

4. Übungsblatt (erschienen am 16.12.2020)

Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)

Der Approximationssatz von Weierstraß besagt, dass der Raum der Polynome auf $[0, 1]$ bezüglich der Supremumsnorm dicht im Raum der stetigen Funktionen $C([0, 1])$ liegt.

Folgern Sie, dass der Raum der Polynome auch bzgl. der H^1 -Norm dicht in $H^1(]0, 1[)$ liegt.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)

Beweisen Sie die *Poincaré-Friedrichsche Ungleichung*: sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und sei Ω in einem d -dimensionalen Würfel der Kantenlänge s enthalten. Dann gilt

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq s|v|_{H^1(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei zu $u \in H^m(\Omega)$ durch $|u|_{H^m(\Omega)}^2 := \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2$ die $H^m(\Omega)$ -Seminorm definiert wird.

Hinweis: Es gilt sogar $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq s \|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}$.

Aufgabe 4.3 (Schriftliche Aufgabe)[5 Punkte]

Wir betrachten das homogene Dirichlet-Problem mit $c = 0$ aus Folgerung 2.42: sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand, $a \in L_+^\infty(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass das homogene Dirichlet-Problem

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) = f \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

eindeutig lösbar ist und die Lösung stetig und linear von der rechten Seite f abhängt. Zeigen Sie eine analoge Aussage auch für das inhomogene Dirichlet-Problem.

Aufgabe 4.4 (Programmieraufgabe)[2+4 Punkte]

Wir betrachten das homogene Neumannproblem

$$-\Delta u + u = \chi_{[1/4, 1/2]} \quad \text{in }]0, 1[, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0$$

und seine variationelle Formulierung

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in H^1(]0, 1[),$$

wobei für $u, v \in H^1(]0, 1[)$

$$b(u, v) := \int_0^1 (u'v' + uv) \, dx \quad \text{und} \quad l(v) := \int_{1/4}^{1/2} v \, dx.$$

Weiterhin bezeichne $\Pi_n := \{u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ den Raum aller Polynome mit Höchstgrad n .

Gemäß Lemma 3.1 löst $u \in \Pi_n$ genau dann

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \Pi_n,$$

wenn die Koeffizienten von $u(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} b(1,1) & b(1,x) & \dots & b(1,x^n) \\ b(x,1) & b(x,x) & \dots & b(x,x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(x^n,1) & b(x^n,x) & \dots & b(x^n,x^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(1) \\ \vdots \\ l(x^n) \end{pmatrix}$$

lösen.

Berechnen Sie $b(x^n, x^m)$ und $l(x^n)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und schreiben Sie ein Programm, das die Lösung von

$$b(u, v) = l(v) \quad \forall v \in \Pi_n$$

bestimmt. Plotten Sie u für verschiedene Werte von n .

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden.
- Zu **Programmieraufgaben** ist ein kommentierter MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher die entsprechenden Plots generiert.
- Fügen Sie die eingescannte schriftliche Ausarbeitung sowie den Quellcode und die Plots zu einer einzigen PDF-Datei zusammen und schicken Sie diese bis zum 11.01.2021 um 12:00 Uhr an eberle@math.uni-frankfurt.de. Nutzen Sie dazu Ihre studentische E-Mail-Adresse und geben Sie als Betreff *Abgabe Numerik partieller Differentialgleichungen* an.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt.
- Die Lösungsvideos zu den Übungsblättern werden auf der Homepage veröffentlicht.