb{R}^{(n+1)(m+1),2}$ eine Matrix sein, welche in der i-ten Zeile die (x, y)-Koordinaten des i-ten Gitterpunktes enthält. $T \in \mathbb{R}^{2mn,3}$ soll eine Matrix sein, welche in der j-ten Zeile die Indizes der drei, zum j-ten Dreieck gehörenden, Gitterpunkte enthält.

Abbildung 1: Beispielhafte Triangulierungen des Rechteckes $[0, 2] \times [0, 1]$ für $n = 4$ und $m = 2$.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion

```
plot_mesh(P,T)
```

die eine durch `gen_mesh` erzeugte Triangulierung visualisiert. Verwenden Sie dazu nicht die `MATLAB`-interne Funktion `triplot`.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 30.11.2020 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Numerik partieller Differentialgleichungen* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.