15 Integration (gebrochen) rationaler Funktionen

Wir werden im folgenden sehen, daß sich die Integration gebrochen rationaler Funktionen auf die folgenden drei „einfachen“ Fälle zurückführen läßt (für komplexe rationale Funktionen vgl. die Bemerkung im Anschluß an Satz 15.2):

1. Polynome $\sum_{j=0}^{n} a_j x^j$: Ein solches Polynom hat bekanntlich die Stammfunktion

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{j-1}}{j}\, x^j.$$

2. $(x - x_0)^{-\ell}$ mit einem $x_0 \in \mathbb{R},\ \ell \in \mathbb{N}$: Für diese Funktion ist eine Stammfunktion gegeben durch

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{1-\ell}\,(x-x_0)^{1-\ell} & \text{für } \ell > 1, \\ \ln|x - x_0| & \text{für } \ell = 1. \end{array}$$

3. $\dfrac{Bx + C}{(x^2 + 2bx + c)^\ell}$ mit $B, C, b, c \in \mathbb{R},\ \ell \in \mathbb{N}$ und $c > b^2$ (letzteres bedeutet, daß der Nenner keine reelle Nullstelle hat; er ist für alle x strikt positiv): Dieser Term läßt sich offenbar wie folgt umschreiben:

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + 2bx + c)^\ell} = \frac{B}{2}\,\frac{2x + 2b}{(x^2 + 2bx + c)^\ell} + \frac{C - Bb}{(x^2 + 2bx + c)^\ell}.$$

Hier hat der erste Term die Stammfunktion (der Zähler ist die Ableitung des Klammerausdrucks im Nenner):

$$\begin{array}{ll} \frac{B}{2(1-\ell)}(x^2 + 2bx + c)^{1-\ell} & \text{für } \ell > 1, \\ \frac{B}{2}\ln(x^2 + 2bx + c) & \text{für } \ell = 1. \end{array}$$

Es bleibt also eine Stammfunktion zu finden für Funktionen der Form

$$\begin{aligned} (x^2 + 2bx + c)^{-\ell} &= \Big((x+b)^2 + (c - b^2)\Big)^{-\ell} \\ &= (c - b^2)^{-\ell} \left(\left(\frac{x+b}{\sqrt{c - b^2}}\right)^2 + 1\right)^{-\ell}. \end{aligned}$$

Für $\ell = 1$ und $\ell = 2$ sind Stammfunktionen gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} && \text{für } \ell = 1,\\
&\frac{1}{2(c-b^2)} \frac{x+b}{x^2+2bx+c} + \frac{1}{2(c-b^2)^{3/2}} \arctan \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}} && \text{für } \ell = 2.
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion für $\ell = 1$ ist offensichtlich. Für $\ell = 2$ erhält man sie (wie auch die für $\ell > 21$) aus

$$\begin{aligned}
\int (x^2+2bx+c)^{1-\ell}\,\mathrm{d}x &= \int (x^2+2bx+c)^{1-\ell} \cdot 1\,\mathrm{d}x\\
&\quad \text{(mit } x+b \text{ als Stammfunktion von 1)}\\
&= \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^{1-\ell}} + 2(\ell-1) \int \frac{(x+b)^2}{(x^2+2bx+c)^{\ell}}\,\mathrm{d}x\\
&\quad \text{(mit } (x+b)^2 = (x^2+2bx+c) - (c-b^2))\\
&= \frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^{1-\ell}} + 2(\ell-1) \int \frac{1}{(x^2+2bx+c)^{\ell-1}}\,\mathrm{d}x\\
&\quad - 2(\ell-1) \int \frac{c-b^2}{(x^2+2bx+c)^{\ell}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

durch Auflösung nach dem letzten Term.

Hiermit erhält man insbesondere

— Eine Stammfunktion von $\dfrac{Bx+C}{x^2+2bx+c}$ ist

$$\frac{B}{2} \ln(x^2+2bx+c) + \frac{C-Bb}{\sqrt{c-b^2}} \arctan \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}.$$

— Eine Stammfunktion von $\dfrac{Bx+C}{(x^2+2bx+c)^2}$ ist

$$\begin{aligned}
&-\frac{B}{2}(x^2+2bx+c)^{-1} + \frac{C-Bb}{2(c-b^2)} \frac{x+b}{x^2+2bx+c}\\
&\qquad + \frac{C-Bb}{2(c-b^2)^{3/2}} \arctan \frac{x+b}{\sqrt{c-b^2}}.
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, daß jede (reelle) rationale Funktion auf Terme dieser Art zurückgeführt werden kann. Hierzu benutzen wir den

Satz 15.1 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein (i. allg. komplexes) Polynom vom Grad n ($\deg p = n$, $a_n \neq 0$). Dann existieren $z_j \in \mathbb{C}$ und $\ell_j \in \mathbb{N}$ (die* Nullstellen *des Polynoms p und deren* Vielfachheiten*) mit*

$$p(z) = a_n \prod_{j=1}^{k} (z-z_j)^{\ell_j}, \quad \sum_{j=1}^{k} \ell_j = n.$$

Beweis. (Der folgende einfache Beweis geht auf R. Argand (1768–1822) zurück; er wurde 1814 veröffentlicht und 1820 von Cauchy vereinfacht. Ein völlig anderer Beweis wird üblicherweise in der Funktionentheorie gegeben.)

a) Wir zeigen zunächst, daß p mindestens ein Nullstelle hat. Wegen

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z|^n \left| a_n + z^{-1}a_{n-1} + \ldots + z^{-n}a_0 \right| \\ &\geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{1}{|z|} \left| a_{n-1} + z^{-1}a_{n-2} + \ldots + z^{1-n}a_0 \right| \right) \end{aligned}$$

für $z \neq 0$, existiert ein $r > 0$ mit

$$|p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z|^n > |a_0| = |p(0)| \quad \text{für } |z| \geq r.$$

Also nimmt $|p(z)|$ in der Kreisscheibe $|z| \leq r$ sein Minimum an (eine stetige Funktion auf einer beschränkten abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}$ nimmt ihr Minimum an).

Wir zeigen $p(z_0) = 0$, d. h. z_0 ist Nullstelle von p. Dazu nehmen wir $p(z_0) \neq 0$ an. Offenbar ist $p(z_0 + w)$ ein Polynom vom Grad n in w mit konstantem Glied $p(z_0)$,

$$p(z_0 + w) = p(z_0) + b_k w^k + w^{k+1}\tilde{p}(w)$$

mit $1 \leq k \leq n$, $b_k \neq 0$ und einem Polynom $\tilde{p}$ (dabei ist $\tilde{p} = 0$, falls $k = n$ ist).

Wählen wir nun w_0 so, daß $b_k w_0^k = -p(z_o)$ gilt ($w_k := \sqrt[k]{-p(z_0)/b_k}$), so gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$p(z_0 + tw) = (1 - t^k)p(z_0) + t^{k+1}w_0^{k+1}\tilde{p}(tw_0).$$

Für hinreichen kleine $t > 0$ gilt dann

$$|t^{k+1}\tilde{p}(tw_0| < t^k|p(z_0)|, \quad \text{also } p(z_0 + tw_0) < p(z_0).$$

Das ist ein Widerspruch zur Wahl von z_0 als Minimum von $|p(z)|$.

b) Ist z_0 eine Nullstelle von p, so liefert Polynomdivision $p(z) = p_{n-1}(z)(z - z_0)$ (der Rest ist 0, da z_0 Nullstelle von p ist) mit einem Polynom $p_{n-1}(z)$ vom Grad $n - 1$ mit höchstem Koeffizienten a_n. Iteration dieses Verfahrens liefert nach n Schritten die Behauptung. ■

Satz 15.2 (Komplexe Partialbruchzerlegung) *Sei* $r(z) = \dfrac{q(z)}{p(z)}$ *mit Polynomen* q *und* p, $p(\cdot)$ *wie im obigen Satz. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen* $A_{ij} \in \mathbb{C}$ *und ein Polynom* $h(\cdot)$ *mit*

$$\begin{array}{rcccccccccc} r(z) & = & h(z) & + & \dfrac{A_{11}}{z-z_1} & + & \dfrac{A_{12}}{(z-z_1)^2} & + & \dots & + & \dfrac{A_{1\ell_1}}{(z-z_1)^{\ell_1}} \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & + & \dfrac{A_{k1}}{z-z_k} & + & \dfrac{A_{k2}}{(z-z_k)^2} & + & \dots & + & \dfrac{A_{k\ell_k}}{(z-z_k)^{\ell_k}}. \end{array}$$

Bemerkung Zur Integration (komplexer) rationaler Funktionen kann man sich also offenbar auf die obigen Fälle 1 und 2 beschränken; dabei muß man dann allerdings die komplexe Logarithmusfunktion beherrschen.

Beweis von Satz 15.2. **Existenz**: $h(\cdot)$ ergibt sich durch Polynomdivision mit Rest:

$$r(z) = h(z) + \frac{q_1(z)}{p(z)}, \quad \deg q_1 < \deg p.$$

Also können wir o. E. voraussetzen

$$r(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \quad \text{mit } \deg q < \deg p.$$

Wir führen den Beweis durch Induktion nach $n = \deg p$.

Für $\mathbf{n = 1}$, d.h. $r(z) = \dfrac{c}{x - z_1}$, ist nichts zu beweisen.

$\mathbf{n - 1 \Rightarrow n}$: Die Behauptung sei also richtig für $\deg p \leq n-1$ und somit $\deg q \leq n-2$. Habe jetzt p den Grad n, also q den Grad $\leq n-1$; z_o sei *eine* Nullstelle von p der Ordnung $\ell > 1$, d. h. es gilt

$$p(z) = (z - z_0)^\ell \tilde{p}(z) \quad \text{mit } \tilde{p}(z_0) \neq 0,\ \ell \geq 1.$$

Daraus folgt (für z mit $p(z) \neq 0$)

$$\frac{q(z)}{\tilde{p}(z)} - \frac{q(z_0)}{\tilde{p}(z_0)} = \frac{q(z)\tilde{p}(z_0) - \tilde{p}(z)q(z_0)}{\tilde{p}(z)\tilde{p}(z_0)} = \frac{(z - z_0)\tilde{q}(z)}{\tilde{p}(z)}$$

mit $\deg \tilde{q} \leq n-2$, also

$$\frac{q(z)}{(z-z_0)^\ell \tilde{p}(z)} = \frac{q(z_0)}{\tilde{p}(z_0)} \frac{1}{(z-z_0)^\ell} + \frac{\tilde{q}(z)}{(z-z_0)^{\ell-1}\tilde{p}(z)}.$$

Auf den letzten Term kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden.

Eindeutigkeit: Seien zwei solche Darstellungen mit A_{ij}, A'_{ij} gegeben. Multiplikation mit $(z-z_j)^{\ell_j}$ liefert, wenn man $z = z_j$ setzt: $A_{j\ell_j} = A'_{j\ell_j}$. Anschließend verfährt man entsprechend mit $(z-z_j)^{\ell_j-1}$, $(z-z_j)^{\ell_j-2}, \ldots$. Schließlich ergibt sich die Eindeutigkeit von $h(\cdot)$. ■

Satz 15.3 (Reelle Partialbruchzerlegung) *Ist p ein reelles Polynom, so erhält man anstelle der Resultate der beiden vorhergehenden Sätze:*

a)
$$p(x) = c\prod_{j=1}^{r}(x-x_j)^{\ell_j} \prod_{j=1}^{k}(x^2+2b_jx+c_j)^{m_j} \quad \textit{mit} \quad b_j^2 < c_j$$

b)
$$\begin{aligned}
r(x) = \frac{q(x)}{p(x)} &= h(x) + \frac{A_{11}}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{1\ell_1}}{(x-x_1)^{\ell_1}} \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \frac{A_{r1}}{(x-x_r)} + \ldots + \frac{A_{r\ell_r}}{(x-x_r)^{\ell_r}} \\
&\quad + \frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+2b_1x+c_1} + \ldots + \frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+2b_1x+c_1)^{m_1}} \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \frac{B_{k1}x+C_{k1}}{x^2+2b_kx+c_k} + \ldots + \frac{B_{km_k}x+C_{km_k}}{(x^2+2b_kx+c_k)^{m_k}} \\
&= h(x) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{\ell_j}\frac{A_{j\ell}}{(x-x_j)^\ell} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{m_j}\frac{B_{jm}x+C_{jm}}{(x^2+2b_jx+c_j)^m}.
\end{aligned}$$

Beweis. a) Ergibt sich aus Satz **??** durch Zusammenfassen der Terme $(x-z_j)$ und $(x-\overline{z_j}) = \overline{x-z_j}$.

b) Zusammenfassung der Terme mit $x - z_j$ und $x - \overline{z_j}$ in Satz **??** ergibt (mit $x^2 + 2bx + c = (x - z_j)(x - \overline{z_j})$, wobei wir auf den Index j verzichten)

$$\begin{aligned}
&\frac{g(x)}{(x^2+2bx+c)^\ell} \qquad \text{mit} \quad \deg g < 2\ell \\
&\qquad \text{(Polynomdivision mit } (x^2+2bx+c)^{\ell-1}\text{)} \\
&= \frac{A_1x + C_1}{x^2+2bx+c} + \frac{g_1(x)}{(x^2+2bx+c)^\ell} \qquad \text{mit} \quad \deg g_1 \le 2(\ell-1) \\
&\qquad \text{(Polynomdivision mit } (x^2+2bx+c)^{\ell-2}\text{)} \\
&= \frac{A_1x + C_1}{x^2+2bx+c} + \frac{A_2x + C_2}{(x^2+2bx+c)^2} + \frac{g_2(x)}{(x^2+2bx+c)^\ell} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{mit} \quad \deg g_2 \le 2(\ell-2) \\
&= \dots .
\end{aligned}$$

Dies liefert nach $\ell - 1$ Schritten die Behauptung. ■

Beispiel 15.4 $\dfrac{x^4+2}{x(x^2-1)}$.

Die Nullstellen des Nenners sind: $x_1 = 0\,,\ x_2 = 1\,,\ x_3 = -1$.
Polynomdivision mit Rest ergibt:

$$(x^4+2) : (x^3 - x) = x + \frac{x^2+2}{x(x^2-1)} \qquad (h(x) = x)\,.$$

Die Partialbruchzerlegung hat also die Form:

$$\frac{x^2+2}{x(x^2-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}\,.$$

Multiplikation mit dem Nenner $x(x^2-1)$ der linken Seite ergibt

$$x^2 + 2 = A_1x^2 - A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x^2 - A_3x\,.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{llcrcrcr}
x^2: & 1 & = & A_1 & + & A_2 & + & A_3, \\
x^1: & 0 & = & & & A_2 & - & A_3, \\
x^0: & 2 & = & -A_1. & & & &
\end{array}$$

Die letzte Gleichung liefert A_1; die zweite Gleichung liefert $A_2 = A_3$; zusammen mit der ersten Gleichung folgt also:

$$\frac{x^4+2}{x(x^2-1)} = x - \frac{2}{x} + \frac{3}{2}, \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1},$$

und somit für das gesuchte Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4+2}{x(x^2-1)}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2} - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\Big(\ln|x-1| + \ln|x+1|\Big) \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln\frac{(|x-1|\,|x+1|)^{3/2}}{|x|^2}. \end{aligned}$$

□

Beispiel 15.5 $\dfrac{1}{1+x^4}$.

Die Nullstellen des Nenners $1+x^4$ sind:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), & z_2 &= \overline{z_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), \\ z_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), & z_4 &= \overline{z_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (x-z_1)(x-z_2) &= x^2 - \sqrt{2}x + 1 = x^2 + 2b_1x + c_1, & b_1 &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, & c_1 &= 1, \\ (x-z_3)(x-z_4) &= x^2 + \sqrt{2}x + 1 = x^2 + 2b_2x + c_2, & b_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}, & c_2 &= 1, \end{aligned}$$

also

$$1 + x^4 = \Big(x^2 + \sqrt{2}x + 1\Big)\Big(x^2 - \sqrt{2}x + 1\Big).$$

Die Partialbruchzerlegung hat also die Form

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Multiplikation der Gleichung mit dem Nenner $(1+x^4)$ der linken Seite liefert in geeigneter Anordnung der Terme:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 1 & = & B_1x^3 & + & \sqrt{2}B_1x^2 & + & B_1x & & \\ & & & + & C_1x^2 & + & \sqrt{2}C_1x & + & C_1 \\ & + & B_2x^3 & - & \sqrt{2}B_2x^2 & + & B_2x & & \\ & & & + & C_2x^2 & - & \sqrt{2}C_2x & + & C_2. \end{array}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{array}{lcccccccccc} x^3: & 0 & = & B_1 & + & B_2, & & & & \\ x^2: & 0 & = & \sqrt{2}B_1 & - & \sqrt{2}B_2 & + & C_1 & + & C_2, \\ x^1: & 0 & = & B_1 & + & B_2 & + & \sqrt{2}C_1 & - & \sqrt{2}C_2, \\ x^0: & 1 & = & & & & & C_1 & + & C_2. \end{array}$$

Hieraus erhält man leicht

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}, \qquad -B_2 = B_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

und somit die explizite Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Mit der oben unter Nr. 3 angegebenen Formel erhalten wir also für die Stammfunktion:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x &= \frac{B_1}{2}\ln(x^2+2b_1x+c_1) + \frac{C_1 - B_1b_1}{\sqrt{c_1-b_1^2}}\arctan\frac{x+b_1}{\sqrt{c_1-b_1^2}} \\ &\quad + \frac{B_2}{2}\ln(x^2+2b_2x+c_2) + \frac{C_2 - B_2b_2}{\sqrt{c_2-b_2^2}}\arctan\frac{x+b_2}{\sqrt{c_2-b_2^2}} \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}(x-\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ &\quad \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}(x+\frac{1}{\sqrt{2}}). \end{aligned}$$

□