Elementarmathematik II

Ausarbeitung einer Vorlesung
vom Sommersemester 2006

Joachim Weidmann

Fachbereich Informatik und Mathematik
der Universität Frankfurt

Stand 10. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen, Konvergenz und Vollständigkeit

Das Thema dieser Vorlesung ist Analysis einschließlich einiger Anwendungen in der Geometrie. Grundlage der Analysis sind die reellen Zahlen und ihre Eigenschaften, insbesondere Konvergenz– und Vollständigkeitseigenschaften. Damit beschäftigt sich dieser erste Abschnitt.

1.1 Vorbemerkungen

Man geht aus von den natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{oder} \quad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Diese bilden die Grundlage für das (Ab–)Zählen der Elemente einer Menge.

Man sagt eine Menge M *hat m Elemente*, wenn man M schreiben kann in der Form

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\},$$

bzw., wenn es eine bijektive Abbildung von M auf $\{1, 2, \ldots, m\}$ gibt; wenn es ein solches m gibt, sagt man, die Menge ist endlich. Eine Menge M heißt *abzählbar* (*unendlich*), wenn sie sich in der Form

$$M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

schreiben läßt, bzw. präziser, wenn es eine bijektive Abbildung von M auf $\mathbb{N}$ gibt.

In $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ kann man uneingeschränkt *addieren* und *multiplizieren*, aber nur in gewissen Fällen *subtrahieren* und *dividieren*, d. h. die Gleichungen

$$a + x = b \quad \text{und} \quad a \cdot x = b$$

sind i. allg. nicht lösbar ($x = b - a$ existiert nur dann, wenn $b > a$ bzw. $b \geq a$ ist, $x = b/a$ existiert nur, wenn a Teiler von b ist).

Die Einführung der negativen Zahlen, d. h. der Übergang von $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erlaubt die uneingeschränkte Subtraktion. Der Übergang zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erlaubt die uneingeschränkte Division (falls $a \neq 0$ ist). All das wurde in Teil I der Vorlesung behandelt.

Für unser tägliches Leben (messen von Längen, Zeitintervallen,. . .) reichen die rationalen Zahlen offensichtlich aus.

Wenn man zwei Größen (Längen, Gewichte, Zeitintervalle,. . .) a und b vergleicht, kann es zunächst sein, dass ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $a = n \cdot b$, oder dass ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $a = \dfrac{n}{m} \cdot b = n \cdot \left(\dfrac{b}{m}\right)$ bzw. $m \cdot b = n \cdot a$.

Man sagt, die Größen a und b sind *kommensurabel* (sie haben ein gemeinsames Maß: hier $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$).

Das geht aber nicht immer: $a = 1$ und $b = \sqrt{2}$ sind nicht kommensurabel, denn $1 = \frac{n}{m}\sqrt{2}$ würde bedeuten, dass $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ rational ist.

Nun wird man es als selbstverständlich annehmen, dass es eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$ gibt, da dies die Seitenlänge eines Quadrats der Fläche 2 ist. Da wir die reellen Zahlen mit den Punkten des Zahlenstrahls identifizieren wollen, müssen wir also die Existenz von nicht–rationalen, *irrationalen Zahlen*, zulassen.

1.2 Reelle Zahlen als unendliche Dezimalbrüche

Statt der Menge der (aller) positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ betrachten wir zunächst die viel kleinere Menge der (endlichen) Dezimalbrüche

$$x = a_0, a_1, a_2 \dots a_k = a_0 + \sum_{j=1}^{k} a_j 10^{-j} = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_k}{10^k}$$

mit $a_0 \in \mathbb{N}_0$ und $a_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$ für $j \in \mathbb{N}$. Diese Zahlen liegen offenbar – in einem sehr anschaulichen Sinn – „dicht“ auf dem positiven Halbstrahl.

Welche rationalen Zahlen sind als solche Dezimalbrüche darstellbar? Es sind genau die Brüche, deren Nenner in gekürzter Form eine Zehnerpotenz teilt:

Jeder Bruch, dessen Nenner eine Zehnerpotenz teilt, ist als Dezimalbruch darstellbar: Im Bruch $\frac{a}{b}$ sei $b \cdot c = 10^k$; dann ist

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a \cdot c}{10^k} \quad \text{ein Dezimalbruch.}$$

Ist umgekehrt der Nenner des (gekürzten) Bruches kein Teiler einer Zehnerpotenz, so ist er nicht als Dezimalbruch darstellbar, der Bruch kann nämlich nicht so erweitert werden, dass er die Form $\frac{a}{10^k}$ hat. Die gilt z. B. für den Bruch $\frac{1}{3}$.

Formale Division führt zu

$$1 : 3 = 0,333\dots = 0,\overline{3},$$

und es ist

$$3 \cdot 0,33\dots33 = 0,99\dots99 < 1 < 1,00\dots02 = 3 \cdot 0,33\dots34.$$

Beide Seiten nähern sich der 1 beliebig gut an. Man sagt deshalb, der unendliche Dezimalbruch $0,\overline{3} = 0,333\dots$ stellt die Zahl 1/3 dar.

So kann jede reelle Zahl x (wir bleiben hier zunächst weiterhin bei den positiven) durch einen unendlichen Dezimalbruch dargestellt werden:

$$\begin{aligned} a_0 &:= \text{größte natürlich Zahl } < x, \\ a_1 &:= \text{größtes Element aus } \{0,1,\ldots,9\} \text{ mit } x_0 + x_1 10^{-1} < x, \\ &\vdots \\ a_{k+1} &:= \text{größtes Element aus } \{0,1,\ldots,9\} \text{ mit } \sum_{j=0}^{k+1} a_j 10^{-j} < x \end{aligned}$$

(es ist wesentlich, dass hier immer „echt kleiner" steht). Die Zahl x wird also beschrieben durch eine *Schachtelung* von Intervallen

$$\left(a_0, a_1 \ldots a_k,\ a_0, a_1 \ldots a_{k-1} a_k + 0,0\ldots 01\right) \quad (k \in \mathbb{N}_0);$$

x liegt in jedem dieser Intervalle. Da diese für große k beliebig klein werden, können nicht zwei verschiedene Zahlen in allen diesen Intervallen liegen, d. h. zwei verschiedene Zahlen liefern zwei verschiedene unendliche Dezimalbrüche.

Dieses Verfahren liefert immer einen unendlichen (nichtabbrechenden) Dezimalbruch, z. B. ist

$$1 = 0,\overline{9}, \quad \frac{34}{100} = \text{„}0,34\text{"} = 0,339\overline{9}$$

(Dezimalbrüche der Form $a_0, a_1 \ldots a_k 00\ldots$ mit $a_k \neq 0$ kommen nicht vor; der zugehörige unendliche Dezimalbruch ist $a_0, a_1 \ldots (a_k - 1)99\ldots$).

Zwei verschiedene Dezimalbrüche liefern auch zwei verschiedene Zahlen. O. E. sei

$$z_1 = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k a_{k+1} \ldots$$

$$z_2 = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{k-1} b_k b_{k+1} \ldots$$

mit (o. E.) $a_k < b_k$, $\ell \in \mathbb{N}$ minimal mit $b_{k+\ell} \neq 0$; dann ist $z_2 - z_1 > 10^{-k-\ell} > 0$, also $z_1 \neq z_2$.

Satz 1.1 *Der unendliche Dezimalbruch für x ist genau dann periodisch, wenn x rational ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $x = a_0, a_1 \ldots, a_k \overline{b_1 \ldots b_\ell}$. Dann ist (vgl. weiter unten für die Summe der geometrischen Reihe)

$$x = \frac{a_0 a_1 \ldots a_k}{10^k} + 10^{-k} b_1 \ldots b_\ell \sum_{j=1}^{\infty} (10^{-\ell})^j = \frac{a_0 a_1 \ldots a_k}{10^k} + b_1 \ldots b_\ell \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-\ell}}.$$

Diese Zahl ist rational.

$\Leftarrow$: Sei $x = \dfrac{p}{q} = p : q$. Der Divisionsalgorithmus liefert einen Dezimalbruch, der entweder

– abbricht, also (vgl. oben) als unendlicher Dezimalbruch mit $99\ldots$ (also Periode $\overline{9}$) endet, oder

– irgendwann wiederholt sich erstmals einer der endlich vielen Reste $(1, \ldots, q-1)$; in diesem Fall wiederholen sich auch die Ziffern im Ergebnis (insbesondere ist die Länge der Periode höchstens gleich $q-1$).

In beiden Fällen erhalten wir einen periodischen Dezimalbruch. ■

Wir haben damit eine eineindeutige (bijektive) Zuordnung zwischen den positiven reellen Zahlen und den unendlichen Dezimalbrüchen, wobei die

– rationalen Zahlen den periodischen Dezimalbrüchen, und

– irrationale Zahlen den nicht–periodischen Dezimalbrüchen

entsprechen.

1.3 Mächtigkeit von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$

Kann man etwas zu der Frage sagen, „wieviele" rationale, irrationale, reelle Zahlen es gibt? Sicher sind es nicht nur endlich viele. Wir wissen bereits, dass $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ abzählbar sind. Dies gilt auch für $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, \ldots\}.$$

Etwas schwieriger ist:

Satz 1.2 *Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar. (Als Übung kann gezeigt werden, dass auch die größere Menge der algebraischen Zahlen noch abzählbar ist.)*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die positiven rationalen Zahlen abzählbar sind. Man schreibt alle positiven rationalen Zahlen in der folgenden Form auf

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \ldots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{6}{3} & \ldots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots
\end{array}$$

Nun durchläuft man das Schema so:

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{2}, \quad 3, \quad 4, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{4}, \text{ usw.,}$$

wobei man entweder

- alle die Zahlen überspringt, die schon da waren, oder,
- von Anfang an alle Brüche, die gekürzt werden können, streicht (weil diese natürlich schon früher vorgekommen sind).

Dies liefert eine Abzählung der positiven rationalen Zahlen. ■

Satz 1.3 *Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht abzählbar (man sagt auch* überabzählbar*).*

Beweis. *Indirekter Beweis*: Wir nehmen an, dass $\mathbb{R}$ abzählbar ist und führen dies zum Widerspruch. Wenn $\mathbb{R}$ abzählbar ist, ist natürlich auch $(0,1]$ abzählbar (Beweis!). Wir nehmen also an, dass wir eine Abzählung

$$\begin{array}{llllll} 0, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ 0, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ 0, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

der Menge $(0,1]$ haben und definieren

$$a_i = 1, \quad \text{falls } a_{ii} \neq 1, \qquad a_i = 2, \quad \text{falls } a_{ii} = 1.$$

Dann ist

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

ein unendlicher Dezimalbruch, der in obiger Abzählung nicht enthalten ist, denn für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt: Die neue Zahl stimmt an der j–ten Stelle nicht mit der j–ten Zahl der Abzählung überein. Das ist ein Widerspruch dazu, dass es sich wirklich um eine Abzählung von $(0,1]$ handelte. ■

1:16.4.07

1.4 Ungleichungen

Ein wichtiges Instrument in der Analysis ist der Umgang mit Ungleichungen. Kurz berührt wurde dies bereits in der Elementarmathematik I. Anschaulich auf dem Zahlenstrahl bedeutet

- $a < b$, „a kleiner b", dass a links von b liegt.
- $a \leq b$, „a kleiner (oder) gleich b", dass a links von b liegt oder gleich b ist.

Entsprechend sind $a > b$ und $a \geq b$ zu verstehen.

Für natürliche oder positive rationale Zahlen q ist in diesem Sinn offensichtlich, dass gilt

$$a < b \Rightarrow qa < qb$$
$$a \leq b \Rightarrow qa \leq qb.$$

Allgemein gelten die bereits in Teil I der Vorlesung für rationale Zahlen angegebenen Eigenschaften:

Satz 1.4 *Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$. Außerdem gilt:*

- $a < b$ *und* $b < c \Rightarrow a < c$,
- $a < b \Rightarrow a + c < b + c$,
- $a < b$ *und* $c > 0 \Rightarrow ac < bc$,
- $a < b$ *und* $c < 0 \Rightarrow ac > bc$,
- $a > 0$ *und* $c > 1 \Rightarrow a < ac$,
- $a > 0$ *und* $c < 1 \Rightarrow a > ac$,
- $0 < a < b \Leftrightarrow 0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Hier wollen wir noch zwei interessante und wichtige Ungleichungen beweisen:

Satz 1.5 (Bernoullische Ungleichung) *Für $h > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Ist außerdem $n \geq 2$ und $h \neq 0$, so gilt

$$(1 + h)^n > 1 + nh.$$

Beweis. Induktion nach n.

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich.

$\boldsymbol{n \Rightarrow n+1}$: Aus der Ungleichung für n folgt (da $1 + h > 0$ ist)

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh)\\ &= 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h.\end{aligned}$$

Das ist die Ungleichung für $n+1$. Man sieht sofort, dass für $n \geq 2$ und $h \neq 0$ die $>$–Relation gilt. ∎

Es gibt zwei wichtige *Mittelbildungen*[1]: Für reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n$ ist das

$$\textit{Arithmetische Mittel}\ \ A(x_1,\dots,x_n) := \frac{x_1+\ldots+x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Sind die Zahlen $x_1, \dots, x_n \geq 0$, so definiert man das

$$\textit{Geometrische Mittel}\ \ G(x_1,\dots,x_n) := \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = \Big(\prod_{j=1}^{n} x_j\Big)^{1/n}.$$

Beide Mittel haben offenbar die Eigenschaft, dass sie zwischen dem größten und dem kleinsten der x_j liegen. Weiter gilt:

Satz 1.6 (AGM–Ungleichung) *Für $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt*

$$G(x_1,\dots,x_n) \leq A(x_1,\dots,x_n)$$

(Gleichheit gilt genau dann, wenn alle x_j gleich sind).

Beweis. Da für $\lambda > 0$ offensichtlich gilt

$$A(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = \lambda A(x_1,\dots,x_n), \quad G(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = \lambda G(x_1,\dots,x_n)$$

genügt es den Fall zu betrachten, in dem

$$A(x_1,\dots,x_n) = 1$$

gilt.[2] Die Behauptung ist offenbar richtig, wenn alle $x_j = 1$ sind (dann gilt das Gleichheitszeichen) oder wenn $x_{j_0} = 0$ für ein j_0 gilt ($G(x_1,\dots,x_n) = 0$)). Es bleibt also zu zeigen:

[1]Das *harmonische Mittel* ist $H(x_1,\dots,x_n) = 1/A(x_1^{-1},\dots,x_n^{-1})$, also der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte der x_j, ·

[2]Sonst betrachtet man mit $A := A(x_1,\dots,x_n)$ statt x_j die Zahlen $y_j := x_j/A$ mit $A(y_1,\dots,y_n) = A$ und erhält aus dem Spezialfall

$$G(x_1,\dots,x_n) = AG(y_1,\dots,y_n) \leq AA(y_1,\dots,y_n) = A(x_1,\dots,x_n).$$

Gilt (neben der Voraussetzung $x_1 + \ldots + x_n = n$) $x_j > 0$ für alle j und $x_k \neq 1$ für (mindestens) ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n < 1$; damit ist dann die Behauptung – einschließlich des Zusatzes – bewiesen. Wir beweisen dies wieder durch Induktion:

$\boldsymbol{n = 1}$: Der Fall tritt gar nicht ein.
$\boldsymbol{n = 2}$: Sei also o. E. $x_1 = 1 + \varepsilon$, $x_2 = 1 - \varepsilon$ (mit $\varepsilon > 0$).

Dann folgt

$$G(x_1, x_2)^2 = x_1 x_2 = (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon^2 < 1 = A(x_1 x_2)^2.$$

n$\boldsymbol{\Rightarrow n + 1}$: Sei also $x_0 + \ldots + x_n = n + 1$ und o. E. $x_0 = 1 - \alpha < 1$ und $x_2 = 1 + \beta > 1$. Mit

$$x_1' := x_0 + x_1 - 1 = 1 - \alpha + \beta$$

gilt dann

$$\begin{aligned} x_1' + x_2 + \ldots + x_n &= x_0 + x_1 - 1 + x_2 + \ldots + x_n = n + 1 - 1 = n, \\ x_0 x_1 &= 1 - \alpha + \beta - \alpha\beta < x_1', \end{aligned}$$

und somit

$$x_0 x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n < x_1' x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \leq 1.$$

■

1.5 Konvergenz und Vollständigkeit

Eine Folge $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ reeller Zahlen *konvergiert gegen* ein $x \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$ für $n \to \infty$, $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, wenn x_n für große n sehr nahe bei x liegt, oder mathematisch präziser:

– zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für $n \geq N_\varepsilon$, oder kürzer

– $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_\varepsilon$, so dass $\forall n \geq N_\varepsilon$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$.

(Offensichtlich entspricht diese Definition nicht ganz der naiven Vorstellung von Konvergenz: „für $n \to \infty$ kommt x_n dem Grenzwert x *immer näher.*“) Es ist nicht schwer zu zeigen, dass aus $x_n \to x$ und $y_n \to y$ folgt

$$x_n + y_n \to x + y, \quad x_n \cdot y_n \to x \cdot y,$$

$$\frac{x_n}{y_n} \to \frac{x}{y}, \text{ falls } y \neq 0 \text{ ist.}$$

(ist $y = 0$, so hat die letzte Aussage keinen Sinn; ist $y \neq 0$, so ist wegen $y_n \to y$ offenbar auch $y_n \neq 0$ für hinreichend große n, und nur die entsprechenden Terme $\dfrac{x_n}{y_n}$ werden betrachtet).

> Aus $x_n \to x$ und $x_n \geq 0$ für unendlich viele n folgt $x \geq 0$. Aber aus $x_n > 0$ folgt i. Allg. nicht $x > 0$.

Eine Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ heißt eine *Nullfolge*. Es gilt $x_n \to x$ genau dann, wenn $(x_n - x)$ eine Nullfolge ist.

Eine Folge (x_n) heißt *monoton*, wenn gilt

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad x_n \geq x_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N};$$

genauer sagt man (monoton) *wachsend* im 1. Fall und (monoton) *fallend* im 2. Fall; *strikt wachsend*, falls $x_n < x_{n+1}$ gilt, *strikt fallend*, falls $x_n > x_{n+1}$ gilt.

Eine Folge (x_n) heißt *beschränkt*, falls ein $C \geq 0$ exisitert mit $|x_n| \leq C$ für alle n, *nach oben beschränkt*, falls $x_n \leq C$ für alle n, *nach unten beschränkt*, falls $x_n \geq C$ für alle n. Jedes C dieser Art heißt eine *obere* bzw. *untere Schranke* der Folge (x_n).

Satz 1.7 (Monotonieprinzip) *Ist die Folge (x_n) monoton und beschränkt (d. h. wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt), so gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x_n \to x$.*

Beweis. Sei (x_n) wachsend und o. E. $x_n \geq 0$ (andernfalls betrachtet man die Folge $(x_n - x_1)$),

$$x_n = a_n, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots \quad (a_n \in \mathbb{N}, a_{n_j} \in \{0, 1, \ldots, 9\}).$$

Dann ist die Folge (a_n) wachsend in $\mathbb{N}$ und beschränkt, d. h. es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a_{n_0}$ für $n \geq n_0$. Für $n \geq n_0$ ist dann auch die Folge (a_{n1}) wachsend in $\{0, 1, \ldots, 9\}$, d. h. es gibt ein $n_1 \geq n_0$ mit $a_{n1} = a_{n_1 1}$ für $n \geq n_1$, usw., und es gilt

$$x_n \to a_{n_0}, a_{n_1 1}a_{n_2 2}a_{n_3 3}\ldots.$$

Falls (x_n) fallend ist, kann man ähnlich verfahren, oder zeigt zunächst, dass die Folge $(-x_n)$ konvergiert. ∎

Satz 1.8 *Für $|q| < 1$ gilt $q^n \to 0$, für $q \leq -1$ und $q > 1$ ist (q^n) divergent (für $q = 1$ gilt natürlich $q^n \equiv 1 \to 1$).*

Beweis. Nur der erste Fall ist nicht offensichtlich: Jedenfalls ist $|q^n|$ für $|q| < 1$ monoton fallend mit unterer Schranke 0, also $|q^n| \to c \geq 0$. Dann gilt

$$|q^{n+1}| \to c \ \text{ und } |q^{n+1}| = |q^n|\ |q| \to |q|c,$$

also $c = |q|c$, woraus wegen $|q| < 1$ folgt $c = 0$. ■

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn es ein C gibt mit $|x| \leq C$ für alle $x \in M$ (entsprechend: *nach oben* bzw. *unten beschränkt*). Gibt es eine kleinste obere bzw. größte untere Schranke?

Satz 1.9 (Supremumsprinzip) *Jede nach oben beschränkte Menge M in $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke, das* Supremum *von M, $\sup M$. Entsprechend besitzt jede nach unten beschränkte Menge eine größte untere Schranke, das* Infimum *von M, $\inf M$. Es gibt Folgen (x_n) und (y_n) aus M mit $x_n \to \sup M$ und $y_n \to \inf M$.*

Beweis. Ohne Einschränkung betrachten wir die obere Schranke. Sei C eine obere Schranke, $x_1 \in M$ und $C_1 := C$. Ist $\dfrac{C_1 + x_1}{2}$ eine obere Schranke, so wählen wir $x_2 := x_1$ und $C_2 := \dfrac{C_1 + x_1}{2}$. Ist $\dfrac{C_1 + x_1}{2}$ nicht obere Schranke, so wählen wir für x_2 ein Element aus M mit $x_2 > \dfrac{C_1 + x_1}{2}$ und $C_2 := C_1$. Verfährt man so weiter, so erhält man eine wachsende Folge (x_n) aus M mit oberer Schranke C und eine fallende Folge (C_n) mit gleichem Grenzwert. Dieser ist die kleinste obere Schranke (für jedes $x < C$ gibt es $x_n \in M$ mit $x_n > x$; für jedes $y > C$ gibt es obere Schranken C_n mit $C_n < y$). ■

2:23.4.07

Eine Folge (x_n) heißt eine *Cauchy–Folge* (C. F.) wenn die Glieder für große n beliebig nahe zusammen liegen, genauer, wenn gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N} \ \text{ mit } n, m \geq N_\varepsilon |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Offensichtlich gilt: *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge* (denn für große n liegen alle x_n nahe beim Grenzwert, also liegen auch alle x_n und x_m für große n und m nahe zusammen).

Die Umkehrung ist nicht so selbstverständlich:

Satz 1.10 (Cauchy–Kriterium) *Jede Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent. (Diese Eigenschaft von $\mathbb{R}$ – und von viel allgemeinerer Strukturen – nennt man* Vollständigkeit*. In $\mathbb{R}$ ist sie äquivalent zum Monotonieprinzip und zum Supremumsprinzip, zum Intervallschachtelungsprinzip, zum Dedekindschen Schnittaxiom und zum Satz von Belzano–Weierstraß.)*

Beweis. a) Wir zeigen zuerst, dass jede Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$ beschränkt ist: Nach Definition gibt es ein N_1 mit

$$|x_n - x_m| < 1 \quad \text{für } n, m \geq N_1 \qquad \text{insbesondere } |x_n - x_{N_1}| < 1 \quad \text{für } n \geq N_1.$$

Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| \leq \max\Big\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N_1-1}|, |x_{N_1}| + 1\Big\}.$$

b) Jede Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$ enthält eine monotone Teilfolge: Enthält (x_n) eine wachsende Teilfolge, so sind wir fertig. Sei dies also nicht der Fall. Dann gibt es ein kleinstes $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \leq x_{n_1}$ für $n \geq n_1$, ein kleinstes $n_2 > n_1$ mit $x_n \leq x_{n_2}$ für $n \geq n_2$, usw. Diese Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine fallende Teilfolge von (x_n).

c) Nach dem Monotonieprinzip ist die Folge (x_{n_k}) konvergent gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Es bleibt zu zeigen, dass die gesamte Folge gegen dieses x konvergiert. Intuitiv ist das klar, die x_{n_k} liegen für große k sehr nahe bei x; da die x_n für große n sehr nahe beisammen liegen, müssen sie also für große n auch nahe bei x liegen, $x_n \to x$. Der präzise Beweis ist etwas mühsamer:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es

– ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geq N$,

– ein $K \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geq N$ und $|x_{n_k} - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $k \geq K$.

Dann gilt für $n \geq \max\{N, n_K\}$

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_K}| + |x_{n_K} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

d. h. es gilt $x_n \to x$. ∎

Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $[a_n, b_n] = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\}$ mit $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b_n - a_n \to 0$ (vgl. S. 6). Der folgende Satz liefert eine weitere zur Vollständigkeit äquivalente Eigenschaft:

Satz 1.11 (Intervallschachtelungsprinzip) *Für jede Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in [a_n, b_n]$ für alle n.*

Beweis. (a_n) ist eine wachsende, durch b_1 nach oben beschränkte Folge, (b_n) eine fallende durch a_1 nach unten beschränkte Folge. Wegen $b_n - a_n \to 0$ haben beide Folgen den gleichen Grenzwert x. Es gilt $a_n \leq x \leq b_n$ für alle n, d. h. x ist in allen Intervallen enthalten. Andererseits kann es keine zwei verschiedenen Punkte $x \neq y$ (also $|x - y| > 0$) geben, die in all diesen Intervallen mit beliebig kleiner Länge enthalten sind. ∎

Bemerkung 1.12 Das Intervallschachtelungsprinzip gilt i. allg. nicht für nicht abgeschlossene Intervalle: sei z. B. $(a_n, b_n] = \left(0, \frac{1}{n}\right]$. Dann gibt es offenbar kein x, das in allen (a_n, b_n) enthalten ist.

Ein *Schnitt* in $\mathbb{R}$ ist eine Zerlegung von $\mathbb{R}$ in zwei Teilmengen A und B (d. h. es gilt $\mathbb{R} = A \cup B$) mit

$$x < y \quad \text{für alle } x \in A, y \in B.$$

Hiermit gibt es eine weitere zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ äquivalente Eigenschaft:

Satz 1.13 (Dedekindsches Schnittaxiom) *Zu jedem Schnitt in $\mathbb{R}$ gibt es genau einen Teilungspunkt $z \in \mathbb{R}$ mit $x \leq z \leq y$ für alle $x \in A$, $y \in B$. Es gilt $z = \sup A = \inf B$.*

Beweis. Seien x_1, y_1 beliebige Punkte mit $x_1 \in A$, $y_1 \in B$. Sind $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ gefunden, so sei

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n, \quad y_{n+1} := \frac{x_n + y_n}{2}, \quad \text{falls } \frac{x_n + y_n}{2} \in B, \\ x_{n+1} &:= \frac{x_n + y_n}{2}, \quad y_{n+1} = y_n, \quad \text{falls } \frac{x_n + y_n}{2} \in A. \end{aligned}$$

Dies liefert eine Intervallschachtelung, und der dadurch definierte Punkt z hat die gewünschte Eigenschaft, da alle x_n untere Schranken von B und alle y_n obere Schranken von A sind. ■

Satz 1.14 (Bolzano–Weierstraß) *Jede beschränkte Folge (x_n) aus $\mathbb{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Sei $a \leq x_n \leq b$. Wir halbieren das Intervall $[a, b]$ sukzessive und wählen immer die (eine, z. B. die linke) Hälfte I_k, in der unendlich viele x_n liegen. Definiere nun

$$\begin{aligned} n_1 &:= \text{ kleinster Index mit } x_{n_1} \in I_1, \\ n_{k+1} &:= \text{ kleinster Index } \geq n_k \text{ mit } x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}. \end{aligned}$$

Diese Folge ist offenbar eine Cauchyfolge, also konvergent. (Ein alternativer Beweis benutzt die Tatsache, dass (x_n) eine monotone [und beschränkte] Teilfolge enthält.) ■

1.6 Konvergenz von Reihen

Abschließend betrachten wir noch kurz die Konvergenz von *Reihen.* Sei (x_n) eine reelle Folge. Man kann sich fragen, ob man die unendlich vielen Zahlen x_n aufsummieren kann. Die Rechengesetze erlauben nur die Addition von 2 Zahlen und damit, induktiv, die Addition endlich vieler Zahlen. Man geht deshalb so vor: Sei

$$s_m := \sum_{n=0}^{m} x_n \qquad \text{die } m\text{-te } \textit{Partialsumme.}$$

Man sagt die *Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ ist *konvergent* (bzw. *divergent*), wenn die Folge (s_m) der Partialsummen konvergiert (bzw. divergiert, d. h. nicht konvergiert). Der Limes s der Folge (s_m) heißt die *Summe* der Reihe.

Satz 1.15 (Notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe) *Ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *konvergent, so gilt* $x_n \to 0$*. (Falls* $x_n \to 0$ nicht *gilt, ist also auf jeden Fall Konvergenz ausgeschlossen.)*

Beweis. Da die Folge (s_m) nur dann konvergieren kann, wenn die s_m für große m (also insbesondere s_m und s_{m+1}) beliebig nahe zusammen liegen, kann $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ nur dann konvergieren, wenn die Folge (x_n) gegen 0 konvergiert. ∎

Die Voraussetzung $x_n \to 0$ ist aber bei weitem nicht ausreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum x_n$, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 1.16 Die *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Das sieht man z. B. so:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2}, \\
\frac{1}{3} + \frac{1}{4} &> \frac{1}{2} \\
\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} &> \frac{1}{2} \\
&\vdots \\
\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} &> \frac{1}{2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

also

$$s_{2^n} > 1 + n \cdot \frac{1}{2},$$

und diese Werte werden beliebig groß. □

Zu den wichtigsten Reihen zählt die *geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$.

Satz 1.17 *Die geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ *ist genau dann konvergent, wenn* $|q| < 1$ *gilt. Die Summe ist dann*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis. Die Partialsummen sind leicht zu berechnen:

$$s_m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \text{ für } q = 1, \quad s_m = m+1 \text{ für } q = 1.$$

Das sieht man leicht durch Induktion, oder – für $a \neq 1$ – so:

$$\begin{aligned} s_m &= 1 + q + \ldots q^m \\ q s_m &= \qquad q + \ldots q^m + q^{m+1}, \end{aligned}$$

also $(1-q)s_m = 1 - q^{m+1}$, d. h.

$$s_m = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| < 1$ folgt daraus mit Hilfe von Satz 1.8 $s_m \to \dfrac{1}{1-q}$. Für $|q| \geq 1$ folgt die Divergenz aus der obigen Bemerkung. ■

Satz 1.18 (Majoranten–Kriterium) *Ist* $\sum x_n$ *konvergent und* $|y_n| \leq x_n$ *(also* $x_n \geq 0$*), so ist* $\sum y_n$ *konvergent und es gilt* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$*. Ist* $\sum x_n$ *divergent und* $y_n \geq |x_n|$*, so ist* $\sum y_n$ *divergent. (Für die Konvergenz– bzw. Divergenzaussage genügt es, wenn die Ungleichungen für hinreichend große* n *erfüllt sind.)*

3:30.4.07

Beweis. Sind (s_n) und (t_n) die Folgen der Partialsummen von $\sum x_n$ bzw. $\sum y_n$, so ist $|t_n - t_m| \leq |s_n - s_m|$ im 1. Fall, $\geq |s_n - s_m|$ im 2. Fall. Im 1. Fall gilt außerdem $\sum\limits_{n=1}^{m} y_n \leq \sum\limits_{n=1}^{m} x_n$ für alle m. ■

1.7 Übungen

1.1 Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Man zeige:

a) In der Definition kann „ganzzahlig“ durch „rational“ ersetzt werden.

b) Die Menge der Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten ist abzählbar. *Hinweis*: Man betrachte zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$ mit ganzzahligen Koeffizienten vom Betrag $\leq n$.

c) Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

1.2 Sei u_n der Umfang des dem 1–Kreis einbeschriebenen regulären 2^n–Ecks, U_n der Umfang des dem 1–Kreis umbeschriebenen regulären 2^n–Ecks. Man begründe, dass beide Folgen konvergieren und den gleichen Grenzwert haben (den man mit 2π bezeichnet, dem Umfang des 1–Kreises).

1.3 Das „Hilbertsche Hotel“ hat unendlich (genauer abzählbar unendlich) viele Zimmer und ist voll belegt. Was kann getan werden, wenn

a) ein weiterer Gast kommt,

b) unendlich viele weitere Gäste kommen,

c) unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen weiteren Gästen kommen,

um diese unterzubringen.

1.4 Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? (begründen oder widerlegen):

a) Wenn es eine Vorschrift gibt, wie aus der n–ten Dezimalstelle die $(n+1)$–te Dezimalstelle bestimmt wird, ist der Bruch periodisch.

b) Wenn der Bruch periodisch ist, gibt es eine Vorschrift, wie aus der n–ten Dezimalstelle die $(n+1)$–te Dezimalstelle bestimmt wird.

c) Wenn es für jedes n eine Vorschrift gibt, mit der die n–te Dezimalstelle bestimmt werden kann, dann ist der Bruch periodisch.

1.5 Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei: $0! := 1, 1! := 1$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

a) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$ gilt $n! \geq k!(k+1)^{n-k}$.

b) Mit Hilfe von Teil a ($k = 1$) und der geometrischen Reihe zeige man, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

konvergiert.

c) Mit Hilfe von Teil a zeige man

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 2,75.$$

1.6 a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(Induktion oder geeignete Zerlegung von $\frac{1}{k(k+1)}$).

b) Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergieren.

c) Es gilt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2$ (genau: $\frac{\pi^2}{6} \sim 1,645$).

1.7 Man begründe (Beweis) oder widerlege (Gegenbeispiel):

a) Aus $x_n \to 0$ und (x_n) beschränkt folgt $x_n y_n \to 0$.

b) Sind $\sum x_n$ und $\sum y_n$ divergent, so ist auch $\sum (x_n + y_n)$ divergent.

c) Sind $\sum x_n$ und $\sum y_n$ konvergent, so ist auch $\sum x_n y_n$ konvergent.

1.8 Man gebe einen Schnitt $\{A, B\}$ in $\mathbb{R}$ an, dessen Teilungspunkt $\sqrt[3]{2}$ ist.

2 Stetige Funktionen

Eine *Funktion* (Abbildung) f ist eine Zuordnung, die jedem x einer Menge $D = D_f \subset X$ ein $y = f(x)$ einer (i. allg. anderen) Menge Y zuordnet: Man schreibt dafür $f : D_f \to Y$, $x \mapsto f(x)$. D_f heißt der *Definitionsbereich* der Funktion f. Die Menge

$$\{f(x) : x \in D_f\}$$

heißt der *Bildbereich* oder der *Wertebereich* von f. Man beachte: Jedem $x \in D_f$ wird genau ein Wert $f(x)$ zugeordnet. Dagegen kann es zu einem $y \in Y$ mehrere Elemente auf D_f geben, deren Bild gleich x ist. f heißt

– *injektiv*, wenn aus $x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$ bzw. aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$,

– *surjektiv*, wenn $\{f(x) : x \in D_f\} = Y$ gilt,

– *bijektiv*, wenn es injektiv und surjektiv ist.

Nur die Injektivität ist eine wesentliche Bedingung; die Surjektivität läßt sich durch geeignete Wahl (Verkleinerung) von Y stets erzwingen.

Mathematisch lassen sich die Funktionen von $\mathbb{R}$ (oder einer Teilmenge D von $\mathbb{R}$) nach $\mathbb{R}$ am leichtesten erfassen. Deshalb beschränken wir uns zunächst darauf, wobei viele Begriffe und Ergebnisse ohne Probleme auf allgemeinere Situationen übertragbar sind.

Die Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) stellt man sich zunächst gern dynamisch so vor: Sei D z. B. ein Zeitintervall, $f(t)$ der Ort eines Körpers zur Zeit t [3]. Für t gegen t_0 ($t \to t_0$) nähert sich $f(t)$ dem Ort $f(t_0)$ immer mehr an. Dieser Vorstellung entspricht das folgende Beispiel ($t_0 = 0$)

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \dfrac{1}{t} & \text{für } t \neq 0, \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

offenbar nicht ganz (obwohl sie im Sinne der unten formulierten Definition durchaus stetig ist). Für kleine t ist zwar $f(t)$ nahe bei $f(0)$, die Entfernung schwankt aber, wenn auch mit immer kleineren Ausschlägen. Auch die häufig benutzte Formulierung „f ist stetig, wenn sich der Graph von f in einem Zug zeichnen läßt“ trifft die Sache nicht ganz. Es stellt sich heraus, dass die Stetigkeit umgangssprachlich schwer zu fassen ist, am ehesten etwa so: Für t hinreichend nahe bei t_0 ist $f(t)$ beliebig nahe bei $f(t_0)$. Mathematisch sauber wird die Definition, wenn man die Reihenfolge der Größen t und f vertauscht: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt* x_0, wenn gilt

[3] Oder z. B. die Temperatur, der Druck, die Stärke einer Kraft an einem bestimmten Ort zur Zeit t, oder die Geschwindigkeit eines Körpers zur Zeit t, oder ...

– Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$, oder abgekürzt

– $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f heißt *stetig*, wenn es in jedem Punkt von D_f stetig ist (man beachte, dass δ i. allg. nicht nur von ε, sondern auch von x_0 abhängt; vgl. weiter unten „gleichmäßig stetig"). Offensichtlich sind

– die *konstante Funktion* $f(x) = c$ für alle x ($\delta > 0$ kann beliebig gewählt werden),

– die *identische Funktion* $f(x) = \mathrm{id}(x) = x$ für alle x (es kann $\delta = \varepsilon$ gewählt werden)

stetig.

Nicht ganz so offensichtlich ist dies für Funktionen wie $f(x) = x^2$ oder x^m oder allgemeiner für Polynome. Dies läßt sich aber leicht mit dem folgenden Satz beweisen:

Satz 2.1 *f ist genau dann stetig in x_0, wenn gilt: für jede Folge (x_n) aus D_f mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$. In $\mathbb{R}$ ist Stetigkeit*=Folgenstetigkeit.

Beweis. $\Rightarrow$: Sei (x_n) eine Folge aus D_f mit $x_n \to 0$ (zu zeigen: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall\ n \geq N$ gilt $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$).

Nach Voraussetzung gilt

$$\underline{\forall\ \varepsilon > 0}\ \ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x\ \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Wegen $x_n \to x$ gilt (für das gewählte ε)

$$\underline{\exists\ N \in \mathbb{N}\ \text{ so, dass }\ \forall\ n \geq N}\ \text{ gilt } |x_n - x_0| < \delta$$

und somit

$$\forall\ n \geq N\ \text{ gilt } \underline{|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon}.$$

Liest man nun nur das Unterstrichene, so hat man $f(x_n) \to f(x_0)$.

$\Leftarrow$: *Indirekt*: Wäre f nicht stetig in x_0, so würde gelten[4]

$$\underline{\exists\ \varepsilon > 0}\ \ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x\ \text{ mit } |x - x_0| < \delta\ \text{ und } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$$

[4]Wie verneint man eine Aussage der Form $\forall\ a \in A$ gilt die Aussage $B(a)$? Offenbar so: $\exists a \in A$ so, dass $B(a)$ nicht gilt. Entsprechend wird $\exists\ a \in A$ so, dass $B(a)$ gilt durch $\forall\ a \in A$ nicht verneint. Iteration dieser Schritte liefert die Negation zusammengesetzter Aussagen.

Wählt man speziell $\delta = \frac{1}{n}$, so folgt

$$\underline{\forall\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_n \;\text{ mit } |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \;\text{ und } |f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon.}$$

Damit hat man eine Folge (x_n) aus D_f mit $x_n \to x_0$ und $f(x_n) \not\to f(x_0)$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Mit diesem Satz ist es für praktisch alle einfachen Funktionen leicht, die Stetigkeit (oder ggf. in gewissen Punkten) die Unstetigkeit nachzuweisen. Insbesondere:

Satz 2.2 *Beliebige Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig. Speziell sind alle Polynome stetig.*

Der folgende Satz scheint anschaulich selbstverständlich.

Satz 2.3 (Zwischenwertsatz) *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (mindestens) ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = c$.*

Beweis. Im Sinne der anschaulichen Vorstellung, dass f stetig ist, wenn der Graph in einem Zug gezeichnet werden kann, ist die Aussage offensichtlich. Aber nun zum echten Beweis: O. E. sei $A := f(a) < c < f(b) =: B$.
Ist $f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = c$, so haben wir das/ein geeignetes x_0 gefunden.
Ist $f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) > c$, so wählen wir $a_1 := a$, $b_1 := \frac{a+b}{2}$.
Ist $f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < c$, so wählen wir $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$.
Nun betrachtet man f auf $[a_1, b_1]$ mit $f(a_1) < c < f(b_1)$ und verfährt so weiter. Das liefert eine Intervallschachtelung $\{[a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ und ein x_0 mit $a_n \to x_0$, $b_n \to x_0$ und $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = c$. ■

Beispiel 2.4 Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle. Schreibt man das Polynom $p(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ für $x \neq 0$ in der Form

$$p(x) = x^n \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-n} = x^n(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_0 x^{-n}),$$

so erkennt man (da n ungerade ist), dass $p(x)$ für große positive x das Vorzeichen von a_n hat, während es für große negative x das Vorzeichen von $-a_n$ hat. Nach dem Zwischenwertsatz muß es mindestens ein x_0 geben mit $p(x_0) = 0$. □

Hiermit läßt sich auch ein durchaus nichttriviales geometrisches Problem lösen:

Beispiel 2.5 Seien A und B zwei „beliebige“ Gebiete in der Ebene (wir verstehen darunter Bereiche der Ebene, die von einer – evtl. auch mehreren – geschlossenen Kurven umrandet werden). Dann gibt es eine gerade Linie, die beide Gebiete halbiert.

Zu jeder Richtung α (= Winkel zu einer beliebigen festen Richtung = 0 bis 360°) gibt es eine Gerade S_α mit dieser Richtung, die A halbiert: Da sich die Anteile rechts und links des Strahls bei Parallelverschiebung stetig ändern, folgt dies aus dem Zwischenwertsatz. Alle diese Geraden s_α gehen natürlich durch den Schwerpunkt von A.

Sei nun $f(\alpha)$ der Anteil von B, der (o. E.) links von S_α liegt. Wird B durch alle S_α genau halbiert, so können wir alle diese Geraden wählen. Ist dies nicht der Fall, so gibt es ein α_- mit $f(\alpha_-) < \frac{1}{2}$ und ein α_+ (z. B. $\alpha_+ = \alpha_- \pm 180°$) mit $f(\alpha_+) > \frac{1}{2}$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt die Behauptung; dieser hängt offenbar stetig von α ab. □

Analog kann man im Raum beweisen, dass man durch eine Ebene gleichzeitig drei Mengen halbieren kann (*Schinkenbrötchensatz*: Man kann ein Schinkenbrötchen mit einem Schnitt so teilen, dass Brötchen, Butter und Schinken genau halbiert werden).

Nicht ganz so einfach wie der Zwischenwertsatz ist die folgende Aussage zu beweisen:

Satz 2.6 (Satz vom Maximum oder Minimum) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt (d. h. es gibt ein $C \geq 0$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a,b]$) und es gibt ein $x_{\max} \in [a,b]$, das* Maximum*, mit $\max f := f(x_{\max}) \geq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, und ein $x_{\min} \in [a,b]$, das* Minimum*, mit $\min f := f(x_{\min}) \leq f(x)$ für alle $x \in [a,b]$.*

Beweis. a) *Beschränktheit*: Wäre f unbeschränkt, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $|f(x_n)| \geq n$. Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) mit $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$, also $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, ein Widerspruch zu $|f(x_{n_k})| \geq n_k$.

b) *Existenz des Maximums*: Die Menge $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ der Funktionswerte von f ist nach Teil a nach oben beschränkt. Sei M das Supremum dieser Menge, kurz auch als $\sup M$ bezeichnet. Dann gibt es eine Folge (x_n) aus $[a,b]$ mit $f(x_n) \to M$. Eine Teilfolge (x_{n_k}) konvergiert gegen ein $x_0 \in [a,b]$ und es gilt $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M = \sup f$. ■

Beispiel 2.7 Der Satz vom Maximum gilt nicht, wenn das Intervall unbeschränkt oder nicht abgeschlossen ist. Man betrachte z. B. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ oder $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. □

Hat man eine Folge (f_n) stetiger Funktionen mit $f_n(x) \to f(x)$ für alle x, man nennt dies *punktweise Konvergenz*, so ist i. allg. f nicht stetig.

Beispiel 2.8 Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Dann gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

f ist offensichtlich nicht stetig. □

Beispiel 2.9 Sei $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. Dann gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [0,\infty)$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Wieder ist f offensichtlich unstetig. Warum gilt $\sqrt[n]{x} \to 1$ für $x \in (0,\infty)$?
Sei zunächst $x > 1$: Dann ist $\sqrt[n]{x} > 1$, also $\sqrt[n]{x} = 1 + h_n$ mit $h_n > 0$. Daraus folgt [5]

$$x = (1+h_n)^n > 1 + nh_n > nh_n,$$

und somit

$$0 < h_n < \frac{x}{n}, \qquad \text{also } h_n \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty,$$

d. h. es gilt $\sqrt[n]{x} \to 1$ für $n \to \infty$.
Für $0 < x < 1$ ist $\frac{1}{x} > 1$, woraus folgt

$$\sqrt[n]{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x}}} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.$$

□

Bemerkung 2.10 Es gibt i. wes. zwei Möglichkeiten, die etwas unerfreuliche Situation in den obigen Beispielen zu vermeiden. Man definiert:

– Die Funktionen f_n (oder entsprechend eine beliebige Menge von Funktionen) heißen *gleichgradig stetig*, wenn gilt

  $$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 \ \text{ so, dass } \forall\, n \in \mathbb{N} \ \text{ und } \forall\, x, y \ \text{ mit } |x-y| < \delta \ \text{ gilt } |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

  Dies bedeutet übrigens auch für die einzelnen Funktionen mehr als nur die Stetigkeit: Sie sind gleichmäßig stetig.

[5] Für $h > 0$ ist das offensichtlich. Allgemeiner gilt sogar die *Bernoullische Ungleichung*: für $h > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+h)^n \geq 1 + nh$ ($>$ für $n \geq 2$). Dies beweist man durch Induktion:
$n = 1$: offensichtlich.
$n \Rightarrow n+1$: $(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) = 1 + (n+1)h + nh^2 > 1 + (n+1)h$.

– Eine Funktion heißt *gleichmäßig stetig*, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \text{so, dass } \forall\, x, y \;\; \text{mit } |x - y| < \delta \;\; \text{gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

– Die Folge (f_n) *konvergiert gleichmäßig* gegen f, wenn gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \;\; \text{so, dass } \forall\, n \geq N \;\; \forall\, x \;\; \text{gilt } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Mit diesen Definitionen gilt:

– *Sind die Funktionen f_n gleichgradig stetig und gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle x, so ist f stetig.*

– *Sind die Funktionen f_n stetig und konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, so ist f stetig.*

Man mache sich (zumindest intuitiv) klar, dass in obigen Beispielen diese Voraussetzungen beide verletzt sind. Die Beweise beider Aussagen sind sehr einfach, nachdem man sich Voraussetzungen und Aussagen formal klar gemacht hat.

4:7.5.07

2.1 Übungen

2.1 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Sind die folgenden Aussagen richtig (Beweis) oder falsch (Gegenbeispiel)?
(Achtung: Man darf natürlich nicht davon ausgehen, dass f monoton ist.)

a) Das Bild $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ eines beliebigen Intervalls ist ein Intervall.

b) Das Bild eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ ist abgeschlossen.

c) Das Bild eines offenen Intervalls ist offen.

2.2 a) Mit Hilfe einer geeigneten stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall zeige man: Unter den Rechtecken mit gleichem Umfang U gibt es eines mit maximaler Fläche.

b) Elementargeometrisch zeige man, dass dies das Quadrat mit Kantenlänge $U/4$ ist.

2.3 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig im Punkt x, wenn für jede monotone Folge (x_n) mit $x_n \to x$ gilt

$$f(x_n) \to f(x).$$

Anmerkung: Mann nennt f *linksstetig* (*rechtsstetig*), wenn dies für wachsende (fallende) Folgen (x_n) gilt.

2.4 Mit Hilfe von Aufgabe 2.3 zeige man, dass die Wurzelfunktion

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \;\; f(x) = \sqrt{x}$$

stetig ist.

3 Trigonometrische Funktionen

3.1 Die Zahl π

Wie mißt man die Länge einer geraden Strecke? Man vergleicht mit einem Abschnitt des Zahlenstrahls, auf dem die benutzte Längeneinheit als Einheit benutzt wird. Bei einem Polygonzug addiert man die Längen der einzelnen Geradenstücke. Es ist klar, dass diese Summe nicht davon abhängt, wie man den Polygonzug in Geradenstücke unterteilt hat.

Aber wie mißt man die Länger einer „krummen“ Kurve? Auf den allgemeinen Fall kommen wir unter Benutzung der Integralrechnung zurück. Hier betrachten wir den Spezialfall des Kreises.

Wir approximieren den Kreis durch einbeschriebene regelmäßige Vielecke, die sich für immer größere Zahl der Ecken dem Kreis immer besser anschmiegen. Der Einfachheit halber (weil es leichter explizit zu berechnen ist) betrachten wir nur 2^n–Ecke (für $n \geq 2$).

Aus Ähnlichkeitsgründen sind die Seiten des einbeschriebenen 2^n–Ecks offenbar proportional zu r. Das gilt dann auch für den Umfang des 2^n–Ecks. Also auch für den Grenzwert ($n \to \infty$), d. h. für den Kreisumfang. Der Kreisumfang ist also proportional zum Radius:

$$\text{Umfang } = c_1 r = c_2 d \quad (d = \text{ Durchmesser } = 2r).$$

Den Faktor c_2 nennt man π. *Diese Zahl π ist also der halbe Umfang des Kreises mit Radius 1* (oder der Umfang des Kreises mit Durchmesser 1).

Die Fläche des 2^n–Ecks approximiert offenbar die Fläche des Kreises. Die Fläche des 2^n–Ecks ist

$$\begin{aligned} & 2^n \times \frac{1}{2} \times \text{ Seitenlänge } \times (\text{Höhe der Dreiecke}) \\ = & \frac{1}{2} \times (\text{Umfang des } 2^n\text{-Ecks}) \times (\text{Höhe der Dreiecke}). \end{aligned}$$

Hier konvergiert für $n \to \infty$

- Umfang des 2^n–Ecks $\to$ Kreisumfang,
- Höhe der Dreiecke $\to r$.

Also ist die Kreisfläche

$$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2.$$

π ist also auch die Fläche des Kreises mit Radius 1.

Wie groß ist aber nun die Zahl π?

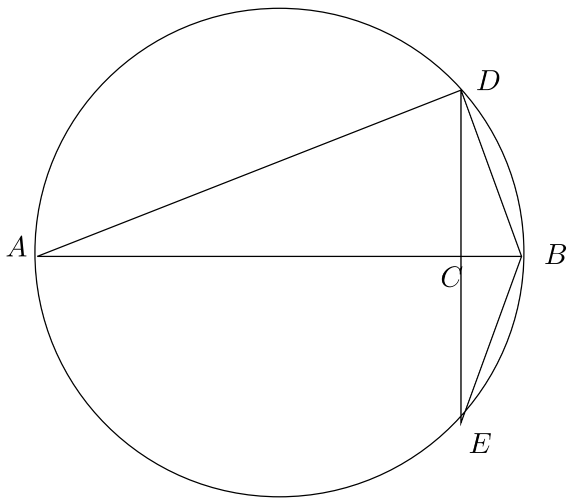


Abbildung 1: Seitenlänge des regulären n–Ecks

Das einbeschriebene regelmäßige $2^2 = 4$–Eck (Quadrat) hat (wie man leicht mit dem Satz von Pythagoras sieht) die Seitenlänge $\sqrt{2}$. Also ist der Umfang $4\sqrt{2} \sim 5,66$. Da das umbeschriebene Quadrat den Umfang 8 hat, liegt 2π jedenfalls zwischen 5,66 und 8.

Um die Seitenlängen (und damit die Umfänge) der einbeschriebenen regelmäßigen 2^n–Ecke berechnen zu können, überlegen wir zunächst, wie aus der Seitenlänge des 2^n–Ecks die des 2^{n+1}–Ecks berechnet werden kann:

In der Skizze sei $\overline{DE}$ die Seitenlänge s_{2^n} des 2^n–Ecks, also $\overline{DB}$ die Seitenlänge $s_{2^{n+1}}$ des 2^{n+1}–Ecks. Wegen $\overline{AB} = 2$, Winkel $ADB = 90°$ und $\overline{AD} = \sqrt{4 - s_{2^{n+1}}^2}$ gilt

$$s_{2^{n+1}}\sqrt{4 - s_{2^{n+1}}^2} = 2 \times \text{ Fläche des Dreiecks } ABD = 2\frac{s_{2^n}}{2},$$

also

$$s_{2^{n+1}}^2(4 - s_{2^{n+1}}^2) = s_{2^n}^2,$$

$$s_{2^{n+1}}^4 - 4s_{2^{n+1}}^2 + s_{2^n}^2 = 0,$$

eine quadratische Gleichung für $s_{2^{n+1}}^2$. Damit folgt, da jedenfalls $s_{2^{n+1}}^2 < 2$ gilt

$$s_{2^{n+1}}^2 = 2 - \sqrt{4 - s_{2^n}^2}, \quad s_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{2^n}^2}}.$$

Wegen $s_{2^2} = s_4 = \sqrt{2}$ folgt damit

$$\begin{aligned} s_8 &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_4^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \\ s_{16} &= \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_8^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{32} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\\
s_{64} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}},\\
s_{2^n} &= \sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} \quad \text{mit} \quad n-3 \text{ Pluszeichen.}
\end{aligned}$$

Man berechnet z. B.

$$s_{64} = 0,098135\ldots, \quad U_{64} = 6,28066\ldots$$

also $\pi \sim 3,1403\ldots$.

Die Zahl π ist „genau“ $3,14159\ldots$. π ist eine irrationale Zahl.[6] Andere Möglichkeiten zur Bestimmung von π, die man in jedem Buch über Analysis findet, sind

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \ldots,$$
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots.$$

3.2 Winkelmessung im Bogenmaß

In der Analysis stellt es sich als nützlich heraus, Winkel nicht in Grad, sondern im Bogenmaß zu messen. Das Bogenmaß eines Winkels α ist die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis im entsprechenden Winkel, also z. B.

$$\begin{aligned}
&360^\circ \text{ entspricht } 2\pi,\\
&180^\circ \text{ entspricht } \pi,\\
&90^\circ \text{ entspricht } \pi/2,\\
&60^\circ \text{ entspricht } \pi/3,\\
&45^\circ \text{ entspricht } \pi/4,\\
&30^\circ \text{ entspricht } \pi/6.
\end{aligned}$$

Die Umrechnung von Grad in Bogenmaß und umgekehrt ist also:

$$\begin{aligned}
&\alpha \text{ Grad entspricht } \alpha\frac{\pi}{180} \text{ im Bogenmaß}\\
&\varphi \text{ im Bogenmaß entspricht } \left(\varphi\frac{180}{\pi}\right)^\circ.
\end{aligned}$$

Wenn nichts anderes gesagt wird, werden im folgenden Winkel stets im Bogenmaß gemessen.

[6] Tatächlich ist π sogar *transzendent*. Eine Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Offenbar ist jede rationale Zahl algebraisch. Eine Zahl heißt transzendent, wenn sie nicht algebraisch ist.

3.3 Die Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens

Der *Sinus* eines Winkels α, $\sin\alpha$, ist, im rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α definiert als der Quotient

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{die } \alpha \text{ gegenüberliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke hängt diese Definition nicht von der Wahl des Dreiecks ab. Insbesondere kann man im Einheitskreis das Dreieck wählen mit (vgl. Abb. 2)

- eine Ecke 0 ist der Nullpunkt,
- die zweite Ecke B erhält man, indem man auf der Kreislinie von Punkt $(1,0)$ um den Winkel (gemessen im Bogenmaß) entgegen dem Uhrzeigersinn läuft,
- die dritte Ecke A ist der Lotpunkt der zweiten auf der x–Achse.

Nach obiger Definition ist $\sin\alpha$ die y–Koordinate der Ecke B.

Der *Cosinus* eines Winkels $\alpha, \cos\alpha$, ist entsprechend

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\text{die } \alpha \text{ anliegende Kathete}}{\text{Hypotenuse}}.$$

In Abbildung 2 ist also $\cos\alpha$ die x–Koordinate der Ecke B (= dem Abstand der Ecke A vom Nullpunkt).

Der *Tangens* von α,[7] $\tan\alpha$, ist

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Mit Hilfe des Strahlensatzes sieht man, dass diese Größe ebenfalls am Einheitskreis abgelesen werden kann: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{0A}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{0A'} = \dfrac{\overline{A'B'}}{1} = \overline{A'B'}$, also $\tan\alpha = \overline{A'B'}$.

Nehmen wir die Situation am Einheitskreis als Definitioin von sin und cos, so hat diese unmittelbar auch für $\alpha < 0$ und $\alpha > \frac{\pi}{2}$ Sinn. Damit sind sin und cos auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen. Da sich ihre Werte nach jedem Umlauf wiederholen, sind beide Funktionen 2π–periodisch. Ihre Graphen sehen wie folgt aus

Insbesondere gilt

$$\sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Cosinus ist eine *gerade*, Sinus eine *ungerade Funktion*:

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

[7] Auf die Funktion Cotangens, im wes. der Kehrwert von tan, brauchen wir hier nicht einzugehen.

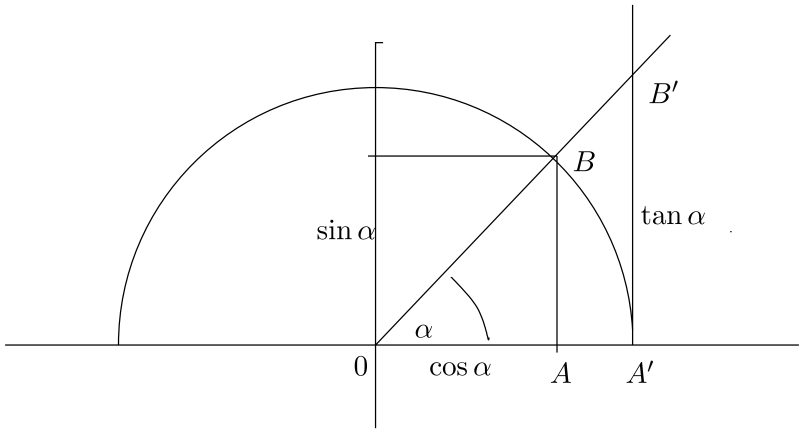


Abbildung 2: Sinus, Cosinus, Tangens

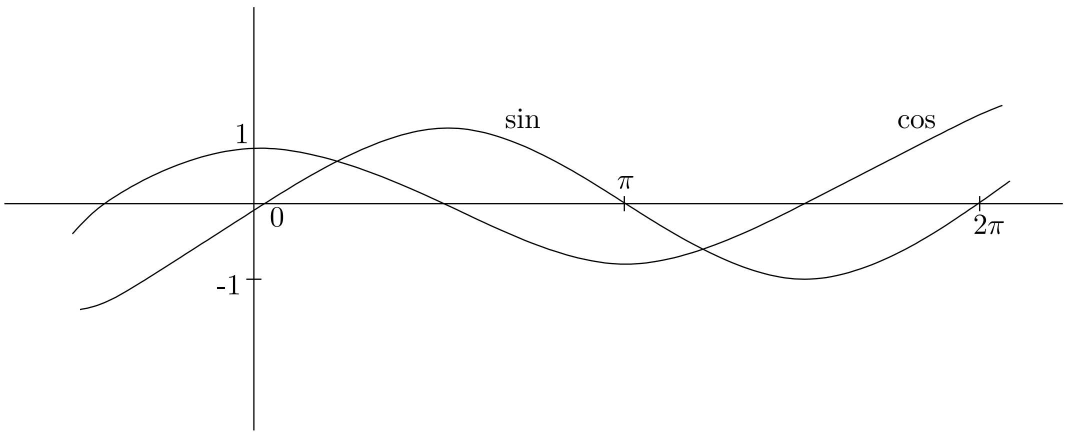


Abbildung 3: Graphen von Sinus und Cosinus

Einige Sinus– und Cosinuswerte lassen sich aus der Zeichung (ggf. mit einfachen geometrischen Überlegungen) leicht ablesen:

$$\begin{aligned}
\sin 0 &= \sin\pi = \ldots = \cos\frac{\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} = \ldots = 0\\
\cos 0 &= \cos 2\pi = \ldots = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\frac{5\pi}{2} = \ldots = 1\\
\sin\frac{\pi}{4} &= \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
\sin\frac{\pi}{6} &= \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{(Hälfte der Seitenlänge des regelmäßigen 6–Ecks)},\\
\cos\frac{\pi}{6} &= \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{(Höhe des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1)}.
\end{aligned}$$

Aus der Definition am Einheitskreis folgt mit Hilfe des Satzes von Pythagoras

Satz 3.1 *Für alle α gilt*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Satz 3.2 (Additionstheorem) *Für alle α, β gilt*

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Außerdem gelten die Halbwinkelformeln:

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Beweis. Aus der Skizze folgt

$$\begin{aligned}
\overline{QA} &= \overline{QB}\cos\alpha = \sin\beta\cos\alpha,\\
\overline{AR} &= \overline{BS} = \overline{OB}\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha,\\
\overline{OS} &= \overline{OB}\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha,\\
\overline{RS} &= \overline{AB} = \overline{QB}\sin\alpha = \sin\beta\sin\alpha.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \overline{OR} = \overline{OS} - \overline{RS} = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha,\\
\sin(\alpha+\beta) &= \overline{QR} = \overline{QA} + \overline{AR} = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha.
\end{aligned}$$

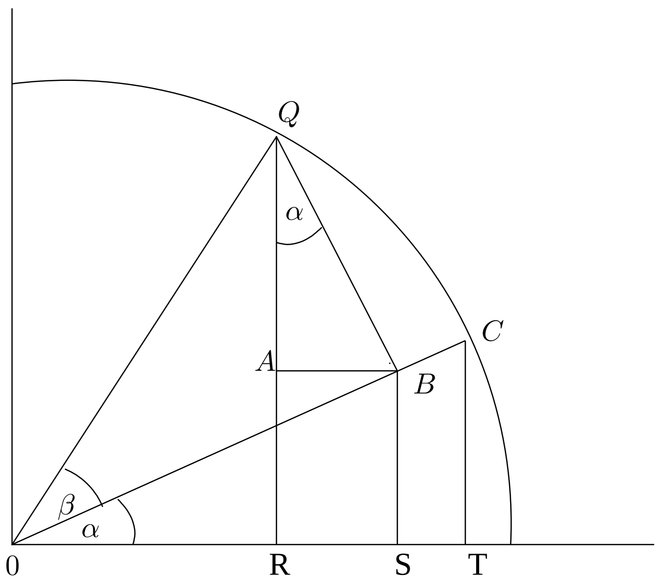


Abbildung 4: Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

Daraus folgt mit $\frac{\alpha}{2}$ für α und β:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = 1-\cos\alpha,$$
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 1+\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right) = 1+\cos\alpha.$$

Das sind die Halbwinkelformeln. ■

Hilfssatz 3.3 (Wichtige Ungleichungen) a) *Für alle α gilt $|\sin\alpha| \le |\alpha|$.*

b) *Für alle α gilt $1-\frac{\alpha^2}{2} \le \cos\alpha \le 1$.*

c) *Für $0 \le |\alpha| < \frac{\pi}{2}$ gilt $\frac{\tan\alpha}{\alpha} \ge 1$.*

Alle drei Aussagen sind nur für kleine α interessant.

Beweis. a) Es genügt $|\alpha| \le \frac{\pi}{2}$ zu betrachten (für $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$ ist die Behauptung wegen $|\sin\alpha| \le 1$ offensichtlich). Für $|\alpha| \le \frac{\pi}{2}$ ist die Ungleichung erfüllt, weil die Bogenlänge offenbar größer ist als die zweite Komponente des entsprechenden Punktes auf dem Kreis.

b) Mit der Halbwinkelformel und Teil a folgt

$$0 \le 1-\cos\alpha = 2\Big(\sin\frac{\alpha}{2}\Big)^2 \le 2\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}\alpha^2.$$

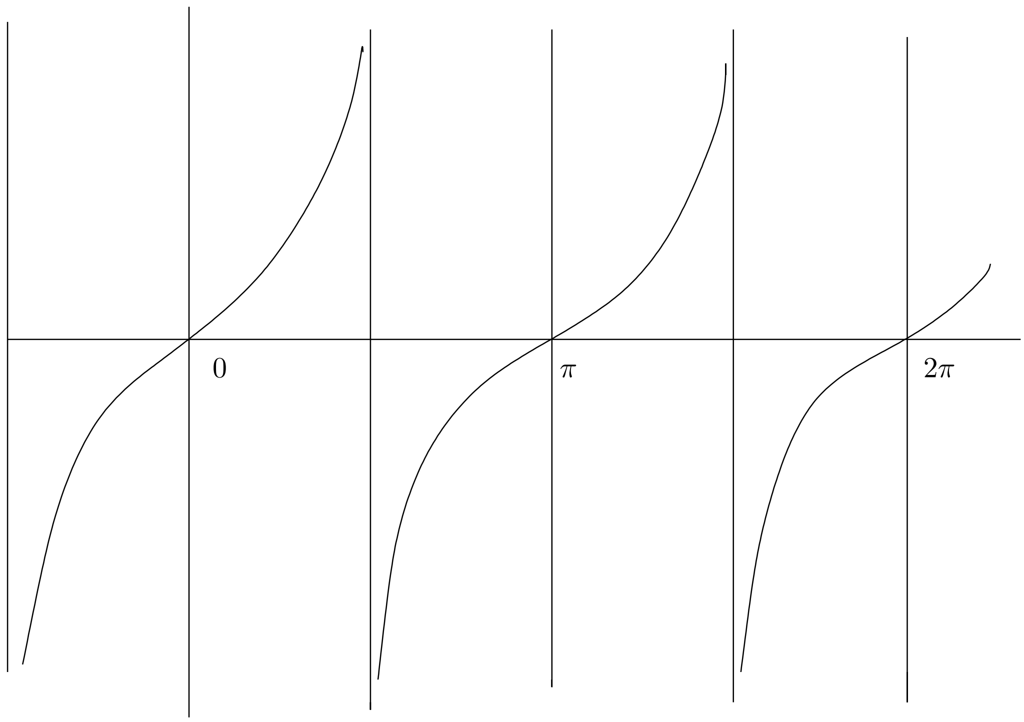


Abbildung 5: Graph des Tangens

c) Wir beziehen uns auf Abbildung 2. Der Bogen vom Punkt $(1, 0)$ bis zum Punkt, der den Winkel α auf dem Kreis markiert hat die Länge α. Diese Länge wird approximiert durch die Polygonzüge, die durch immer feinere Unterteilungen definiert werden. Für jedes Teilstück des Polygonzugs ist die Projektion längs der Strahlen vom Nullpunkt aus auf die Senkrechte durch den Punkt $(1, 0)$ länger als das entsprechende Teilstück. Da dies für jeden dieser Polygonzüge gilt, gilt es auch für den Bogen, d. h. $|\alpha| \leq |\tan \alpha|$. ■

Satz 3.4 a) *Sinus und Cosinus sind stetig auf* $\mathbb{R}$.

b) *Tangens ist stetig auf* $\mathbb{R} \setminus \{$*Nullstellen von* $\cos\} = \mathbb{R} \setminus \{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. *Für jedes* $k \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$\tan \alpha \to -\infty \quad \textit{für } \alpha \searrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,$$
$$\tan \alpha \to \infty \quad \textit{für } \alpha \nearrow \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Beweis. a) Es ist offensichtlich, dass sich sin und cos beim Durchlaufen des Einheitskreises stetig ändern; die Veränderung von sin bzw. cos ist immer $\leq$ der Änderung von α. In der $\varepsilon - \delta$–Definition kann stets $\delta = \varepsilon$ gewählt werden.

b) Es ergibt sich aus der Stetigkeit von sin und cos und dem Verhalten von sin und cos bei den Nullstellen von cos. ∎

Satz 3.5 *Sind α, β, γ die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel, so gilt*

a) **Sinussatz:** $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$ *und entsprechend mit zyklisch vertauschten Variablen.*

b) **Cosinussatz:** $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ *und entsprechend zyklisch vertauschten Variablen. (Für $\gamma = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bzw. $\beta = \frac{\pi}{2}$ ist dies der Satz des Pythagoras).*

Beweis. a) Man zeichne den Umkreis des Dreiecks ABC mit den Winkeln α, β, γ. Der Kreis habe den Radius r. Die Dreieckswinkel sind Umfangswinkel über der entsprechenden Seite.

Betrachten wir den Winkel γ: Zeichnen wir den Durchmesser des Umkreises durch den Punkt A. Den Schnitt mit dem Kreis nennen wir C'. Als Umkreiswinkel über c ist Winkel $BC'A = \gamma$, während der Winkel im Dreieck ABC' bei B ein rechter ist. Nach Definition des Sinus ist

$$\sin\gamma = \frac{c}{2r}.$$

Entsprechend folgt $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$, $\sin\beta = \frac{b}{2r}$. Daraus folgt die Behauptung.

b) Zeichne das Lot von A auf a. Länge des Lotes sei b_1. a wird zerlegt in a_1 (bei b) und a_2 bei c. Dann gilt $a_2 = b\cos\gamma$, also [8]

$$\begin{aligned} c^2 &= a_1^2 + b_1^2 = (a-a_2)^2 + b^2 - a_2^2 \\ &= a^2 - 2aa_2 + a_2^2 + b^2 - a_2^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

∎

3.4 Übungen

5:14.5.07

3.1 a) Man beweise die Halbwinkelformel

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$$

elementargeometrisch mit Hilfe einer Skizze am Einheitskreis.

b) Man bestimme $\sin\frac{\pi}{12}$ $\left(\frac{\pi}{12} \sim 15°\right)$.

[8] Ist γ stumpf, so liegt der Lotpunkt außerhalb des Dreiecks und es gilt $a_1 = a + a_2$. Wird entsprechend weitergerechnet, folgt auch in diesem Fall die Behauptung.

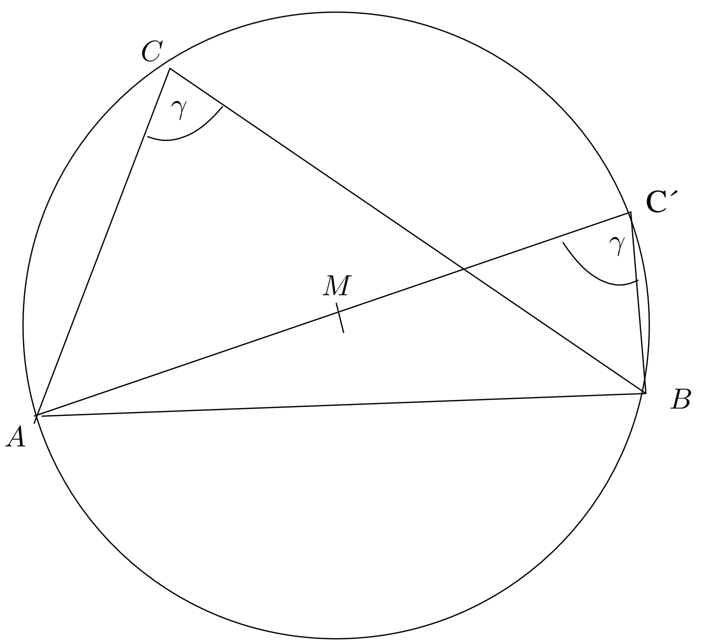


Abbildung 6: Sinussatz

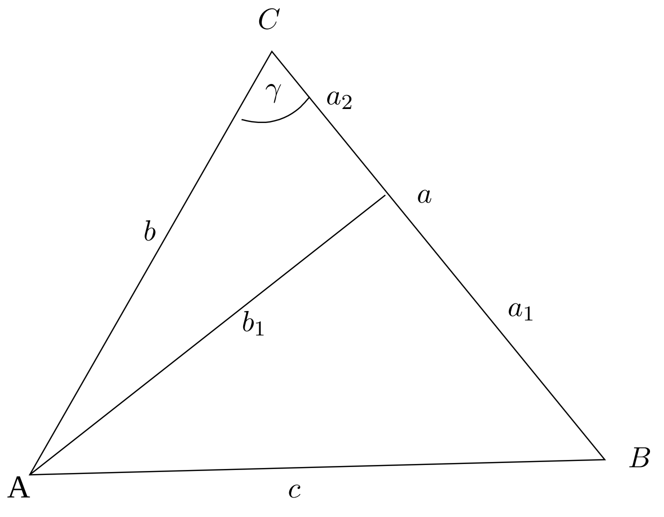


Abbildung 7: Cosinussatz

3.2 Man zeige $\dfrac{1-\cos x}{x} \to 0$ für $x \to 0$ (das bedeutet, dass die Ableitung von cos im Nullpunkt gleich 0 ist).

3.3 a) Jedes Polynom der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k \quad \text{mit} \quad a_{2n} > 0$$

besitzt ein Minimum.

b) Man formuliere und beweise ein entsprechendes Resultat für ein Maximum.

3.4 a) Man zeige: Gilt in einem Dreieck $a^2 + b^2 > c^2$ (bzw. $< c^2$), so ist der Winkel $\gamma < \frac{\pi}{2}$ (bzw. $> \frac{\pi}{2}$) $\left(\frac{\pi}{2} \sim 90^\circ\right)$.

b) Man skizziere $f(x) = \sin x^2$ (indem man sich insbesondere die Lage der Nullstellen und der Maxima und Minima klar mache; man beachte auch das Vorzeichen von x^2 im Gegensatz zu x).

3.5 Welche Perioden haben die folgenden Funktionen (Begründung)

a) $f(x) = \cos x + \cos nx \qquad (n \in \mathbb{N})$,

b) $g(x) = \cos x + \sin \dfrac{x}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$,

c) $h(x) = \cos^2 x$,

d) $p(x) = \cos x^2$.

4 Komplexe Zahlen

– Jede reelle Zahl $x \geq 0$ hat für jedes $n \in \mathbb{N}$ (mindestens) eine reelle n–te Wurzel w (d. h. es gilt $w^n = x$).

– Für gerades n hat jedes $x > 0$ genau zwei reelle n–te Wurzeln, eine positive w und eine negative $-w$.

– Für ungerades n hat jedes $x < 0$ genau eine negative n–te Wurzel.

– Für gerades n hat eine negative Zahl x keine n–te Wurzel.

Dies ist auch vom ästhetischen Standpunkt aus (und der spielt in der Mathematik keine unbedeutende Rolle) kein befriedigender Zustand. Im folgenden werden wir $\mathbb{R}$ zu einem größeren Körper, dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, erweitern, in dem gilt: *Jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *hat für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *genau* n n*–te Wurzeln.*

Es gibt i. wes. zwei Wege, diesen Körper zu konstruieren. Der naheliegende naive Weg geht so: Man nimmt zu $\mathbb{R}$ ein abstraktes Element i hinzu mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ (in $\mathbb{R}$ gibt es bekanntlich kein solches Element, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 \geq 0$). Man betrachtet dann Elemente der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ (wobei hier das $+$ rein symbolische Bedeutung hat), d. h. es ist

$$\mathbb{C} := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{C}$ definiert man Addition und Multiplikation durch:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Es ist leicht zu sehen, dass $(\mathbb{C}, +)$, also die Menge $\mathbb{C}$ ausgestattet mit dieser Operation $+$, eine *abelsche* (kommutative) Gruppe ist. Das entsprechende gilt für $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Dabei ist

– das *Nullelement*: $0 = 0 + i0$,

– das zu $a + ib$ *negative Element*: $-(a + ib) = -a + i(-b) =: -a - ib$,

– das *Einselement*: $1 = 1 + i0$,

– das zu $a + ib \neq 0$ inverse Element $(a + ib)^{-1} = (a^2 + b^2)^{-1}(a - ib) = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Der Leser möge dies nachrechnen.[9] Mit etwas Rechnung erkennt man, dass auch das Distributivgesetz $(a+ib)\{(c+id)+(e+if)\} = (a+ib)(c+id)+(a+ib)(e+if)$ gilt, d. h. $\mathbb{C}$ ist ein *Körper*.

Etwas abstrakter und mathematisch vielleicht etwas eleganter konstruiert man die komplexen Zahlen so:

$$\mathbb{C} := \Big\{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\Big\} \qquad \text{(Menge der geordneten Paare)}$$

mit

$$\begin{aligned}
&(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \quad (= \text{ Vektoraddition in } \mathbb{R}^2)\\
&(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc).
\end{aligned}$$

Hier erkennt man wieder, dass $(\mathbb{C},+)$ und $(\mathbb{C},\cdot)$ abelsche Gruppen sind mit

$$\begin{aligned}
&0 = (0,0), \quad -(a,b) = (-a,-b),\\
&1 = (1,0), \quad (a,b)^{-1} = \Big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\Big).
\end{aligned}$$

Offenbar haben $a+ib$ und (a,b) die gleiche Bedeutung. Die reellen Zahlen erkennt man als die Teilmenge der Elemente $a+i0$ bzw. $(a,0)$ von $\mathbb{C}$. Diese Teilmenge ist bezüglich der Operationen $+$ und $\cdot$ abgeschlossen (d. h. die Operationen führen nicht aus der Teilmenge heraus), $\mathbb{R}$ ist in diesem Sinn ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$.

Man definiert für $z = a+ib \in \mathbb{C}$

- *Realteil* von $z = \mathrm{Re}\, z := a$,
- *Imaginärteil* von $z = \mathrm{Im}\, z := b$ (man beachte, dass der Imaginärteil reell ist),
- die zu z *konjugiert komplexe* Zahl $\overline{z} := a-ib$ (wenn man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ auffasst, also die an der reellen Achse gespiegelte komplexe Zahl),
- den *Betrag* von z, $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\overline{z}}$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt insbesondere:

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\overline{z}), \qquad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}), \qquad |z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

[9]Formal bekommt man das zu $a+ib$ inverse Element, indem man den „Bruch“ $\frac{1}{a+ib}$ mit $a-ib$ (das zu $a+ib$ konjugierte Element, vgl. weiter unten) erweitert:

$$(a+ib)^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

und für $z = a + ib, w = x + iy$

$$\overline{z}\overline{w} = (a - ib)(x - iy) = (ax - by) - i(ay + bx) = \overline{zw}, \quad \overline{z}^n = \overline{z^n}.$$

Offenbar ist $|z|$ die euklidische Länge des Ortsvektors des Punktes z bzw. der euklidische Abstand des Punktes z vom Nullpunkt. Für zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 ist also $|z_1 - z_2|$ der euklidische Abstand der Punkte z_1 und z_2.

Man definiert: Die Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ *konvergiert* gegen ein $z \in \mathbb{C}$, $z_n \to z$, oder $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, wenn gilt $|z - z_n| \to 0$. Sind $z = a + ib$ und $z_n = a_n + ib_n$, so gilt $z_n \to z$ genau dann, wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gilt.

Eine Folge (z_n) aus $\mathbb{C}$ heißt eine *Cauchyfolge*, wenn $|z_n - z_m|$ für große n und m klein ist, genauer:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geq N \quad |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Die Folge $(z_n) = (a_n + ib_n)$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn (a_n) und (b_n) Cauchyfolgen sind. Damit folgt sofort

Satz 4.1 *$\mathbb{C}$ ist vollständig, d. h. jede Cauchyfolge (z_n) in $\mathbb{C}$ ist konvergent.*

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert man das Argument von z,

$$\begin{aligned} \arg(z) \;:=\; & \text{Winkel zwischen der positiven } x\text{–Achse und dem} \\ & \text{Ortsvektor von } z, \text{ gemessen in mathematisch positiver} \\ & \text{Richtung (entgegen dem Uhrzeigersinn)} \end{aligned}$$

Natürlich ist $\arg(z)$ nur modulo 2π eindeutig bestimmt; meist wählt man den Hauptwert: $0 \leq \arg(z) < 2\pi$. Es gilt

$$z = |z|\Big(\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)\Big).$$

Nachdem die Addition in $\mathbb{C}$ einfach der Vektoraddition entspricht, können wir jetzt auch die Multiplikation geometrisch deuten: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} zw &= |z|\;|w|\Big\{\Big(\cos\arg(z)\cos\arg(w) - \sin\arg(z)\sin\arg(w)\Big) \\ &\qquad +i\Big(\cos\arg(z)\sin\arg(w) + \sin\arg(z)\cos\arg(z)\Big\} \\ &\quad \text{(Additionstheoreme)} \\ &= |z|\;|w|\Big\{(\cos\arg(z) + \arg(w)) + i\sin(\arg(z) + \arg(w))\Big\}, \end{aligned}$$

d. h., bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert (wenn das neue Argument $\geq 2\pi$ ist, wird man es in der Regel um 2π reduzieren).

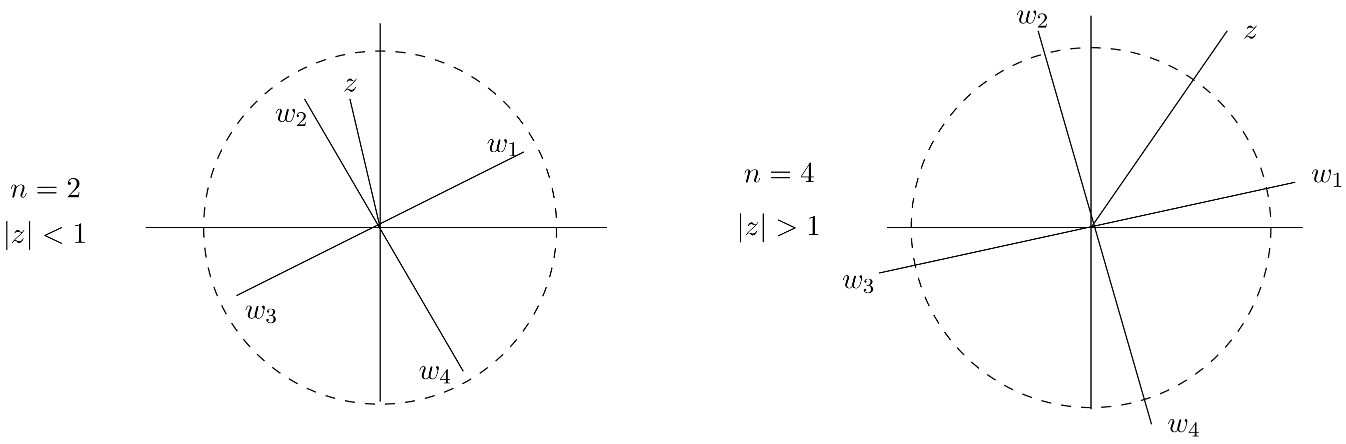


Abbildung 8: n–te Wurzel

Jetzt ist es leicht, Wurzeln aus komplexeren Zahlen zu ziehen: Ist

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (r = |z|),$$

so hat offenbar

$$w := \sqrt{r}\Big(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\Big)$$

die Eigenschaft: $w^2 = z$. Falls $z \neq 0$ ist, gibt es aber noch eine zweite (Quadrat–)Wurzel $-w$. Diese kann man auch so erhalten: Offenbar gilt

$$z = r\Big(\cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi)\Big),$$

weshalb auch

$$\tilde{w} = \sqrt{r}\Big(\cos\Big(\frac{\varphi}{2} + \pi\Big) + i\sin\Big(\frac{\varphi}{2} + \pi\Big)\Big) = -\sqrt{r}\Big(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\Big) = -w$$

eine (Quadrat)–Wurzel von z ist.

Allgemeiner sind für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

die Zahlen

$$w_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\Big(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big) + i\sin\Big(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\Big)\Big) \qquad \text{für } k = 0, \ldots, n-1$$

n verschiedene n–te Wurzeln von z (für $k = n$ würde man wieder w_0 erhalten).

Die n–te Wurzel einer Zahl $a \in \mathbb{C}$ können natürlich auch als Nullstellen des Polynoms $p_n(z) = z^n - a$ aufgefaßt werden. Dieses Polynom hat also genau n verschiedene Nullstellen. Viel allgemeiner gilt:

Satz 4.2 (Fundamentalsatz der Algebra) *Mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_j \in \mathbb{C}$ sei*

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \sum_{j=a}^{n-1} a_j z^j + z^n.$$

Dann existieren $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ und $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=1}^{k} \nu_j = n \quad \textit{und} \quad p(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - z_j)^{\nu_j}.$$

$z_1, \ldots, z_k$ sind die Nullstellen *des Polynoms p, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ die* Vielfachheiten *dieser Nullstellen. In diesem Sinn hat also jedes Polynom vom Grad n genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt).*

Beweis. a) *Es existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|p(z_0)| = \min\Big\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\Big\}$.*

Für $z \neq 0$ gilt

$$|p(z)| = |z|^n \Big| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^n} + \frac{a_0}{z^n} \Big|.$$

Der letzte Betrag ist für große $|z|$ nahe bei 1. Also strebt $|p(z)|$ für $|z| \to \infty$ gegen ∞. Insbesondere existiert ein $r_0 > 0$ mit

$$|p(z)| \geq |p(0)| \quad \text{für } |z| \geq r_0.$$

Da $z \mapsto |p(z)|$ auf $\Big\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_0\Big\}$ stetig ist, existiert ein z_0 mit $|z_0| \leq r$ und

$$|p(z_0)| = \min\Big\{|p(z)| : |z| \leq r_0\Big\}.$$

Wegen

$$|p(z_0)| \leq |p(0)| \leq |p(z)| \quad \text{für } z \ \text{ mit } |z| > r_0$$

gilt

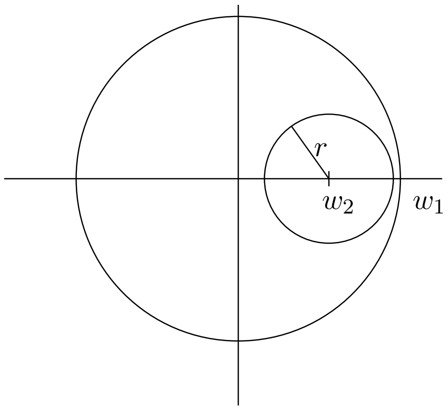
$$|p(z_0) = \min\Big\{|p(z)| : z \in \mathbb{C}\Big\}.$$

b) *Mit diesem z_0 gilt $p(z_0) = 0$.*

Wir nehmen an, dass $p(z_0) \neq 0$ gilt. Es ist jetzt das Ziel zu zeigen, dass $|p(z)|$ kleiner als $|p(z_0)|$ wird, wenn man von z_0 aus ein kleines Stück in geeigneter Richtung geht; das ergibt einen Widerspruch zur Wahl von z_0. Offensichtlich gilt

$$p(z_0 + z) = p(z_0) + b_k z^k + \tilde{p}(z) z^{k+1},$$

mit $1 \leq k \leq n$, $b_k \neq 0$ (k ist niedrigste Potenz > 0 von z, die in $p(z_0 + z)$ enthalten ist) und einem Polynom $\tilde{p}$ vom Grad $n - k - 1$ ($\tilde{p} = 0$ falls $k = n$ ist).



$$w_1 = p(z_0)$$
$$w_2 = (1 - t^k)p(z_0)$$
$$r = t^{k+1} w_0^{k+1} \tilde{p}(tw_0)$$

Abbildung 9: $|p(z_0 + tw_0)| < p(z_0)$

Wählen wir nun w_0 so, dass $b_k w_0^k = -p(z_0)$ gilt $\left(\text{also } w_0 = \sqrt[k]{-p(z_0)/b_k}\right)$, so gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$p(z_0 + tw_0) = (1 - t^k)p(z_0) + t^{k+1} w_0^{k+1} \tilde{p}(tw_0).$$

Für hinreichend kleine $t > 0$ ist (trivial für $k = n$, da dann $\tilde{p} = 0$)

$$\left| t^{k+1} w_0^{k+1} \tilde{p}(tw_0) \right| < t^k p(z_0),$$

also

$$|p(z_0 + tw_0)| < |p(z_0)|$$

im Widerspruch zur Wahl von z_0.

c) Nach Teil b gibt es also (mindestens) eine Nullstelle z_1. Division von $p(z)$ durch $z - z_1$ (mit Rest 0, da $p(z_1) = 0$ ist) liefert

$$p(z) = (z - z_1)p_1(z) \quad \text{mit } p_1(z) = \sum_{j=0}^{n-2} a_{1,j} z^j + z^{n-1}.$$

Anwendung des obigen Verfahrens auf p_1, usw.…, liefert die Behauptung. $\blacksquare$

6:21.05.07

5 Exponentialfunktion und Logarithmus

5.1 Potenzen mit rationalen Exponenten

Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist a^n wohldefiniert

$$a^n := a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ Faktoren})$$

bzw. – mathematisch präziser – induktiv: $a^1 := a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Für $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ definiert man

$$a^n := \begin{cases} a^n & \text{wie oben für } n > 0, \\ 1 & \text{für } n = 0, \\ \dfrac{1}{a^{|n|}} & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Offenbar sind dann die üblichen Rechenregeln für Potenzen erfüllt ($a^n a^m = a^{n+m}, (a^n)^m = a^{nm}$).

Für $a > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ definiert man

$$a^{1/m} = \sqrt[m]{a} \text{ als die positive Lösung von } x^m = a$$

(nach dem Zwischenwertsatz existiert ein solches x für jedes $a > 0$). Damit ist dann auch für $a > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ der Ausdruck

$$a^{n/m} := \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

definiert (beide Ausdrücke lösen die Gleichung $x^m = a^n$; nachrechnen!). Also ist a^x für jedes $a > 0$ und $x \in \mathbb{Q}$ wohldefiniert und es gilt

Satz 5.1 *Für $a > 0$ gilt*

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{und} \quad a^{xy} = (a^x)^y \text{ für alle } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Beweis. Für $x = \dfrac{p}{q}, y = \dfrac{r}{s}$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^{\frac{ps+qr}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps}}\,\sqrt[qs]{a^{qr}} \\ &= a^{\frac{ps}{qs}} a^{\frac{qr}{qs}} = a^{p/q} a^{r/s} = a^x a^y. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$a^{xy} = a^{\frac{pr}{qs}} \quad \text{und } (a^x)^y = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}$$

a^{xy} ist die Lösung z der Gleichung $z^{qs} = a^{pr}$. Dies gilt auch für $(a^x)^y$:

$$\left[(a^x)^y\right]^{sq} = \left[\sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r}\right]^{sq} = \left[\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r\right]^q = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{qr} = (a^p)^r = a^{pr}.$$

Also ist $a^{xy} = (a^x)^y$. ■

5.2 Potenzen mit reellen Exponenten

Kann man für $a > 0$ auch a^x für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ definieren? Ja! Die Idee ist: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Folge (x_n) aus $\mathbb{Q}$ zu wählen mit $x_n \to x$ und $a^x := \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$ zu definieren. Dazu ist zu zeigen:

– Die Folge (a^{x_n}) konvergiert, und

– der Limes der Folge (a^{x_n}) hängt nicht von der Wahl der Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{Q}$ und $x_n \to x$ ab.

Satz 5.2 *Sei $a > 0$ und $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ eine Folge aus $\mathbb{Q}$ mit $\frac{p_n}{q_n} \to 0$. Dann gilt $a^{p_n/q_n} \to 1$.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $a > 1$ und $\frac{p_n}{q_n} > 0$ ($a = 1$ ist offensichtlich; für $a < 1$ betrachtet man zunächst $a' = \frac{1}{a} > 1$; für $\frac{p_n}{q_n} < 0$ beachte man $a^{p_n/q_n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-p_n/q_n}$).

Gilt für $a > 1$ *nicht* $a^{p_n/q_n} \to 1$, so gibt es (wegen $a^{p_n/q_n > 1}$ ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (p_{n_k}/q_{n_k}) mit $q_{n_k}/p_{n_k} \geq k$ und $a^{p_{n_k}/q_{n_k}} > 1 + \varepsilon$. Daraus würde aber folgen

$$a = (a^{p_{n_k}/q_{n_k}})^{q_{n_k}/p_{n_k}} > (1+\varepsilon)^k > 1 + k\varepsilon,$$

was für große k nicht gelten kann. ■

Satz 5.3 *Sei $a > 0$. Ist (x_n) eine Folge aus Q mit $x_n \to x \in Q$, so gilt $a^{x_n} \to a^x$.*

Beweis. Es gilt $a^{x_n} = a^{x_n - x} a^x$. Wegen $x_n - x \to 0$ gilt $a^{x_n - x} \to 1$ und somit $a^{x_n} \to a^x$. ■

Satz 5.4 *Sei $a > 0$, x und y rational mit $x < y$. Dann gilt $a^x < a^y$ für $a > 1$, $a^x > a^y$ für $a < 1$.*

Der *Beweis* ist offensichtlich (man stelle x und y als Brüche mit gleichem Nenner dar).

Sei nun x eine beliebige reelle Zahl, (x_n) eine wachsende Folge aus $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x$. Dann ist auch (a^{x_n}) monoton (fallend für $a < 1$, wachsend für $a > 1$) und beschränkt. Also ist (a^{x_n}) konvergent in $\mathbb{R}$. Ist (y_n) eine beliebige Folge aus $\mathbb{Q}$ mit $y_n \to x$, so gilt nach obigem Satz wegen $y_n - x_n \to 0$

$$a^{y_n} = a^{y_n - x_n} a^{x_n} \to 1 \cdot \lim_{n\to\infty} a^{x_n},$$

d. h. der Limes ist unabhängig von der Wahl der Folge (solange sie gegen x konvergiert). Wir definieren damit für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \quad \text{mit} \quad (x_n) \text{ aus } \mathbb{Q},\ x_n \to x.$$

Außerdem definiert man $0^x = 0$ für alle $x > 0$. Man beachte, dass aufgrund der obigen Resultate diese Definition für $x \in \mathbb{Q}$ den alten Wert für a^x liefert.

Satz 5.5 *Auch für $x, y \in \mathbb{R}$ (und $a > 0$) gilt die Potenzrechenregel $a^{x+y} = a^x a^y$.*

Der *Beweis* ergibt sich durch Grenzübergänge mit rationalen Folgen $(x_n), (y_n)$ mit $x_n \to x$, $y_n \to y$.

Satz 5.6 *Die* Potenzfunktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x^\varrho$ *ist für jedes* $\varrho \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\textit{streng wachsend für } \varrho > 0, \\ &\textit{streng fallend für } \quad \varrho < 0 \end{aligned}$$

und $\equiv 1$ *für* $\varrho = 0$. *Die* Exponentialfunktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$*ist positiv für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und*

$$\begin{aligned} &\textit{streng wachsend für } a > 1, \\ &\textit{streng fallend für } \quad a < 1 \end{aligned}$$

und $\equiv 1$ *für* $a = 1$.

Der *Beweis* ist einfach, erfordert aber etwas Aufwand (folgt aus der Tatsache, dass die Aussagen für rationale ϱ bzw. x gelten).

Ähnlich wie oben für rationale Folgen (x_n) beweist man nun

Satz 5.7 *Sei $a > 0$, (x_n) eine reelle Folge mit $x_n \to x$, dann gilt $a^{x_n} \to a^x$; die Exponentialfunktion ist stetig.*

Damit kann man nun zeigen

Satz 5.8 *Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $a^{xy} = (a^x)^y$.*

Beweis. Seien (x_n), (y_n) rationale Folgen mit $x_n \to x$, $y_n \to y$. Offenbar gilt

$$(a^{x_n})^{y_k} \to (a^x)^{y_k} \quad \text{für } n \to \infty.$$

Wegen $(a^{x_n})^{y_k} = a^{x_n y_k}$ gilt aber auch

$$(a^{x_n})^{y_k} \to a^{x y_k} \quad \text{für } n \to \infty,$$

d. h. es gilt

$$(a^x)^{y_k} = a^{x y_k}.$$

Für $k \to \infty$ folgt daraus die Behauptung mit obigem Satz. ■

5.3 Logarithmusfunktion

Mit der *allgemeinen Potenz* kann nun jede Gleichung $x^\alpha = a$ ($a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$) gelöst werden: Die Lösung ist $x = a^{1/\alpha}$.

Da $x \mapsto a^x$ streng monoton und stetig ist, ist auch die Gleichung $a^x = b$ für $a > 0$ und $b > 0$ lösbar: a^x nimmt beliebig große und beliebig kleine positive Werte an, nach dem Zwischenwertsatz also alle positiven Werte. Wegen der strengen Monotonie nimmt sie jeden Wert nur einmal an.

Die Lösung der Gleichung $a^x = b$ mit $a > 1$ ist also eindeutig bestimmt und wird als $\log_a(b)$ bezeichnet, der *Logarithmus von b zur Basis a* (das ist also die Zahl x, für die $a^x = b$ ist). Die Basis a wird im folgenden immer > 1 vorausgesetzt. Wenn klar ist, welche Basis gemeint ist, schreiben wir nur log.

Entsprechend den Rechenregeln für die Exponentialfunktion gilt für den Logarithmus

Satz 5.9 $\log(xy) = \log x + \log y$, $\log \dfrac{x}{y} = \log x - \log y$, $\log x^\varrho = \varrho \log x$. *Die Logarithmusfunktion ist auf $(0, \infty)$ streng wachsend mit $\log x < 0$ für $x < 1$ und $\log x > 0$ für $x > 1$.*

Beweis. Ist $x = a^\sigma$ und $y = a^\tau$, so ist $xy = a^{\sigma+\tau}$, $\dfrac{x}{y} = a^{\sigma-\tau}$ und $x^\varrho = a^{\sigma\varrho}$, also

$$\log(xy) = \sigma + \tau = \log x + \log y, \quad \log \frac{x}{y} = \sigma - \tau = \log x - \log y, \quad \log x^\varrho = \sigma\varrho = \varrho \log x.$$

Der Rest folgt leicht aus dem bekannten Verhalten von $x \mapsto a^x$. ■

Satz 5.10 *Die Funktion* $(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log x$ *ist stetig.*

Beweis. Stetig bei $x_0 = 1$: Sei (x_n) eine Folge aus $(0,\infty)$ mit $x_n \to 1$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit $a^{-\varepsilon} < x_n < a^{\varepsilon}$ für $n \geq n_0$. Also durch Logarithmieren $-\varepsilon < \log x_n < \varepsilon$ für $n \geq n_0$, d. h. $\log x_n \to \log 1 = 0$.
Beliebiges $x_0 > 0$: Gilt $x_n \to x_0$, so folgt $\dfrac{x_n}{x_0} \to 1$, also $\log x_n - \log x_0 = \log\left(\dfrac{x_n}{x_0}\right) \to 0$ und somit $\log x_n \to \log x_0$. ∎

5.4 Exponentialfunktionen und Wachstumsprozesse

In Physik, Biologie, Chemie, Wirtschaft, ... gibt es häufig Wachstums– oder Abnahme (Zerfalls–) Prozesse für eine zeitabhängige Größe $u(t)$, für die in kleinen Zeitintervallen Δt näherungsweise gilt

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \alpha u(t)\Delta t = (1 + \alpha\Delta t)u(t)$$

mit einer Konstanten (*Zuwachsrate* pro Zeiteinheit) $\alpha \neq 0$ ($\alpha = 0$ ist uninteressant). Wenn man annimmt, dass der Zuwachs $\alpha\Delta t u(\varepsilon)$ unmittelbar zum weiteren Zuwachs beiträgt, dann wird der Prozess durch diese Gleichung umso besser beschrieben, je kleiner Δt ist.

Nehmen wir nun an, dass der Prozess vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zur Zeit $T > 0$ abläuft. Zerlegen wir das Intervall $(0, T)$ in n gleiche Teile und betrachten die Zeitpunkte $t_k = k\dfrac{T}{n}$ für $k = 0, \dots, n$. Für $u_k := u(t_k)$ sollte dann näherungsweise gelten

$$\begin{aligned}
u_1 &\sim \left(1 + \alpha\frac{T}{n}\right)u_0, \\
u_2 &\sim \left(1 + \alpha\frac{T}{n}\right)u_1 \sim \left(1 + \alpha\frac{T}{n}\right)^2 u_0, \\
&\vdots \\
u(T) = u_n &\sim \left(1 + \alpha\frac{T}{n}\right)u_{n-1} \sim \left(1 + \alpha\frac{T}{n}\right)^n u_0.
\end{aligned}$$

7:4.6.07

Da $\left(1+\alpha\dfrac{T}{n}\right)^n \dots u_0$ auf Grund der obigen Überlegung den Endzustand $u(T)$ umso besser beschrieben wird, je kleiner $\Delta t = \dfrac{T}{n}$ ist, wird man vermuten:

$$u(T) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha T}{n}\right)^n u_0 = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{\alpha T}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha T}}\right]^{\alpha T} u_0.$$

Die Umformung wurde so vorgenommen, dass der Ausdruck in der eckigen Klammer so ähnlich aussieht, wie $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Nun gilt für $\alpha T > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, wenn man $k_n \in \mathbb{N}$ so wählt, dass $k_n \le \dfrac{n}{\alpha T} < k_n + 1$ gilt,

$$\begin{aligned}
&\Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n} < \Big(1+\frac{\alpha T}{n}\Big)^{\frac{n}{\alpha T}} < \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big)^{k_n+1},\\
&\Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{k_n+1}\Big(1+\frac{1}{k_n+1}\Big)^{-1} < \Big(1+\frac{\alpha T}{n}\Big)^{\frac{n}{\alpha T}} < \Big(1+\frac{1}{k_n}\Big)^{k_n}\Big(1+\frac{1}{k_n}\Big).
\end{aligned}$$

Es gilt (wobei die *Eulersche Zahl* e hierdurch definiert ist [10])

$$a_n := \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \to e = 2,71828\ldots \text{ (Eulersche Zahl)},$$ [11]

also

$$\Big(\Big(1+\frac{\alpha T}{n}\Big)^n\Big)^{1/\alpha T} \to e, \quad \Big(1+\frac{\alpha T}{n}\Big)^n \to e^{\alpha T}.$$

Ähnlich verfährt man für $\alpha T < 0$. Damit gilt:

Satz 5.11 *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \to e^x$. Für obigen Wachstumsprozess haben wir also*

$$u(T) = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{\alpha T}{n}\Big)^n u_0 = u_0 e^{\alpha T}.$$

Es gibt tatsächlich viele Prozesse, für die dieser Ausdruck eine sehr gute Beschreibung liefert (die bekanntesten Beispiele sind wohl der radioaktive Zerfall und das Wachstum einer Bakterienpopulation).

---

[10] Eine andere Darstellung der Eulerschen Zahl ergibt sich aus der Exponentialreihe: $e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

[11] Die Konvergenz ergibt sich aus der Tatsache, dass die Folge (a_n) wachsend (das ist auf Grund der obigen Überlegung, dass jeder Zuwachs gleich wieder zum weiteren Zuwachs beiträgt und nicht erst nach Ablauf einer Zeiteinheit, auch ohne Beweis klar) und nach oben beschränkt ist:

Wachsend: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(\frac{n}{n+1}\,\frac{n+2}{n+1}\Big)\\
&= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\Big)^{n+1} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}\\
&\quad \text{(Bernoullische Ungleichung)}\\
&> \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big) > 1.
\end{aligned}$$

Beschränkt: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
a_n &= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\
&= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\
&\quad \text{(wegen } n^j > n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-j+1) \text{ für } j=1,\ldots,n)\\
&< \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!} < \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!} < \infty \quad \text{(vgl. Aufgabe 1.5).}
\end{aligned}$$

Die so erhaltene Exponentialfunktion zur Basis e wird auch als *e–Funktion* oder einfach als *die Exponentialfunktion* bezeichnet. Die zugehörige Logarithmusfunktion heißt der *natürliche Logarithmus* (logarithmus naturalis), Logarithmus zur Basis e, $\log_e = \ln$.

Ist $a = e^\alpha$ bzw. $\alpha = \ln a$, so ist für alle $z \in \mathbb{R}$

$$a^z = (e^\alpha)^z = e^{z \ln a}, \quad e^z = (e^\alpha)^{z/\alpha} = a^{z/\ln a}.$$

Entsprechend ist

$$\ln x = (\ln a)(\log_a x) \ \text{ bzw. } \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

was man sofort sieht, wenn man ln auf obigen Ausdruck für $x = a^z$ anwendet und $\log_a$ auf den Ausdruck für $x = e^z$.

5.5 Übungen

5.1 a) Eine Bakterienpopulation habe eine Anfangsgröße $u(0) = 10.000$ und eine Wachstumsrate von 10% pro Tag. Man gebe eine Formel für die Größe $u(t)$ der Population nach der Zeit t (in Tagen gemessen) an.

b) Wie groß ist die Population nach 10 Tagen? Wann hat sie sich verzehnfacht? (Exponentialfunktion und Logarithmus können mit dem Taschenrechner berechnet werden.)

5.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ so, dass f p–periodisch ist für jedes $p \in (a, a + \varepsilon)$. Dann ist f konstant.

5.3 Für jedes $a > 1$ wächst die Exponentialfunktion $\exp_a(x) = a^x$ „*schneller als jede Potenz*“, d. h. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $X_n \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^x > x^n$ für $x \geq X_n$.
Anleitung: Man zeige, es gibt ein X_n mit $(\sqrt[n]{a})^x > x$ für $x > X_n$.

6 Differentiation

6.1 Motivation

Eine lesenswerte ausführliche Darstellung zur Geschichte findet man in Wolfgang Walter, Analysis I, §10).

Momentangeschwindigkeit: Ein Körper (z. B. ein Auto oder ein Läufer) bewegt sich auf einer Strecke. Zum Zeitpunkt t ist er am Ort $u(t)$. Bewegt er sich im Zeitintervall $[t_0, t_1]$, also von $u(t_0)$ nach $u(t_1)$, so hat er in diesem Zeitintervall die *mittlere Geschwindigkeit* $\dfrac{u(t_1) - u(t_0)}{t_1 - t_0}$ (Entfernungseinheiten je Zeiteinheit, also zum Beispiel km pro Stunde, km/h, Meter pro Sekunde, m/s...).

Was ist aber Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt $t \in (t_1, t_2)$? Dazu betrachtet man für kleine $h \neq 0$ (positiv oder negativ) den Quotient

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h}.$$

Für sehr kleine h wird man erwarten, dass das *ungefähr* die Geschwindigkeit zur Zeit t ist.

Existiert der Limes

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h},$$

so nennt man das die *Momentangeschwindigkeit* zur Zeit t (man beachte also, dass diese nur dann definiert ist, wenn obiger Limes existiert).

Steigung einer Kurve: Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wenn f „hinreichend gutartig“ ist, ist der Graph $G_f := \Big\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in (a, b)\Big\}$ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$. Für t und $t + h \in (a, b)$ ist

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

die Steigung der *Sekante* zwischen den Punkten $(t, f(t))$ und $(t + h, f(t + h))$ des Graphen G_f, das gilt auch für negative h.[12]

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

so wäre das also die Steigung der Kurve im Punkt t, genauer die Steigung der Tangente im Punkt $(t, f(t))$.

[12]Dies ist also offenbar der Tangens des Steigungswinkels der Sekante, hat also Werte zwischen $-\infty$ und ∞. Im Straßenverkehr wird die Steigung in Prozent gemessen und gibt an, wie groß der Prozentsatz des Höhenunterschiedes an der horizontalen gemessenen Entfernung ist. Dabei entspricht die Steigung 1 (also 45°) 100%, senkrecht wäre also gewissermaßen ∞%.

Veränderungsgeschwindigkeit: Allgemein können wir also eine beliebige Größe $u(t)$ in Abhängigkeit von t (z. B. der Zeit) betrachten. Wenn der obige Limes im Punkt t existiert, wäre das die momentane Änderungsgeschwindigkeit der Größe u zur Zeit t (oder, wenn t nicht die Zeit ist, bezüglich der Größe t).

6.2 Definition der Ableitung

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Existiert für ein $t \in (a,b)$ der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h},$$

so nennen wir diesen die *Ableitung von f im Punkt t*; sie wird mit $f'(t)$ bezeichnet. Die Funktion f heißt dann im Punkt t *differenzierbar*. Der Bruch $(f(t+h)-f(t))/h$ heißt der *Differenzenquotient* von f zu t und h. Der Limes wird auch als *Differenzialquotient* bezeichnet, wobei wir hier nicht genauer auf diese Bezeichnung eingehen wollen (vgl. z. B. H. Heuser: Lehrbuch der Analysis, Teil 1, §46); hiermit hängt die Bezeichung $\frac{df}{dt}$ für $f'(t)$ zusammen.

f heißt *differenzierbar*, wenn es in allen Punkten von (a,b) differenzierbar ist; dann ist offenbar $f'(t)$ wieder eine Funktion. f heißt *stetig differenzierbar*, wenn f' stetig ist.

Ist f im Punkt t differenzierbar mit Baleitung $f'(t)$, so gilt also

$$\begin{aligned}
&\frac{f(t+h)-f(t)}{h} - f'(t) \to 0 \quad \text{für } h \to 0,\\
&f(t+h)-f(t)-hf'(t) =: \varphi_t(h) \quad \text{mit} \quad \frac{\varphi_t(h)}{h} \to 0 \quad \text{für } h \to 0,\\
&f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \varphi_t(h).
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass f nahe t sehr gut mit der linearen Funktion $g(t+h) = f(t)+hf'(t)$ übereinstimmt. Für die letzte Beziehung sagt man deshalb auch: f ist bei t *linear approximierbar*.

Gilt andererseits

$$f(t+h) = f(t) + hm + \varphi_t(h) \quad \text{mit} \quad \frac{\varphi_t(h)}{h} \to 0 \quad \text{für } h \to 0,$$

so ist f bei t differenzierbar mit $f'(t) = m$:

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = m + \frac{\varphi_t(h)}{h} \to m \quad \text{für } h \to 0.$$

Damit gilt also:

Satz 6.1 *f ist im Punkt t genau dann differenzierbar, wenn f bei t linear approximierbar ist. (Insbesondere ist damit offensichtlich, dass eine differenzierbare Funktion auch stetig ist.)*

Besonders einfache Funktionen können wir sofort differenzieren:

Die **Konstante Funktion:** Die Funktion $f(x) = c$ für alle x ist differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = 0$. Dies ist offensichtlich, da alle Differenzenquotienten gleich 0 sind.

Die **Identische Funktion:** $f(x) = x$ (diese Funktion wird auch mit id bezeichnet): In diesem Fall sind alle Differenzenquotienten gleich 1. Also ist f differenzierbar mit $f'(x) = 1$. Entsprechend sieht man, dass die *affine Funktion* $f(x) = ax + b$ differenzierbar ist mit $f'(x) = a$.

Das *Quadrat* $f(x) = x^2$ zu untersuchen ist schon etwas schwieriger.[13] Seine Ableitung und die beliebiger Polynome wird sich aus den unten vorgestellten Regeln sehr leicht ergeben.

Satz 6.2 (Satz von Rolle und Mittelwertsatz) a) Satz von Rolle: *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b), $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

b) Mittelwertsatz*: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b), so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi) \qquad \textit{bzw.} \qquad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. a) Ist $f(x) = f(a)$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant, also gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Gibt es ein x mit $f(x) > f(a)$, so gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = \max f$. Für alle $x \in (a, b)$ gilt also $f(x) \leq f(\xi)$, also

$$\frac{f(\xi + h) - f(x)}{h} > 0 \text{ für } h < 0, \qquad \frac{f(\xi + h) - f(x)}{h} < 0 \text{ für } h > 0.$$

Da f differenzierbar ist, existiert der Grenzwert für $h \to 0$, und dieser ist notwendig $= 0$.

b) Betrachten wir die Funktion

$$g(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{für } [a, b].$$

g ist differenzierbar mit $g(a) = g(b) = f(a)$. Nach Teil a existiert ein ξ mit (vgl. Ableitung der affinen Funktion weiter oben)

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Das ist die Behauptung. ∎

[13] In diesem Fall ist
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{(x + h)^2 - x^2\right\} = \lim_{h \to 0}\{2x + h\} = 2x.$$

Folgerung 6.3 a) *Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle x, so ist f konstant.*

b) *Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f injektiv (aus $x \neq y$ folgt $f(x) \neq f(y)$).*

c) *Ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng wachsend (bzw. fallend).*

8:11.6.2007

6.3 Differentiationsregeln

Satz 6.4 (Differentiationsregeln) a) *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar (in x_0), $a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind auch*

(i) *$af + bg$ differenzierbar (in x_0) mit*

$$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x) \quad (\textit{Linearität}),$$

(ii) *fg differenzierbar (in x_0) mit*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{(Produktregel)}.$$

(iii) *$\frac{f}{g}$ differenzierbar (in x_0), falls $g(x) \neq 0$ (bzw. $g(x_0) \neq 0$) ist, mit*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{(Quotientenregel)}.$$

b) *Sind $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(x) \in (c, d)$ für $x \in (a, b)$, dann ist auch $g \circ f$ mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ differenzierbar und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad \text{(Kettenregel)}$$

(=äußere Ableitung $\times$ innere Ableitung).

c) *Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$ für alle x aus (a, b), so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar mit*

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad \textit{bzw.} \quad (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Beweis. a) (i) Man schreibt den fraglichen Differenzenquotienten hin und sieht, dass beim Grenzübergang das richtige Ergebnis herauskommt.

(ii) Das gilt im Prinzip auch hierfür. Hier die Rechnung

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&\quad= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big\{\Big(f(x+h)-f(x)\Big)g(x+h)+f(x)\Big(g(x+h)-g(x)\Big)\Big\}\\
&\quad= \lim\Big\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big\}.
\end{aligned}$$

Da g stetig ist und die beiden Differenzenquotienten konvergieren, folgt daraus die Behauptung.

(iii) Wir betrachten zunächst den Spezialfall $f\equiv 1$, also die Funktion $\frac{1}{g}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\Big)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}.$$

Wegen $g(x)\neq 0$ kann in beiden Brüchen getrennt zum Limes übergegangen werden. Das liefert die Differenzierbarkeit von $\frac{1}{g}$ und

$$\Big(\frac{1}{g}\Big)'(x)=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Nun kann $\frac{f}{g}$ als Produkt $f\cdot\frac{1}{g}$ aufgefaßt werden, und die Produktregel liefert

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'=\Big(f\cdot\frac{1}{g}\Big)'=f'\frac{1}{g}+f\frac{-g'}{g^2}=\frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

b) Unter Berücksichtigung ob $f(x+h)\neq f(x)$ oder $f(x+h)=f(x)$ ist, folgt

$$\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=\begin{cases}\dfrac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\,\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & \text{falls } f(x+h)\neq f(x),\\[2ex] 0=g'(f(x))\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} & \text{falls } f(x+h)=f(x).\end{cases}$$

Da g im Punkt x differenzierbar ist, ist die Funktion

$$h\mapsto\begin{cases}\dfrac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} & \text{falls } f(x+h)\neq f(x),\\ g'(f(x)) & \text{falls } f(x+h)=f(x)\end{cases}$$

stetig bei $h=0$. Also kann oben der Grenzübergang $h\to 0$ vollzogen werden und liefert

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}=g'(f(x))f'(x),$$

was zu beweisen war.

c) Nach Teil b der obigen Folgerung existiert die Umkehrfunktion f^{-1}. Da der Graph von f^{-1} sich aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Diagonalen $y=x$ ergibt, ist der

Tangens des Steigungswinkels des Graphen von f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ gerade der Kehrwert der Steigung des Graphen von f im Punkt x, d. h.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{bzw.} \ (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

■

6.4 Ableitungen elementarer Funktionen

Satz 6.5 (Ableitung von Potenzen) *Für $f_n(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n'(x) = nx^{n-1}$.*

Beweis. Zumindest für $n = 2$ und 3 kann man das mühelos direkt zeigen. Eleganter geht es mit Hilfe der Produktregel und einer Induktion nach n.

Für $\boldsymbol{n = 1}$ ist die Aussage bereits bekannt.
$\boldsymbol{n \Rightarrow n + 1}$**:** Gilt $f_n'(x) = nx^{n-1}$, so folgt mit der Produktregel

$$f_{n+1}'(x) = (x \cdot f_n(x))' = 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Das ist die gewünschte Aussage für f_{n+1}. ■

Satz 6.6 (Ableitung von Sinus und Cosinus) *Die Funktionen* sin *und* cos *sind differenzierbar mit*

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin.$$

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass sin und cos im Nullpunkt differenzierbar sind:

Wegen $|\sin h| \le |h|$ und $|\tan h| \ge |h|$ (vgl. Kap. 3) gilt

$$\cos h \le \frac{\tan h}{h} \cos h = \frac{\sin h}{h} \le 1.$$

Da beide Seiten für $h \to 0$ gegen 1 konvergieren, folgt

$$\sin'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 = \cos(0).$$

Wegen $1 \ge \cos h \ge 1 - \frac{h^2}{2}$ (vgl. Kap. 3) folgt $0 \ge \frac{\cos h - 1}{h} \ge -\frac{h}{2}$, also

$$\cos'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - \cos 0}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \to 0 = -\sin(0).$$

die allgemeinen Aussagen folgen nun mit Hilfe der Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big(\sin(x+h)-\sin x\Big) &= \frac{1}{h}\Big\{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x\Big\}\\
&= \sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\to\cos x \quad \text{für } h\to 0,\\
\frac{1}{h}\Big(\cos(x+h)-\cos x\Big) &= \frac{1}{h}\Big\{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x\Big\}\\
&= \cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\to-\sin x \quad \text{für } h\to 0.
\end{aligned}$$

■

Satz 6.7 (Ableitung der Exponentialfunktion) *Die Exponentialfunktion* exp *ist differenzierbar und es gilt* $\exp' = \exp$.

Beweis. Wieder untersuchen wir zunächst die Differenzierbarkeit im Nullpunkt.
Für jedes $n\in\mathbb{N}$ und $h>0$ gilt $(1+\frac{h}{n})^n = 1+h+\ldots\geq 1+h$, also ist auch

$$\exp h = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{h}{n}\Big)^n \geq 1+h.$$

Andererseits gilt für jedes n und kleine $h>0$

$$\begin{aligned}
\Big(1+\frac{h}{n}\Big)^n &= 1+n\frac{h}{n}+\frac{n(n-1)}{2}\Big(\frac{h}{n}\Big)^2+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\Big(\frac{h}{n}\Big)^n\\
&\leq 1+h+\ldots+h^n\leq\frac{1-h^{n+1}}{1-h}<\frac{1}{1-h}
\end{aligned}$$

und somit $\exp h\leq\frac{1}{1-h}$, also für kleine $h>0$

$$\frac{(1+h)-1}{h}\leq\frac{\exp(h)-1}{h}\leq\frac{\frac{1}{1-h}-1}{h}=\frac{h}{(1-h)h}.$$

Für $h\to 0+$ gehen beide Seiten gegen $1=\exp(0)$, d. h.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{\exp(h)-1}{h}=1=\exp(0).$$

Damit folgt auch für den Grenzwert von links

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0-}\frac{\exp(h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0-}\exp(h)\frac{1-\exp(-h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0+}\exp(-h)\frac{-(\exp(h)-1)}{-h}=\lim_{h\to 0}\exp(-h)\frac{\exp(h)-1}{h}=1=\exp(0).
\end{aligned}$$

Also ist exp im Nullpunkt differenzierbar mit $\exp'(0) = 1 = \exp(0)$. Mit Hilfe der Funktionalgleichung folgt

$$\exp'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x).$$

Das ist die Behauptung. ■

Hiermit wird die große Bedeutung der Exponentialfunktion deutlich. Sie ist Lösung der *Differenzialgleichung*

$$y' = y \quad (\text{ mit dem Anfangswert} y(0) = 1).$$

Gibt man einen beliebigen *Anfangswert* $y(0) = y_0$ vor, so ist

$$y(x) = y_0 \exp x$$

die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems (AWP)

$$y' = y, \quad y(0) = y_0.$$

Entsprechend hat das AWP

$$y' = ay, \quad y(0) = y_0$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$y(x) = y_0 \exp(ax).$$

Allgemeiner hat die *lineare Differenzialgleichung* n–ter Ordnung ($y^{(0)} = y$)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y^{(0)} = 0$$

u. a. die Lösungen $\exp(\lambda x)$, wobei λ die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms* $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ sind.

6.5 Einfache Beispiele

Für $f(x) = \sin x^2$ erhält man mit der Kettenregel

$$f'(x) = \sin'(x^2)(x^2)' = 2x \cos x.$$

Mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion folgt für $\ln = \exp^{-1}$

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

Entsprechend erhält man für $\mathrm{sqrt}(x) := \sqrt{x}$ (für $x > 0$) als Umkehrfunktion von $f(x) = x^2$

$$\mathrm{sqrt}'(x) = \frac{1}{f'(\mathrm{sqrt}\, x)} = \frac{1}{2\mathrm{sqrt}\, x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{1/2}.$$

Es fällt auf, dass also auch für $x^{1/2}$ die Ableitung (wie für ganzzahlige Exponenten) durch $\frac{1}{2}x^{1/2-1}$ gegeben ist. Ähnlich kann man für beliebige Wurzeln $x^{1/n}$ verfahren; das gilt aber noch viel allgemeiner:
Für $f(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ folgt mit der Kettenregel:

$$f'(x) = \exp'(\alpha \ln x) \cdot \alpha \cdot \ln' x = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha-1}.$$

Für $f(x) = a^x = \exp(x \ln a)$ (mit $a > 0$) folgt ebenfalls mit der Kettenregel

$$f'(x) = \exp'(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a$$

(die Verallgemeinerung der Formel $(e^x)' = e^x$). **9:18.6.07**

6.6 Übungen

6.1 Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar (man skizziere die Funktionen und begründe die Differenzierbarkeit und die Nichtdifferenzierbarkeit):

a)
$$f(x) = |x| := \begin{cases} -x & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

b)
$$g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x^2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

6.2 Sei $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

a) Man zeige, dass dann
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^2 \sin g(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
differenzierbar ist und berechne die Ableitung in allen Punkten.

b) Mit $g(x) := \dfrac{1}{x^2}$ ist die Funktion f aus Teil a nicht stetig differenzierbar.

6.3 Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

a) Ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f injektiv.

b) Ist die Voraussetzung von Teil a in einem Punkt verletzt, so ist die Behauptung i. allg. falsch.

6.4 a) Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.

b) Ist f differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ oder $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$.

6.5 Der hyperbolische Cosinus (cosh) und der hyperbolische Sinus (sinh) sind definiert durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

a) Man zeige: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

b) Man bestimme die Ableitung von cosh und sinh.

c) Man zeige: sinh ist streng wachsend (also bijektiv) und surjektiv, und skizziere die Graphen von sinh und cosh.
Anleitung: Verwandle $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = t$ in eine quadratische Gleichung für e^x.

d) Man zeige: $\sinh^{-1}(t) = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1})$.

7 Extremwerte reeller Funktionen

Aus dem Abschnitt über stetige Funktionen wissen wir: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gibt es mindestens ein x_m und ein x_M mit

$$f(x_m) \le f(x) \le f(x_M) \quad \text{für alle } x \in [a,b],$$

d. h. f nimmt in x_m (aber i. allg. nicht nur dort) sein *Minimum* und in x_M (aber i. allg. nicht nur dort) sein Maximum an.

Hier geht es nun um die Frage, wie man diese Minima und Maxima (allgemeiner: *Extrema*) finden kann. Es wird sich zeigen, dass sich diese Methode nur eignet, Extrema im Innern des Intervalls zu finden. Es muß ggf. anschließend überprüft werden, ob nicht in einem Randpunkt ein Extremum vorliegt. Die Sätze sind deshalb stets für Funktionen auf einem offenen Intervall formuliert.

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt f hat in $x_0 \in (a,b)$ ein *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \le f(x_0) \;\; (\text{ bzw. } f(x) \ge f(x_0)) \;\; \text{für alle } x \in (a,b) \;\; \text{mit } (x - x_0) < \varepsilon;$$

f hat in $x_0 \in (a,b)$ ein *strenges lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) < f(x_0) \;\; (\text{ bzw. } f(x) > f(x_0)) \;\; \text{für alle } x \in (a,b) \;\; \text{mit } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Entsprechend spricht man von einem *globalen Maximum* (bzw. *Minimum*) oder einem *strengen globalen Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn die entsprechenden Ungleichungen für *alle* $x \in (a,b)$ bzw. für alle $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ gelten.

Die allgemeinen Sätze werden nur Aussagen über lokale Extrema liefern. Um ggf. herauszufinden, wo das globale Extremum vorliegt, müssen die so gefundenen lokalen Extrema miteinander verglichen werden.

Wir formulieren zunächst eine *notwendige Bedingung* für das Vorliegen eines lokalen Extremums einer differenzierbaren Funktion. Dieses muß also erfüllt sein, wenn überhaupt eine Chance bestehen soll, dass dort ein Extremum vorliegt:

Satz 7.1 (Notwendige Bedingung für Extremum) *Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum, und f sei in x_0 differenzierbar. Dann ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. O. E. betrachten wir den Fall des Maximums: Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f(x) \le f(x_0) \;\; \text{für alle } x \in (a,b) \;\; \text{mit } |x - x_0| < \varepsilon.$$

Also ist für $|x - x_0| < \varepsilon$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{für } x < x_0, \\ \leq 0 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Da

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, muß gelten $f'(x_0) = 0$. ■

Dass die Bedingung $f'(x_0)$ nicht ausreicht, um das Vorliegen eines Extremums zu garantieren, zeigt das einfache

Beispiel 7.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Die Ableitung $f'(x) = 3x^2$ verschwindet in $x_0 = 0$ (und nur dort). Aber natürlich hat die Funktion dort kein Maximum und kein Minimum: Für alle $x < 0$ ist $f(x) < 0 = f(x_0)$, für alle $x > 0$ ist $f(x) > 0 = f(x_0)$. (Tatsächlich hat diese Funktion überhaupt kein Extremum.) □

Eine für viele (um nicht zu sagen die meisten) Fälle ausreichende *hinreichende Bedingung* für ein Extremum liefert der

Satz 7.3 (Hinreichende Bedingung für ein Extremum) *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar in einer Umgebung von x_0 mit $f'(x_0) = 0$ und zwei mal differenzierbar in x_0*[14] *mit $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$). Dann liegt für f in x_0 ein strenges lokales Maximum (bzw. Minimum) vor.*

Beweis. Wir betrachten o. E. den Fall $f''(x_0) < 0$. Wegen $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0) < 0.$$

Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \quad & \text{für} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ f'(x) < 0 \quad & \text{für} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es also für jedes $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ein ξ_x zwischen x und x_0 mit

[14] d. h. es gibt ein $\eta > 0$ so, dass f in $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ differenzierbar ist, $f' : (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ ist also wieder eine Funktion, und diese sei im Punkt x_0 differenzierbar. In den meisten konkreten Fällen wird f auf ganz (a, b) stetig differenzierbar und f' auf ganz (a, b) zumindest differenzierbar sein.

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0) < 0,$$

da jeweils ein Faktor positiv und einer negativ ist. Also gilt $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in (a, b)$ mit $0 < |x - x_0| < \varepsilon$. ■

Bemerkung 7.4 Man beachte, dass im Fall $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ die Situation nicht ohne weiteres entscheidbar ist. Häufig helfen dann weitere Ableitungen: ist auch $f^{(3)}(x_0) = 0$ und $f^{(4)}(x_0) < 0$ (bzw. $f^{(4)}(x_0) > 0$), so liegt ein strenges lokales Maximum (bzw. Minimum) vor. Ist dagegen $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, so liegt bei x_0 kein Extremum vor (sondern ein Wendepunkt des Graphen, d. h. die Krümmung der Kurve wechselt in diesem Punkt von rechts nach links oder umgekehrt.). Entsprechende Aussagen sind mit noch höheren Ableitungen möglich, spielen aber praktisch kaum eine Rolle.

Beispiel 7.5 $f(x) = x^4 - x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 2x$, $f''(x) = 12x^2 - 2$.
Kandidaten für Extrema sind die Nullstellen von f', also

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

In diesen Punkten gilt

$$f''(x_1) = -2 < 0, \quad f''(x_{2/3}) = 4 > 0.$$

Also liegt bei $x_1 = 0$ ein strenges lokales Maximum ($f(0) = 0$, natürlich kein globales Maximum), bei $x_{2/3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ jeweils ein strenges lokales Minimum. Letztere sind die globalen Minima (mit gleichem Funktionswert $f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = -\frac{1}{4}$). □

Beispiel 7.6 $f(x) = x^3 - x^2$, $f'(x) = 3x^2 - 2x$, $f''(x) = 6x - 2$.
Die Nullstellen von f' sind

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Dort gilt

$$f''(x_1) = -2 < 0, \quad f''(x_2) = 2 > 0.$$

Also liegt bei $x_1 = 0$ ein strenges lokales Maximum ($f(0) = 0$), bei $x_2 = \frac{2}{3}$ ein strenges lokales Minimum vor ($f\Big(\frac{2}{3}\Big) = -4/27$). Globale Extrema gibt es nicht. □

Mit Hilfe der hinreichenden Bedingung läßt sich die notwendige Bedingung etwas schärfer formulieren:

Satz 7.7 *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ habe in x_0 ein lokales Maximum (bzw. Minimum). Ist f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar und im Punkt x_0 zwei mal differenzierbar, so gilt*

$$f'(x_0) = 0 \quad \textit{und} \quad f''(x_0) \le 0 \;\; (\textit{ bzw. } f''(x_0) \ge 0).$$

Beweis. $f'(x_0) = 0$ wurde bereits oben (Satz 7.3) gezeigt. Im weiteren betrachten wir o. E. den Fall des Maximums: Wäre $f''(x_0) > 0$, so würde nach Satz 7.1 ein strenges lokales Minimum vorliegen, ein Widerspruch. Also ist $f''(x_0) \le 0$. ■

Beispiel 7.8 *Welches Rechteck mit vorgegebenem Umfang U hat die größte Fläche F?*

Ist eine Seite des Rechtecks x, so ist die andere $\frac{1}{2}U - x$, also die Fläche

$$F(x) = x\Big(\frac{1}{2}U - x\Big) = -x^2 + \frac{1}{2}Ux.$$

Die Ableitung von F ist

$$F'(x) = -2x + \frac{1}{2}U.$$

Als Nullstelle von F' kommt also nur $x = \frac{1}{4}U$ für ein Extremum in Frage. Die zweite Ableitung ist $F''(x) \equiv -2$, also ist insbesondere $F''\Big(\frac{1}{4}U\Big) = -2 < 0$. Bei $x = \frac{1}{4}U$ liegt also das (globale) Maximum vor. Da dann auch die zweite Seite $\frac{1}{4}U$ ist, hat also das Quadrat mit Seitenlänge $\frac{1}{4}U$ die maximale Fläche $F\Big(\frac{1}{4}U\Big) = \frac{1}{16}U^2$.[15]

Natürlich könnte man sich hier, wie in vielen anderen Fällen, die Überlegung mit der zweiten Ableitung sparen. Da $F(x)$ eine nach unten geöffnete Parabel ist, kann es nur eine Stelle mit Ableitung 0 geben, und diese ist ein globales Maximum.

Man kann die Frage auch umgekehrt stellen: Welches Rechteck mit vorgegebener Fläche F hat den kleinsten Umfang? Eine Seite x, Umfang $U(x) = 2x + 2F/x$, $U'(x) = 2 - 2F/x^2$, $U'(x) = 0$ liefert $x = \sqrt{F}$ (die Lösung $-\sqrt{F}$ kommt nicht in Frage). Wegen $U''(x) = 4F/x^3$ ist $U''(\sqrt{F}) > 0$, d. h. $x = \sqrt{F}$ ist das Minimum; auch die zweite Seite ist $\sqrt{x}$, der Umfang $U(\sqrt{F}) = 4\sqrt{F}$. □

Beispiel 7.9 Welches in den Einheitskreis einbeschriebene Rechteck hat die größte Fläche? Es wird sich wieder zeigen, dass dies das Quadrat ist (mit Seitenlänge $\sqrt{2}$). Man kann das

[15] Gibt es auch ein Rechteck mit Umfang U und minimalem Flächeninhalt? Die Funktion F hat natürlich kein Minimum (nach unten geöffnete Parabel). Durch die Problemstellung ist allerdings F nur auf dem Intervall $[0, U/2]$ definiert. Für $x = 0$ und $x = \frac{U}{2}$ erhält man $F = 0$.

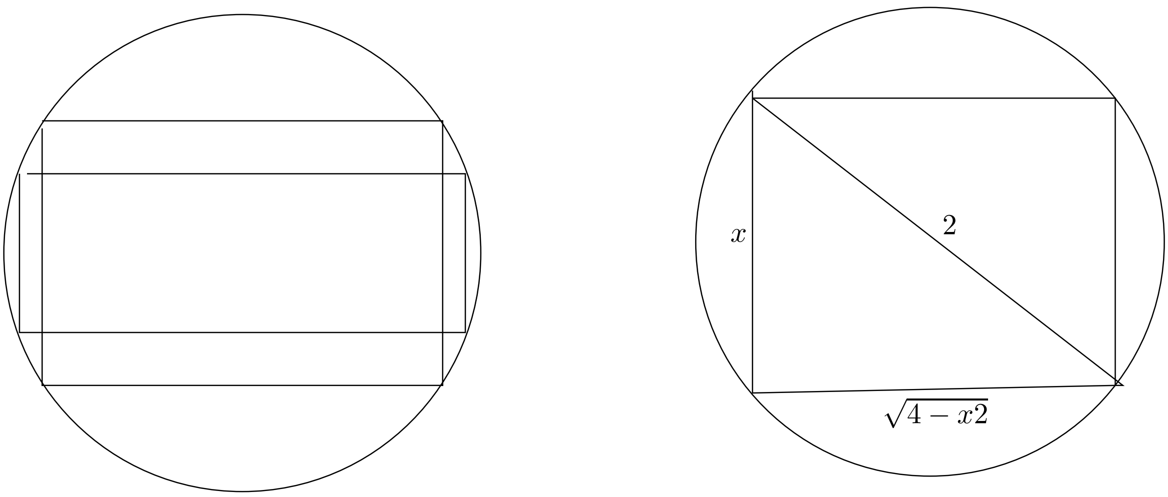


Abbildung 10: Größtes Rechteck im Kreis

schon aus einer Skizze vermuten (oder beweisen?): Dazu zeichnet man sich ein Rechteck mit zwei verschiedenen Seiten ein. Wenn man dann daraus ein Rechteck mit größerer kleiner und kleinerer großer Seite macht, erkennt man, dass größere Flächenstücke hinzugenommen werden, als weggeschnitten werden. Um den Beweis zu vervollständigen, muß man sich allerdings zusätzlich vergewissern, dass es überhaupt ein einbeschriebenes Rechteck mit maximaler Fläche gibt.

Aber nun zur Rechnung: Ist eine Seite des Rechtecks x (natürlich kommen nur Werte aus $[0,2]$ in Frage), so ist (Rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die beiden Rechtecksseiten sind und dessen Hypothenuse ein Durchmesser des Kreises ist) die zweite Seite $\sqrt{4-x^2}$. Die Fläche dieses Rechtecks ist

$$F(x) = x\sqrt{4-x^2}, \quad F'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Zur Bestimmung der Nullstellen multipliziert man $F'(x)$ mit $\sqrt{4-x^2} \neq 0$ und erhält die Gleichung

$$4 - x^2 - x^2 = 0, \quad 2x^2 = 4, \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Natürlich kommt als Seitenlänge nur $x = +\sqrt{2}$ in Frage.

Zur Bestätigung, dass es sich um ein Maximum handelt, berechnen wir

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{2x\sqrt{4-x^2} + x^3/\sqrt{4-x^2}}{4-x^2} \\ &= \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\Big\{ -x(4-x^2) - 2x(4-x^2) - x^3 \Big\} < 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in (0,2)$, also insbesondere $F''(\sqrt{2}) < 0$. Bei $x = \sqrt{2}$ liegt also ein Maximum vor. Die zweite Seite ist ebenfalls $\sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}$, d. h. es handelt sich um ein Quadrat.

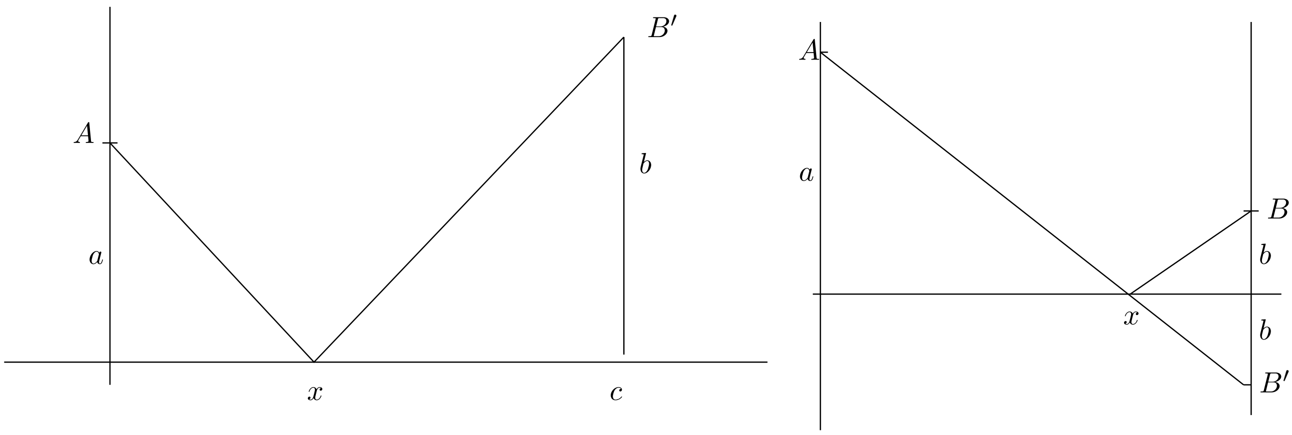


Abbildung 11: Reflexionsgesetz

Da $x = \sqrt{2}$ die einzige Nullstelle von F' in $(0,2)$ ist, und da $F(0) = F(2) = 0$ ist, ist $x = \sqrt{2}$ das globale Maximum.

Dass es sich um ein Maximum handelt, ist auch ohne zweite Ableitung leicht zu sehen, da F in den Randpunkten 0 und 2 verschwindet und in $(0,2)$ strikt positiv ist. $\square$

Beispiel 7.10 Gegeben sei eine Gerade g in der Ebene und zwei Punkte A die auf der gleichen Seite der Geraden liegen. Wie verläuft der kürzeste Weg von A nach B, der g berührt?

Zur Vereinfachung der Rechnung sei g die x–Achse, A im Abstand a auf der positiven y–Achse, B habe die Koordinaten (c, b). Der Punkt, in dem die x–Achse berührt wird sei $(x, 0)$.

Dann kann die Länge des Weges S von A nach B durch x ausgedrückt werden:

$$S(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

Die Ableitung ist

$$S'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}.$$

Setzen wir $S'(x) = 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}, \\
x\sqrt{(c-x)^2+b^2} &= (c-x)\sqrt{a^2+x^2}, \\
x^2\{(c-x)^2+b^2\} &= (c-x)^2(a^2+x^2), \\
x^2b^2 &= (c-x)^2a^2, \\
\frac{x}{a} &= \frac{c-x}{b}.
\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung kann natürlich x ausgerechnet werden, $x = ac/(a+b)$. Interessanter ist aber, was die letzte Gleichung aussagt:

Tangens des Einfallwinkels α = Tangens des Ausfallwinkels β,

also

Einfallwinkel α = Ausfallwinkel β,

d. h. der kürzeste Weg genügt dem *Reflexionsgesetz*.[16] □

Dass nicht immer die Bestimmung des Extremums mit Hilfe der Analysis der einfachste Weg ist, zeigt das folgende

Beispiel 7.11 Welches in einen Kreis einbeschriebene n–Eck ist das flächengrößte? Die Vermutung, dass dies das regelmäßige n–Eck ist, liegt nahe. Tatsächlich ist offensichtlich, dass jedes nichtregelmäßige n–Eck so verändert werden kann, dass die Fläche größer wird. Dazu wähle man zwei verschiedene benachbarte Seiten und die Diagonale, die diese Ecke abschneidet. Dann ist elementargeometrisch klar, dass die Fläche des abgeschnittenen Dreiecks vergrößert wird, wenn man die Seiten des Dreiecks gleich wählt (die Höhe wird vergrößert).

Wenn man jetzt noch weiss, dass es tatsächlich ein einbeschriebenes n–Eck mit maximaler Fläche gibt, dann folgt, dass dieses regelmäßig ist, denn sonst könnte man es vergrößern.

Der Existenzbeweis fordert allerdings etwas Analysis: Da die Fläche jedes der einbeschriebenen n–Ecke kleiner als die Kreisfläche ist, existiert das Supremum F. Es gibt also eine Folge (S_k) von n–Ecken mit $F(S_k) \to F$ für $k \to \infty$. Die Ecken jedes der n–Ecke denken wir uns in mathematisch positiver Richtung durchnumeriert. Dabei können wir o. E. annehmen, dass die erste Ecke immer auf der gleichen Stelle liegt. Die Folge der zweiten Ecke enthält eine konvergente Teilfolge[17]. Die verbleibende Folge der dritten Ecken enthält eine konvergente Teilfolge .... Nach $n-1$ Schritten haben wir eine Teilfolge, bei der alle Ecken konvergieren. Also konvergiert die entsprechende Folge der n–Ecke gegen ein n–Eck, das die Fläche F hat. □

10:25.6.07

[16] Man kann dies auch sehr einfach elementargeometrisch sehen: Dazu spiegelt man B an der x –Achse und erhält einen Punkt B' unterhalb der x–Achse. Die kürzeste Verbindung von A nach B' ist natürlich die Gerade. Rückspiegelung des Geradenstücks von x nach B' liefert das Ergebnis.

[17] Da die Kreislinie mit dem Intervall $[0, 2\pi]$ oder $[0, 2\pi r]$ identifiziert werden kann, kann die Folge dieser Eckpunkte als Folge in $[0, 2\pi]$ betrachtet werden und hat dort (Bolzano–Weierstraß) eine konvergente Teilfolge.

7.1 Übungen

7.1 Gegeben ist die Funktion

$$f : [-3, 3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x.$$

Man bestimme die lokalen und globalen Extrema (Randpunkte nicht vergessen). Die lokalen Extrema in $(-3, 3)$ bestätige man sowohl mit Hilfe der zweiten Ableitungen als auch aus dem globalen Verhalten des Graphen von f.

7.2 Man bestimme Radius r und Höhe h einer Dose ohne Deckel mit 1ℓ Volumen mit minimalem Materialbedarf.

7.3 Ein Körper rutscht reibungsfrei aus h Meter Höhe auf einer schiefen Ebene zu einem a Meter entfernten Punkt P. Wie muß man h wählen, damit der Punkt P möglichst schnell erreicht wird?
Hinweise: Ist die Erdbeschleunigung g und der Neigungswinkel α, so ist die Beschleunigung b in Richtung der schiefen Ebene $b = g \sin \alpha$ (Begründung!). Der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist $\dfrac{1}{2}bt^2$.

7.4

a) Unter den Dreiecken mit fester Fläche F hat das gleichseitige den kleinsten Umfang.

b) Wie groß ist der Umfang dieses Dreiecks?

8 Integration

8.1 Stammfunktion

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Integration einzuführen, insbesondere

– als Umkehrung der Differentiation, und

– über sogenannte Riemann–Summen.

Hier gehen wir zunächst den Weg über die Umkehrung der Differentiation.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt, unbeschränkt), $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt eine *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist (einseitig differenzierbar in einem Randpunkt, wenn er zu I gehört) mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$. Die Stammfunktion F einer Funktion f ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Satz 8.1 *Ist F eine Stammfunktion von f, so ist eine Funktion G genau dann Stammfunktion von f, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $G = F + c$. (Insbesondere ist also eine Stammfunktion eindeutig bis auf eine beliebige additive Konstante.)*

Beweis. $\Leftarrow$: Ist $G = F + c$, so ist G differenzierbar mit

$$G' = F' + 0 = F' = f,$$

d. h. G ist ebenfalls Stammfunktion von f.

$\Leftarrow$: Ist auch G Stammfunktion von f, so ist

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0,$$

also ist $G - F$ konstant (vgl. Folgerung 6.3a). ∎

Jedes Ergebnis einer Differentiation liefert uns eine Funktion, für die wir eine Stammfunktion angeben können, insbesondere ist

- cx eine Stammfunktion der konstanten Funktion c,
- $\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}$ eine Stammfunktion von x^a für $a \neq -1$,

- ln eine Stammfunktion von x^{-1},
- exp eine Stammfunktion von exp,
- sin eine Stammfunktion von cos,
- cos eine Stammfunktion von $-\sin$.

Viele einfache Funktionen, wie z. B. $\ln x$ oder $x \sin x$, haben wir bisher nicht als Ergebnis einer Differentiation erhalten. Haben sie auch eine Stammfunktion? Und wie kann man sie ggf. finden?

Dazu ist es günstig, eine Schreibweise einzuführen, deren genauere Bedeutung später erkennbar wird. Wir schreiben

$$\int f \quad \text{für eine (beliebige) Stammfunktion von } f.$$

(Da Stammfunktionen nur bis auf Konstanten eindeutig sind, gelten also entsprechend Gleichungen auch nur bis auf Konstanten; das Symbol $\int f$ ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt).

Satz 8.2 (Partielle Integration) *Sind u und v stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int u'v = uv - \int uv'.$$

(Um also eine Stammfunktion des Produkts $u'v$ zu finden, müssen wir eine Stammfunktion u von u' finden, wir müssen v differenzieren, und schließlich müssen wir eine Stammfunktion von uv' finden. U.U. muß man uv' wieder als ein – i. allg. anderes – Produkt darstellen, und dies nach dem gleichen Schema behandeln. Das klingt kompliziert, führt aber oft einfach und schnell zum Ziel.)

Beweis. Da $\int uv'$ eine Stammfunktion von uv' ist, erhält man durch Anwendung der Produktregel auf uv:

$$\frac{d}{dx}\Big(uv - \int uv'\Big) = u'v + uv' - uv' = u'v,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. ■

Beispiel 8.3 Wir bestimmen eine Stammfunktion von $f(x) = x \sin x$. Setzen wir $v(x) = x$ und $u'(x) = \sin x$, so folgt

$$\int (\sin x) \cdot x = (-\cos x)x + \int \cos x = -x \cos x + \sin x.$$

Man überprüfe das Resultat durch Differentiation von $-x\cos x + \sin x$. (Natürlich hätte man auch versuchen können, $v(x) = \sin x$ und $u'(x) = x$ zu wählen; der neue Integrand wäre dann $x^2 \cos x$, also komplizierter als der ursprüngliche Integrand. Dieser Weg führt also nicht zum Ziel.) □

Beispiel 8.4 Wie bestimmt man eine Stammfunktion von $\ln x$? Hier machen wir aus $\ln x$ künstlich das Produkt $1 \cdot \ln x$ und erhalten

$$\int 1 \cdot \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = x \ln x - \int 1 = x \ln x - x.$$

Man überprüfe wieder das Resultat. □

8.2 Existenz einer Stammfunktion

Abgesehen davon, dass es offenbar i. allg. relativ schwierig ist, eine Stammfunktion zu finden, stellt sich die Frage, welche Funktionen überhaupt eine Stammfunktion besitzen, oder wenigstens eine allgemeine Klasse von Funktionen zu finden, die Stammfunktionen besitzen.

Satz 8.5 *$I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion.*

Beweis. Die Stammfunktion F von f werden wir dadurch finden, dass wir für $F(x)$ die *Fläche* zwischen x–Achse und dem Graphen der Funktion f zwischen einer fest gewählten Abszine a und x wählen. Dabei werden Flächenstücke unterhalb der x–Achse negativ gezählt und Flächenstücke links von a mit umgekehrtem Vorzeichen als die rechts von x.

Wie bestimmen wir nun für ein festes b (zunächst rechts von a) die Fläche $F(b)$?

Eine *Untersumme* für $F(b)$ erhält man, indem man eine Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ wählt und Zahlen $c_1, \ldots, c_n$ mit

$$c_j \le f(x) \quad \text{für } x \in [x_{j-1}, x_j] \quad \Big(\text{z. B.} \quad c_j = \min\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}\Big)$$

und definiert die Untersumme von f zur Zerlegung $\{x_0, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_n\}$ durch

$$S_*(f; x_0, \ldots, x_n; c_1, \ldots, c_n) := \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Entsprechend definiert man *Obersummen*

$$S^*(f; x_0, \ldots, x_n; d_1, \ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} d_j (x_j - x_{j-1})$$

mit

$$d_j \geq f(x) \quad \text{für } x \in [x_{j-1}, x_j] \qquad \Big(\text{z. B. } d_j = \max\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}\Big).$$

Offenbar gilt

$$\text{jede Untersumme } \leq \text{ jede Obersumme.}$$

Insbesondere sind die Obersummen nach unten, die Untersummen nach oben beschränkt, und es gilt

$$\sup \quad \text{aller Untersummen } \leq \inf \quad \text{aller Obersummen.}$$

Weil f stetig ist, gibt es Untersummen und Obersummen, die sich beliebig wenig unterscheiden.[18] Also gilt

$$\sup \quad \text{aller Untersummen } = \inf \quad \text{aller Obersummen.}$$

Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir als die gesuchte Fläche

$$F(b) =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

($\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wird auch als bestimmtes Integral von f über $[a, b]$ bezeichnet). Wir haben damit (jetzt mit variablem x statt b) eine neue Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Diese Funktion ist differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$, denn es gilt (zunächst für $h > 0$)

$$F(x+h) - F(x) \begin{cases} \leq h \max\{f(t) : t \in [x, x+h]\}, \\ \geq h \min\{f(t) : t \in [x, x+h]\}. \end{cases}$$

Wegen

$$\left.\begin{array}{l} \max\Big\{f(t) : t \in [x, x+h]\Big\} \to f(x) \\ \min\Big\{f(t) : t \in [x, x+h]\Big\} \to f(x) \end{array}\right. \quad \text{für } h \to 0$$

[18]Das ist nicht ganz so einfach, wie man vielleicht auf den ersten Blick glaubt: Zunächst muss man wissen, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall (hier $[a, x]$ bzw. $[x, a]$) *gleichmäßig stetig* ist, d. h.

$$\forall \exists > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ \forall_{y,z} \ \text{ mit } |y - z| < \delta \ \text{ gilt } |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

Damit folgt die Behauptung leicht.

folgt daraus

$$\frac{1}{h}\Big(F(x+h)-F(x)\Big) \to f(x).$$

(Man mache sich klar, dass das auch für $h < 0$ gilt). Damit ist gezeigt, dass jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

hat; eine andere Wahl von a bewirkt lediglich eine additive Konstante. ∎

Satz 8.6 (Hauptsatz der Differenzial– und Integralrechnung) *Ist f stetig und F eine (beliebige) Stammfunktion von f, so gilt für das* bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Beweis. Dies gilt zunächst für die oben gefundene spezielle Stammfunktion. Da sich eine beliebige Stammfunktion nur um eine additive Konstante unterscheidet, gilt die Identität für jede Stammfunktion. ∎

Die explizite Berechnung bestimmter Integrale erfolgt grundsätzlich

- mit Hilfe des Hauptsatzes, oder
- numerisch (und damit approximativ) mit Hilfe der oben benutzten Riemann–Summen. In der numerischen Mathematik wird diese Methode verfeinert.

Satz 8.7 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

Beweis. Offenbar gilt

$$(b-a)\min f \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le (b-a)\max f,$$

$$\min f \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \max f.$$

Also existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 8.8 *Dieses Resultat hätte auch benutzt werden können, um oben $F'(x) = f(x)$ zu beweisen.*

8.3 Integrationsregeln und Beispiele

Eine wichtige Methode zur expliziten Berechnung komplizierterer Integrale bzw. Stammfunktionen ergibt sich aus der Kettenregel (so wie oben die partielle Integration aus der Produktregel folgte).

Satz 8.9 (Substitutionsregel) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar und bijektiv*[19] *(also $c = \varphi^{-1}(a), d = \varphi^{-1}(b)$ bzw. $a = \varphi(c), b = \varphi(d)$). Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

bzw.

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Nach der Kettenregel gilt für eine Stammfunktion F von f

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

also

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t))\Big|_c^d = F(x)\Big|_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

■

[19] Die Bijektivität wird zwar meist vorausgesetzt, hat aber keine Bedeutung für die Gültigkeit der Gleichung.

Beispiel 8.10 Mit der Substitution $x = \varphi(t) = \sin t$, $\varphi'(t) = \cos t$ erhält man:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\textstyle\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \sin t\cos t + \int \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \sin t\cos t + \int (1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t,$$ [20]

$$\textstyle\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big(\sin t\cos t + t\Big),$$

also

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\sin t\cos t + t\Big)_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

□

Beispiel 8.11 Die Substitution $x^2+1=t$, also $x = \varphi(t) = \sqrt{t-1}$, $y'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}$ liefert

$$\int\limits_0^2 x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^5 \sqrt{t-1}\cos t\,\frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\limits_1^5 \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin 5 - \sin 1).$$

□

Beispiel 8.12 Die Substitution $e^x = t$, also $x = \varphi(t) = \ln t$, $\varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$ liefert

$$\int\limits_a^b \frac{e^{2x}-1}{e^x+2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{e^a}^{e^b} \frac{t^2-1}{t+2}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{e^a}^{e^b} \frac{t^2-1}{t^2+2t}\,\mathrm{d}t.$$

Wenn man rationale Funktionen integrieren kann, kann dieses Integral berechnet werden. □

11:2.7.07

8.4 Übungen

8.1 Man bestimme eine Stammfunktion von

a) $f(x) = x\sin x$,

b) $g(x) = x\exp x$.

[20]Eine zweite partielle Integration würde zu

$$\ldots = \sin t\cos t - \cos t\sin t + \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

führen, also zu einer trivialen Identität, aus der nichts folgt.

8.2 Man berechne

$$\int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x$$

a) mittels partieller Integration,

b) mittels einer Halbwinkelformel und Integration.

8.3 a) Die Geschwindigkeit, genauer die Momentangeschwindigkeit, wurde in der Vorlesung definiert. Man definiere entsprechend die Beschleunigung (Geschwindigkeitszuwachs pro Zeiteinheit).

b) Bewegt sich ein Körper mit Startgeschwindigkeit 0 und konstanter Beschleunigung b, so legt er in der Zeit t den Weg $\frac{1}{2}bt^2$ zurück.

9 Flächen–, Volumen–, Längen– und Oberflächenberechnung

9.1 Flächenberechnung in $\mathbb{R}^2$

Aus der zweiten der gewählten Einführungen des Integrals geht unmittelbar hervor, dass das Integral geeignet ist Flächen in $\mathbb{R}^2$ zu berechnen. Jedes einigermaßen vernünftige Flächenstück läßt sich

- entweder direkt als Fläche zwischen den Graphen zweier reellwertiger Funktionen auffassen
$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, f(x) \le y \le g(x)\Big\}.$$
Die Fläche ist dann
$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x,$$
oder

- sie läßt sich in endlich viele Teile dieser Art zerlegen, die dann einzeln berechnet werden (dabei kann es sich um Graphen von Funktionen $y = y(x)$ oder $x = x(y)$ handeln).

Wir wollen hier nur an einfachen Beispielen zeigen, dass sich tatsächlich der aus der Schulgeometrie bekannte Flächeninhalt ergibt. Für Polygone, die sich ja in Dreiecke zerlegen lassen, sei dies als einfache Übung empfohlen.

Beispiel 9.1 Kreis mit Radius r. Offenbar können wir uns auf den Kreis um 0 beschränken (dies bedeutet lediglich eine Vereinfachung der Rechung). Außerdem genügt es natürlich, die Fläche der oberen Hälfte des Kreises zu berechnen. Dies ist also die Fläche zwischen den Abszissen $x = -r$ und $x = r$, und zwischen der x–Achse und dem Graphen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } -r \le x \le r,$$

also

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hier bietet sich die Substitution

$$x = \varphi(t) = r \sin t, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

an, $\varphi'(t) = r\cos t, \quad \varphi^{-1}(-r) = -\pi/2, \quad \varphi^{-1}(r) = \pi/2$, also

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\cos t\,\mathrm{d}t = r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Das letzte Integral hat (Übung oder Beispiel 8.10) den Wert $\pi/2$. Damit ergibt sich für die Fläche des halben Kreises $\pi r^2/2$, also für die Kreisfläche πr^2. □

Beispiel 9.2 Die Ellipse mit den Hauptachsen a und b hat die Form $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, also

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Gegenüber dem Kreis mit Radius a ist sie in y–Richtung mit dem Faktor $\dfrac{b}{a}$ gestaucht (bzw. gestreckt). Man erwartet also die Fläche $\dfrac{b}{a}a^2\pi = ab\pi$. Tatsächlich erhält man das auch durch Integration (Substitution $x = a\sin t$)

$$\begin{aligned}2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\frac{b}{a}\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{(vgl. oben)} \\ &= 2\frac{b}{a}a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\,\mathrm{d}t = 2\frac{b}{a}\frac{\pi}{2}a^2 = ab\pi.\end{aligned}$$

□

Es sei hier nochmals an zwei im ersten Augenblick überraschende Ergebnisse erinnert, die in den Übungen behandelt wurden bzw. sehr leicht zu berechnen sind:

Beispiel 9.3 Die Fläche zwischen dem Intervall $[0, \pi]$ und dem Graphen von sin ist 2 (man würde vielleicht irgend etwas mit π erwarten):

$$\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(-1-1) = 2.$$

□

9.2 Volumenberechnung

Sei K ein Körper in $\mathbb{R}^3$, g eine Gerade in $\mathbb{R}^3$; diese wählen wir dann in der Regel als x–Achse. Für jedes x auf dieser Achse sei $f(x)$ die Fläche des Schnitts von K mit der Ebene, die in x senkrecht auf g steht; außerdem sei der Körper natürlich beschränkt, d. h. es gibt a und $b \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x < a$ und für $x > b$, und die Funktion f sei stetig oder wenigstens stückweise stetig.

Wählt man nun eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

so wird die Summe

$$S(f_j x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)(x_j - x_{j-1})$$

einerseits eine Annäherung für das Volumen des Körpers sein, andererseits ist dies eine Riemannsumme für $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ und konvergiert deshalb bei Verfeinerung gegen

$$V(K) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dieses $V(k)$ wird man als Volumen des Körpers bezeichnen. Für einfache Körper (z. B. Quader, Kegel, Kugel. . .) ergibt sich das aus der elementaren Geometrie bekannte Volumen. Besonders bemerkenswert ist, dass das Resultat nur von den Flächeninhalten $f(x)$ abhängt, nicht von der Form der Fläche. In dieser Aussage steckt das

Prinzip von Cavalieri: Sind K_1 und K_2 zwei Körper, g eine Gerade, und haben für jede Ebene E senkrecht zu g die Schnitte von E mit K_1 und K_2 den gleichen Flächeninhalt, so haben K_1 und K_2 das gleiche Volumen. (Ein einfacher Spezialfall ist ein Stapel von – u. U. unterschiedlichen – Münzen, die einmal gleichmäßig aufeinander gestapelt sind, und einmal beliebig gegeneinander verschoben sind; offensichtlich haben sie gleiches Volumen.)

Satz 9.4 *Alle Kegel (Pyramiden) K mit gleicher Gundfläche G (unabhängig von deren Gestalt) und gleicher Höhe h haben das gleiche Volumen. Dieses ist*

$$V(K) = \frac{1}{3} hG.$$

Beweis. Für $x \in [0, h]$ ist der Flächeninhalt des horizontalen Schnittes von K gleich

$$f(x) = \Big(\frac{h - x}{h}\Big)^2 G.$$

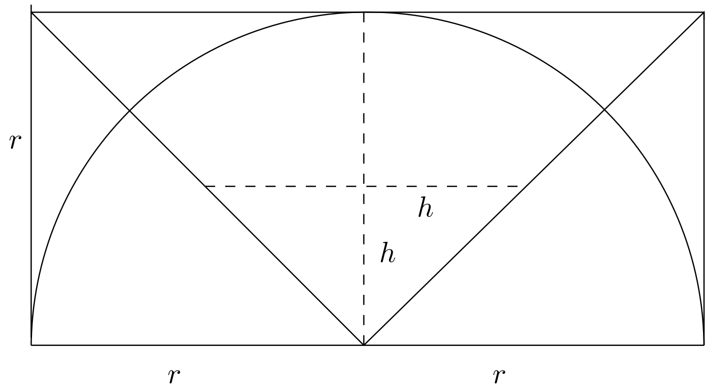


Abbildung 12: Kugel und Kegel im Zylinder

Mit obiger Formel folgt

$$V(K) = \int_0^h \left(\frac{h-x}{h}\right)^2 G\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{h^2}\frac{(h-x)^3}{3}G\Big|_0^h = \frac{1}{3}hG.$$

■

Damit ergibt sich u. a. eine elegante Methode zur Bestimmung des Volumens der Kugel, das wir auf zwei unterschiedlichen Wegen berechnen wollen:

Satz 9.5 *Das Volumen der Kugel K_r mit Radius r ist*

$$V(K_r) = 4\pi r^3.$$

Beweis. a) Wir betrachten die obere Hälfte der Kugel und fassen sie als Teil des Kreiszylinders mit Radius r und Höhe r auf. In diesem Zylinder legen wir noch einen auf den Kopf gestellten Kreiskegel mit Radius r und Höhe r.

In der Höhe h $(0 \le h \le r)$ ist der Schnitt mit der Kugel ein Kreis mit Radius

$$\varrho(h) = \sqrt{r^2 - h^2},$$

die Fläche dieses Schnitts ist also $\pi(r^2-h^2)$. Der Kegel hat in Höhe h den Radius h, d. h. die Fläche seines Schnitts ist πh^2. Das ist genau die Fläche $\pi r^2 - \pi(r^2 - h^2)$ des Schnitts mit dem Außenbereich der Kugel. Also ist nach dem Prinzip von Cavalieri das Volumen $\frac{1}{3}\pi r^3$ des Kegels gleich dem Volumen des Außenbereiches der Halbkugel. Da das Volumen des Zylinders πr^3 ist, ist also das Volumen der Halbkugel

$$\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$$

und damit das Volumen der Kugel $\frac{4}{3}\pi r^3$. (Wenn man das Volumen des Kegels als elementargeometrisch bekannt annimmt, wird hier nur das Prinzip von Cavalieri benutzt, keine explizite Integration.)

b) Für $x \in [-r, r]$ ist der Schnitt mit der Kugel ein Kreis mit Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$, also die Fläche des Schnitts

$$f(x) = \pi(r^2 - x^2).$$

Damit folgt für das Volumen

$$V(K_r) = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi\Big(r^2 x - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_{-r}^{r} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

(Überraschend ist, dass – wenn man die Kreisfläche kennt – diese Integration einfacher ist, als die zur Berechnung der Kreisfläche.) ■

Das Volumen der Kugelkappe der Höhe h (einer Kugel mit Radius r) berechnet sich entsprechend mit

$$\int_{r-h}^{r} \pi(r^2 - s^2)\,\mathrm{d}s = \pi\Big(r^2 s - \frac{s^3}{3}\Big)\Big|_{r-h}^{r} = \pi\Big[r^3 - \frac{r^3}{3} - r^2(r-h) + \Big(\frac{r-h}{3}\Big)^3\Big].$$

Als Differenz zweier Kugelkappen kann dann auch leicht das Volumen eines Kugelsegments berechnet werden.

Die Berechnung des Volumens der Kugel und der Kugelkappe ist ein Spezialfall von:

Satz 9.6 *Der Körper, der durch Rotation des Graphen der stetigen Funktion*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

um die x–Achse entsteht, ist

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Beweis als Übung!

Beispiel 9.7 Das Volumen des Körpers, der viel durch Rotation des Graphen von

$$f : [0, \pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$$

ergibt, ist:

$$\Rightarrow V = \int_0^\pi \pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$

□

Satz 9.8 *Das Ellipsoid $E_{a,b,c}$ mit den Hauptachsen a, b, c, d. h.*

$$E_{a,b,c} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\Big\}$$

hat das Volumen $\frac{4}{3}\pi abc$. (Dies kann man ähnlich berechnen wie oben (Teil b) das Volumen der Kugel. Einfacher sieht man das ein, wenn man das Ellipsoid als eine in zwei Koordinatenrichtungen gestauchte Kugel betrachtet: Übung.)

Beweis. Für $h \in [-c, c]$ ist der Schnitt von $E_{a,b,c}$ mit der Ebene $z = h$ die Ellipse

$$\begin{aligned} E_h &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 - \frac{h^2}{c^2}\Big\} \\ &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2(1 - \frac{h^2}{c^2})} + \frac{y^2}{b^2(1 - \frac{h^2}{c})} \le 1\Big\}. \end{aligned}$$

E_h hat nach Beispiel 9.2 die Fläche

$$f(h) = ab\Big(1 - \frac{h^2}{c^2}\Big)\pi.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} V(E_{a,b,c}) &= \int_{-c}^{c} ab\Big(1 - \frac{h^2}{c^2}\Big)\pi \, \mathrm{d}h = ab\pi\Big(h - \frac{h^3}{3c^2}\Big)\Big|_{-c}^{c} \\ &= \frac{4}{3}abc\pi. \end{aligned}$$

■

9.3 Kurvenlänge

Eine Kurve Γ in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist beschrieben durch eine *Parameterdarstellung*

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \ \text{ bzw. } \ \mathbb{R}^3, \quad t = \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots).$$

Das kann man sich so vorstellen, dass sich ein Körper in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bewegt und $\gamma(t)$ den Ort zur Zeit t angibt. Damit eine „vernünftige“ Kurve beschrieben wird, nimmt man üblicherweise an, dass γ stetig differenzierbar ist, oder wenigstens stückweise stetig differenzierbar[20]. Das läßt dann immerhin Kurven mit Knicken zu.

Die Ableitung $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ bzw. $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t))$ beschreibt in diesem Bild die Geschwindigkeit (Momentangeschwindigkeit) des Körpers zur Zeit t (bzw. im Punkt $\gamma(t)$). Dies ist ein Vektor, hat also

- einen Betrag oder eine Länge

  $$|\gamma'(t)| = \Big(\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2\Big)^{1/2} \ \text{ bzw. } \Big(\gamma_1'(t)^2 + \ldots + \gamma_3'(t)^2\Big)^{1/2}$$

  und

- eine Richtung in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ $\gamma'(t)/|\gamma'(t)|$ (falls $\gamma'(t) \neq 0$ ist)

Einfache Beispiele für Kurven sind:

Beispiel 9.9 Die *Kreislinie* in $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt mit Radius r:

$$\begin{aligned}
&\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = \Big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\Big),\\
&\gamma'(t) = 2\pi\Big(-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t)\Big),
\end{aligned}$$

Der Betrag der „Geschwindigkeit“ ist also konstant $= 2\pi$. Man kann aber auch eine andere Paramaterdarstellung wählen, z. B.

$$\begin{aligned}
&\tilde{\gamma} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t),\\
&\tilde{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t).
\end{aligned}$$

Der Betrag der Geschwindigkei ist jetzt konstant gleich 1. (Woher kommt dieser Unterschied?)
□

[20] Das bedeutet, dass γ stetig ist, und dass das Parameterintervall in endlich viele Teilintervalle zerlegt werden kann, so dass γ auf jedem dieser Teilintervalle stetig differenzierbar ist (mit einseitigen Ableitungen in den Randpunkten).

Beispiel 9.10 Die *Schraubenlinie* mit *Radius* r und *Ganghöhe* h:

$$\begin{aligned}&\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \Big(r\cos t, r\sin t, \frac{h}{2\pi}t\Big),\\&\gamma'(t) = \Big(-r\sin t, r\cos t, \frac{h}{2\pi}\Big).\end{aligned}$$

Auch hier ist der Betrag der Geschwindigkeit konstant gleich

$$\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}.$$

Die Ganghöhe h ist die Höhe die nach einem Umlauf erreicht wird. Die obige Parameterdarstellung beschreibt einen Umlauf. Natürlich kann man die Schraubenlinie ggf. in beide Richtungen bis ∞ fortsetzen. □

Graphen von Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschreiben ebenfalls Kurven in $\mathbb{R}^2$ (ebenso beschreiben die Graphen von Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ Kurven in $\mathbb{R}^{n+1}$; darauf gehen wir hier nicht weiter ein). Auch in diesem Fall hat man sofort eine natürliche spezielle Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned}&\gamma_f : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_f(t) = (t, f(t)),\\&\gamma_f'(t) = (1, f'(t)), \quad \text{also } |\gamma_f'(t)| = \sqrt{1 + f'(t)^2}.\end{aligned}$$

Wie kann man nun die Länge einer Kurve bestimmen?

Satz 9.11 *Sei* Γ *eine Kurve mit stückweise stetig differenzierbarer Parameterdarstellung*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m \quad (m = 2, 3).$$

Dann ist die Länge der Kurve Γ *gegeben durch*

$$L_\Gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Beweis. Dies ist auf Grund der obigen Vorstellung offensichtlich, da $|\gamma'(t)|$ (das man umgangssprachlich einfach als Geschwindigkeit, ohne Rücksicht auf ihre Richtung, bezeichnen würde) die Ableitung des bis zum Zeitpunkt t zurückgelegten Weges $u(t)$ ist. Daraus folgt nämlich[21]

$$L_\Gamma = u(b) - u(a) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

■

Daraus ergibt sich sofort:

[21] Diese Argumentation ist natürlich nur so lange stichhaltig, wie γ so gewählt ist, dass man auf Γ immer in der gleichen Richtung fortschreitet, ohne gelegentlich umzukehren. Andernfalls gilt aber auch die Formel in dieser Form nicht.

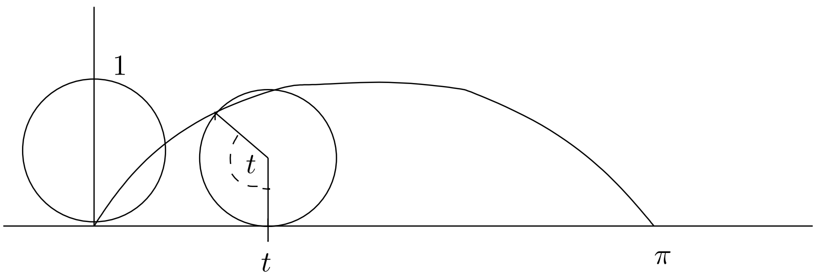


Abbildung 13: Die Zykloide

- Die Länge der *Kreislinie* mit Radius r (vgl. Beispiel 9.9) ist $2\pi r$ (=Länge des Parameterintervalls $\times$ Geschwindigkeit):

$$L_\Gamma = \int\limits_0^1 2\pi \,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

12:9.7.07

- Die Länge eines Umlaufs der Schraubenlinie ist aus dem entsprechenden Grund

$$L_\Gamma = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} \,\mathrm{d}t = 2\pi \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = \sqrt{4\pi r^2 + h^2}.$$

  Dies kann man aber auch elementargeometrisch sehen: Wenn man den Kreiszylinder, auf dem die Schraubenlinie verläuft, auf die Ebene abrollt, ist die Schraubenlinie gerade die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit Katheten h und $2\pi r$.

Will man z. B. die *Länge einer Periode der Sinuskurve* berechnen, so erhält man leicht

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t} \,\mathrm{d}t.$$

Dieses Integral ist aber schwierig auszurechnen, und wir wollen das hier gar nicht versuchen.

Ein anderes, scheinbar schwierigeres Problem ist dagegen leichter zu bewältigen:

Beispiel 9.12 Die *Zykloide* ist die Kurve, die ein Punkt des Einheitskreises in $\mathbb{R}^2$ beschreibt, wenn der Kreis auf der x–Achse abgerollt wird. Eine Periode wird beschrieben durch:

$$\begin{aligned}
&\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t),\\
\gamma'(t) &= (1 - \cos t, \sin t),\\
|\gamma'(t)|^2 &= (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + 1 = 2 - 2\cos t\\
&= 2\Big(\sin^2\frac{t}{2} + \cos^2\frac{t}{2}\Big) - 2\cos^2\frac{t}{2} + 2\sin^2\frac{t}{2}\\
&= 4\sin^2\frac{t}{2},\\
|\gamma'(t)| &= 2\sin\frac{t}{2} \qquad \Big(\text{beachte: } \sin\frac{t}{2} \geq 0 \text{ in } [0, 2\pi]\Big).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$L = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

Eine Überraschung, dass hier eine natürliche Zahl herauskommt. □

9.4 Oberflächenberechnung in $\mathbb{R}^3$

Hier sollen nur zwei einfache Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 9.13 Die Mantelfläche $O(K)$ des symmetrischen Kreiszylinders K mit Radius r und Höhe h ist

$$\pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

Dies kann man elementargeometrisch sehen, indem man sich die Mantelfläche abgerollt denkt. Das gibt einen Kreissektor mit Radius $\sqrt{r^2 + h^2}$ und dem Kreisbogen der Länge $2\pi r$. Das ist der Anteil $\dfrac{2\pi r}{2\pi\sqrt{r^2 + h^2}} = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$ von der Fläche des Kreises mit Radius $\sqrt{r^2 + h^2}$, nämlich $\pi(r^2 + h^2)$. Also

$$\pi(r^2 + h^2)\frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}.$$

Man kann dies aber auch leicht als Integral gewinnen: Auf Höhe s ist der Umfang des Mantels gleich $2\pi r\dfrac{h - s}{h}$. Die Breite eines horizontalen Streifens zwischen s und $s + \Delta s$ verhält sich zu Δs wie die Länge der Mantellinie zur Höhe des Kegels, ist also gleich $\dfrac{\sqrt{r^2 + h^2}}{h} \cdot \Delta s$. Also ist die Oberfläche des Kegelmantels näherungsweise

$$\sum_{j=1}^{n} 2\pi r\frac{h - s_j}{h}\,\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{h}(s_j - s_{j-1}) \qquad 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = h.$$

Das sind Riemann–Summen für das Integral der Funktion

$$f(s) = 2\pi r\frac{h - s}{h}\,\frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{h}$$

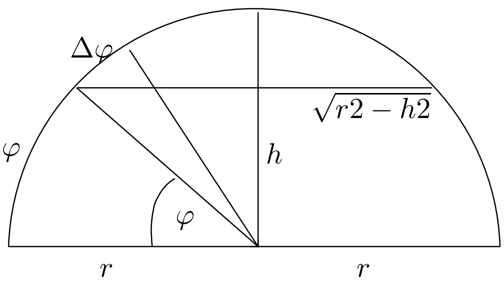


Abbildung 14: Kugeloberfläche

über das Intervall $[0, h]$. Also ist

$$\begin{aligned} O(K) &= 2\pi r \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h^2} \int\limits_0^h (h-s)\,\mathrm{d}s = -2\pi r \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h^2} \left. \frac{(h-s)^2}{2} \right|_0^h \\ &= \pi r \sqrt{r^2+h^2}. \end{aligned}$$

$\square$

Ähnlich wie bei der zweiten Methode für den Kegel kann man die Kugeloberfläche berechnen.

Beispiel 9.14 Wir betrachten die obere Hälfte der Sphäre mit Radius r in $\mathbb{R}^3$ um den Nullpunkt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \sqrt{r^2 - x_1^2 - x_2^2} \right\}.$$

Die horizontalen Schnitte der Sphäre werden vom Mittelpunkt (Nullpunkt) unter den Winkeln $\phi \in [0, 2\pi]$ gegenüber der (x_1, x_2)–Ebene gesehen.

Der Kreis, der unter dem Winkel φ gesehen wird, hat den Radius $r \cos\varphi$, also den Umfang $2r\pi \cos\varphi$.

Der Streifen zwischen dem Kreis unter dem Winkel φ und dem Kreis unter dem Winkel $\varphi + \Delta\varphi$ hat für kleine $\Delta\varphi$ die Breite $r\Delta\varphi$ (wichtig, die Winkel sind im Bogenmaß zu messen!). Also ist die Oberfläche der Halbkugel näherungsweise

$$\sum_{j=1}^{n} 2r^2\pi \cos\varphi_j (\varphi_j - \varphi_{j-1}) \qquad 0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \pi/2.$$

Das sind die Riemann–Summen für das Integral

$$\int_0^{\pi/2} 2r^2\pi \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

und strebt bei Verfeinerung gegen dieses. Die Oberfläche der Halbkugel ist also

$$\int_0^{\pi/2} 2r^2\pi\cos\phi\,\mathrm{d}\varphi = 2r^2\pi\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = 2\pi r^2.$$

Also ist die Kugeloberfläche $4\pi r^2$. □

So kann man auch die Oberfläche einer *Kugelkappe* der Höhe h einer Kugel mit Radius r (ohne die untere Kreisfläche) berechnen. Der Sinus des Winkels, unter dem vom Zentrum aus der Kreis des unteren Randes der Kugelkappe gegen die horizontale Ebene durch den Nullpunkt gesehen wird ist offenbar $\frac{r-h}{r}$. Also ist die Oberfläche der Kugelkappe

$$\int\limits_{\sin^{-1}\left(\frac{r-h}{r}\right)}^{\pi/2} 2r^2\pi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2r^2\pi\sin\varphi\Big|_{\sin^{-1}\left(\frac{r-h}{r}\right)}^{\pi/2} = 2r^2\pi\Big(1-\frac{r-h}{r}\Big).$$

Damit kann auch die Oberfläche eines *Kugelsegements* ohne die beiden Kreise als Differenz zweier Kugelkappen berechnet werden.

Bemerkung 9.15 *Tatsächlich hätten wir uns entweder die Berechnung der Kugeloberfläche, oder die Berechnung des Kugelvolumens sparen können: Stellen wir uns die Kugel zusammengesetzt aus vielen kleinen Kegeln vor, deren Grundfläche auf der Sphäre stehen, mit Spitze im Zentrum, so folgt*

$$\textit{Volumen } = \frac{1}{3}\cdot r\cdot \textit{ Oberfläche.}$$

Das entspricht unseren obigen Ergebnissen.

Aus der Oberfläche einer Kugelkappe läßt sich so auch das Volumen des entsprechenden Segments berechnen, und wenn man den entsprechenden Kegel abzieht auch das Volumen der Kugelkappe.

9.5 Übungen

9.1 Die Fläche zwischen den Graphen von f und g im Intervall $[a,b]$ berechnet man als

$$\int\limits_b^a (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x.$$

Man zeige, dass dies für Polygone den elementargeometrischen Flächeninhalt liefert.

9.2 Man bestimme das Volumen des Körpers, der durch Rotation des Graphen der Funktion $f(x) = 2 - x^2$ über dem Intervall $[-1, 1]$ um die x–Achse entsteht.

9.3 Wie groß ist 1/4 der Mondperiode nach Neumond der von der Erde aus sichtbare Teil der beleuchteten Mondoberfläche

a) als Anteil der von der Erde aus sichtbaren Hälfte, gemessen auf dem Mond?

b) als Anteil der von der Erde aus scheinbar sichtbaren Kreisscheibe?

9.4 a) Man bestimme eine Stammfunktion von $\cosh^2$ (vgl. Aufgabe 33).

b) Man berechne $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

c) Man bestimme die Länge des Graphen von $f(x) = x^2$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$.

9.5 Ein Rohr mit Radius r (die Wandstärke kann mit 0 angenommen werden) wird senkrecht und zentriert mit Radius r angebort.

a) Wie sieht das Loch in dem Rohr aus, wenn man die Mantelfläche in der Ebene ausbreitet. Am besten beschreibt man dies als Fläche zwischen zwei Graphen.

b) Wie groß ist die Fläche des weggebohrten Materials?