Kurzskript zur Vorlesung „Lineare Operatoren in Hilberträumen“ Wintersemester 2003/2004

Joachim Weidmann

Stand: 18. Februar 2004

Inhaltsverzeichnis

Dieses Kurzskirpt stellt die Definitionen, Sätze, Beispiel und Motivationen der Vorlesung dar. Alle nicht wiedergegebenen Beweise sind im Buch J. Weidmann „Lineare Operatoren in Hilberträumen, Teil 1: Grundlagen“ zu finden.

1 Hilberträume

Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine Abbildung $X \times X \to \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ heißt ein *Skalarprodukt*, wenn gilt:

$(S1)$ $\langle x, x\rangle \geq 0, \quad \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
$(S2)$ $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
$(S3)$ $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
$(S4)$ $\langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle$.

Offensichtlich gilt:

$(S2) + (S3) \Rightarrow \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
$(S2) + (S4) \Rightarrow \langle ax, y\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt ein *Semiskalarprodukt*, wenn statt $(S1)$ nur gilt:

$(S1')$ $\langle x, x\rangle \geq 0$.

Der Begriff des Skalarprodukts (Semiskalarprodukts) ordnet sich ein in den allgemeineren Begriff der Sesquilinearform. Eine Abbildung $s : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt eine *Sesquilinearform*, wenn gilt

$$\begin{aligned} s(x, y + z) &= s(x, y) + s(x, z), \\ s(x + y, z) &= s(x, z) + s(y, z), \\ s(ax, y) &= \overline{a}s(x, y), \\ s(x, ay) &= as(x, y) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} s(x, ay + bz) &= as(x, y) + bs(x, z), \\ s(ax + by, z) &= \overline{a}s(x, z) + \overline{b}s(y, z). \end{aligned}$$

Eine Sesquilinearform s heißt
hermitesch, wenn gilt $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$ (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hat der Querstrich keine Bedeutung und man nennt s dann *symmetrisch*),
nichtnegativ (positiv semidefiniert), wenn sie hermitesch ist mit $s(x, x) \geq 0$

für alle $x \in X$,
positiv, wenn sie hermitesch ist mit $s(x,x) > 0$ für alle $x \neq 0$.

Ein Skalarprodukt (Semiskalarprodukt) ist also nichts anderes als eine positive (nichtnegative) Sesquilinearform.

Die zu einer Sesquilinearform s gehörige *quadratische Form* $q = q_s$ ist definiert durch $q_s(x) = s(x,x)$; Offensichtlich gilt $q_s(ax) = |a|^2 q_s(x)$. Ist s hermitesch, so ist offensichtlich q_s reellwertig.

Satz 1.1 (*Parallelogrammidentität*) *Ist s eine Sesquilinearform auf X und q die durch s erzeugte quadratische Form, so gilt*

$$q(x+y) + q(x-y) = 2(q(x) + q(y)) \quad \textit{Parallelogrammidentität.}$$

Satz 1.2 (*Polarisierungsidentität*) *Sei s eine Sesquilinearform auf X, q die zugehörige quadratische Form.*

a) *Ist X komplex, so gilt*

$$s(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy)\Big\}.$$

b) *Ist X reell, so ist s genau dann symmetrisch, wenn gilt*

$$s(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{q(x+y) - q(x-y)\Big\}.$$

Satz 1.3 *Sei X ein komplexer Vektorraum, s eine Sesquilinearform auf X, q die dazugehörige quadratische Form. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *s ist hermitesch,*

(ii) *q ist reell,*

(iii) $\mathrm{Re}\, s(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{q(x+y) - q(x-y)\Big\}$ *und*
$\mathrm{Im}\, s(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{q(x-iy) - q(x+iy)\Big\}$.

Satz 1.4 (*Schwarzsche Ungleichung*) *Sei s eine nichtnegative Sesquilinearform auf X, q die zugehörige quadratische Form.*

a) $|s(x,y)| \leq (q(x)q(y))^{1/2}$ Schwarzsche Ungleichung.

b) *Ist s positiv, so gilt in der Schwarzschen Ungleichung genau dann das Gleichheitszeichen, wenn x und y linear abhängig sind.*

c) *Ist s positiv, so gilt die Gleichung $s(x,y) = (q(x)q(y))^{1/2}$ (ohne Betragsstriche) genau dann, wenn x und y* positiv linear abhängig *sind (d. h. es gilt $x = ay$ oder $y = ax$ mit $a \geq 0$).*

Eine Abbildung $X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ heißt eine *Norm*, wenn gilt

$(N1)$ $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
$(N2)$ $\|ax\| = |a|\,\|x\|$,
$(N3)$ $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *Dreiecksungleichung.*

$\|\cdot\|$ heißt eine *Halbnorm* (meist mit $p(\cdot)$ bezeichnet), wenn statt $(N1)$ nur gilt
$(N1')$ $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in X$.

Satz 1.5 *Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt (Semiskalarprodukt), so ist $\|x\| := \langle x,x\rangle^{1/2}$ eine Norm (Halbnorm) und es gilt die Schwarzsche Ungleichung*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Satz 1.6 (*Satz von Jordan und v. Neumann*) *Eine Norm $\|\cdot\|$ wird genau dann von einem Skalarprodukt im Sinne des vorhergehenden Satzes erzeugt, wenn sie die* Parallelogrammidentität *erfüllt:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Das entsprechende Skalarprodukt ist durch die Polarisierungsidentität *gegeben:*

$$\langle x,y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2, & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \\ \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2, & \textit{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}. \end{cases}$$

Einige Beispiele für Vektorräume mit Skalarprodukt sind:

Beispiel 1.7 Der Raum $C[a,b]$ der stetigen Funktion auf $[a,b]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

Beispiel 1.8 Der Raum l^2 der quadratsummierbaren Folgen in $\mathbb{K}$ (*Hilbertscher Folgenraum*) mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \sum \overline{f_n}g_n \quad \text{für } f=(f_n), g=(g_n).$$

□

Beispiel 1.9 Für eine Lebesgue–meßbare Teilmenge Ω von $\mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \Big\{ f:\Omega\to\mathbb{C} \text{ Lebesgue–meßbar, } |f|^2 \text{ Lebesgue–integrierbar } \Big\}$$

mit

$$\langle f,g\rangle := \int_\Omega \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dies ist zunächst nur ein Semiskalarprodukt. Ein Skalarprodukt erhält man, indem man zum Raum $L^2(\Omega)$ von Äquivalenzklassen von Funktionen, die f. ü. übereinstimmen, übergeht. □

Beispiel 1.10 Der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b \Big\{\overline{f(x)}g(x) + \overline{f'(x)}g'x\Big\}\,\mathrm{d}x.$$

□

Beispiel 1.11 Der Raum $\mathbb{A}^2$ der auf dem offenen Einheitskreis C_1 in $\mathbb{C}$ holomorphen und dort quadratintegrierbaren Funktionen mit

$$\langle f,g\rangle := \int_{C_1} \overline{f(x+iy)}g(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

□

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge (x_n) (d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für $n, m \geq N$) konvergent ist (d.h. $\exists x \in X$ mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$, d.h. $d(x_n, x) \to 0$ für $n \to \infty$).

Jeder normierte Raum (insbesondere also auch jeder Vektorraum mit Skalarprodukt, Prähilbertraum) kann mit $d(x, y) := \|x - y\|$ als metrischer Raum aufgefaßt werden. Ein vollständiger normierter Raum heißt ein *Banachraum*, ein vollständiger Vektorraum mit Skalarprodukt heißt ein *Hilbertraum*.

Die obigen Beispiele $l^2, L^2(\Omega)$ und $\mathbb{A}^2$ sind Hilberträume. Die Räume $C[a, b]$ und $C^1[a, b]$ mit den angegebenen Skalarprodukten sind nicht vollständig.

Zur Vollständigkeit von L^2 sei hier noch angemerkt: Jede L^2–Cauchyfolge enthält eine fast überall konvergente Teilfolge (sie konvergiert gegen einen Repräsentanten des L^2–Grenzwertes der Cauchyfolge).

Abschließend sei noch an einige im folgenden wichtige topologische Begriffe erinnert:

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (insbesondere also auch eines normierten Raumes oder eines Raumes mit Skalarprodukt) ist *offen*, wenn mit jedem $x \in A$ eine ganze Kugel $K(x, \varrho) := \{y \in X : d(x, y) < \varrho\}$ mit $\varrho > 0$ in A liegt.

Eine Teilmenge A heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Eine Teilmenge A ist genau dann abgeschlossen, wenn der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A ebenfalls in A liegt.

Die *abgeschlossene Hülle* einer Menge A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält; dies ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die A enthalten, oder die Menge aller Grenzwerte von Folgen aus A.

Das *Innere* einer Menge A oder der *offene Kern* von A ist die größte offene Teilmenge von A; dies ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A.

Eine Teilmenge A heißt *dicht* in B (speziell in X), wenn $B \subset \overline{A}$ (speziell $X = \overline{A}$) gilt, d.h. wenn jedes $x \in B$ Grenzwert einer Folge aus A ist.

A heißt *total* in X, wenn die lineare Hülle $L(A)$ in X dicht ist, $\overline{L(A)} = X$.

X heißt *separabel*, wenn eine abzählbare dichte Teilmenge von X existiert; dies gilt (im Vektorraum) genau dann, wenn eine abzählbare totale Teilmenge existiert.

Jede Teilmenge einer separablen Menge ist separabel.

$L^2(\mathbb{R}^m)$ und auch $L^2(\Omega)$ für jede Lebesgue–meßbare Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^m$ sind separabel.

Ohne immer darauf hinzuweisen, benutzen wir im folgenden häufig den

Satz 1.12 *Sei X ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\|\cdot\|$ die dadurch erzeugte Norm. Dann ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stetig in beiden Variablen (gleichzeitig). Insbesondere gilt*

$$x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle.$$

2 Orthogonalität

Vektorräume mit Skalarprodukt zeichnen sich unter den normierten Räumen dadurch aus, daß von *Orthogonalität* geredet werden kann. Wir definieren für Elemente $x, y \in X$ und Teilmengen A, B von X:

x *orthogonal* y, $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$,
x *orthogonal* A, $x \perp A \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in A$,
A *orthogonal* B, $A \perp B \Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$ für alle $x \in A$, $y \in B$,
der *Orthogonalraum* zu A ist $A^\perp := \{x \in X : x \perp A\}$.

Satz 2.1 *$A^\perp$ ist ein abgeschlossener Teilraum (=Untervektorraum von X).*

Offensichtlich gilt: $\{0\}^\perp = X$, $X^\perp = \{0\}$, $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$, $A^\perp = \overline{A}^\perp$, $A^\perp = L(A)^\perp = \overline{L(A)}^\perp$.

Satz 2.2 (Approximationssatz) *Sei A eine abgeschlossene konvexe Teilmenge des Hilbertraumes X (z. B. ein abgeschlossener Teilraum). Dann gibt es zu jedem $x \in X$ eine eindeutig bestimmte* beste Approximation *in A, d. h. es existiert genau ein $y \in A$ mit*

$$\|x - y\| = d(x, A) := \inf\Big\{\|x - z\| : z \in A\Big\}.$$

Satz 2.3 (Projektionssatz) *Sei X ein Hilbertraum, M ein abgeschlossener Teilraum.*

a) *Jedes $x \in X$ läßt sich eindeutig in der Form $x = y + z$ darstellen mit $y \in M$ und $z \in M^{\perp}$. Dieses y heißt die* orthogonale Projektion von x auf M.

b) $M^{\perp\perp} = M$.

Korollar 2.4 a) *$A^{\perp\perp} = \overline{L(A)}$, der kleinste abgeschlossene Teilraum, der A enthält.*

b) *$A^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \overline{L(A)} = X$ (d. h. wenn A total ist).*

Sind M_1, M_2 Teilräume von X mit $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, so ist $M_1 + M_2$ eine *direkte Summe* (die Darstellung $x = x_1 + x_2$ der Elemente aus $M_1 + M_2$ mit $x_j \in M_j$ ist eindeutig); wir schreiben deshalb $M_1 \dot{+} M_2$.

Ist $M_1 \perp M - 2$, so ist $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ und wir schreiben für die direkte Summe $M_1 \oplus M_2$, *orthogonale Summe*. Ist $M = M_{\oplus} M_2$, so schreiben wir auch $M_2 = M \ominus M_2$; M_2 ist das *orthogonale Komplement* von M_1 bezüglich M_2.

Ist Y ein abgeschlossener Teilraum, so gilt nach dem Projektionssatz 2.3

$$X = Y \oplus Y^{\perp}, \quad Y^{\perp} = X \ominus Y, \quad Y = X \ominus Y^{\perp}.$$

Satz 2.5 *Sei X ein Hilbertraum, M, M_1 und M_2 Teilräume von X.*

a) *Ist $M_1 \perp M_2$, so ist $M_1 \oplus M_2$ genau dann abgeschlossen, wenn M_1 und M_2 abgeschlossen sind.*

b) *Ist $M_1 \subset M$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Teilraum M_2 mit $M_1 \oplus M_2 = M$ (dies ist das orthogonale Komplement von M_1 bezüglich M).*

Beispiel 2.6 a) Für $a < c < b$ gilt $L^2(a,b) = L^2(a,c) \oplus L^2(c,b)$ (wobei z. B. $L^2(a,c)$ als der Teilraum der Elemente von $L^2(a,b)$ aufgefaßt werden kann, die in (c,b) f. ü. verschwinden).

b) Für $a > 0$ ist $L^2(-a,a) = L^2_g(-a,a) \oplus L^2_u(-a,a)$, wobei $L^2_g(-a,a)$ der Teilraum der *geraden Funktionen* ist $(f(x) = f(-x))$, $L^2_u(-a,a)$ der

Teilraum der *ungeraden Funktionen* ($f(x) = -f(-x)$). Jedes f kann entsprechend zerlegt werden:

$$f = f_g + g_u \text{ mit } f_g(x) := \frac{1}{2}\Big(f(x)+f(-x)\Big), f_u(x) := \frac{1}{2}\Big(f(x)-f(-x)\Big).$$

□

Eine Familie $\{M = e_\alpha : \alpha \in A\}$ in einem Prähilbertraum heißt ein *Orthonormalsystem* (ONS), wenn gilt $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha,\beta}$. Ein totales ONS heißt eine *Orthonormalbasis* (ONB) (beachte: eine ONB ist i. allg. keine Basis im algebraischen Sinn).

Satz 2.7 a) *Jedes ONS ist linear unabhängig.*

b) *Jede ONB ist ein maximales ONS.*

c) *Im Hilbertraum ist jedes maximale ONS eine ONB.*

Beispiel 2.8 a) In $\mathbb{K}^m$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^m \overline{x_j} y_j$; ist

$$e_j := (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \quad (1 \text{ an der } j\text{-ten Stelle}) \text{ für } j = 1, \ldots, n$$

eine ONB.

b) Entsprechend in l^2.

c) In $L^2(0,1)$ bildet $e_n(x) := \exp(2i\pi nx)$ $(n \in \mathbb{Z})$ offensichtlich ein ONS. Mit dem Satz von Stone–Weierstraß folgt, daß dieses total ist im Teilraum der stetigen Funktionen. Da dieser in $L^2(0,1)$ direkt ist, ist es also eine ONB.

□

Satz 2.9 *Sei X ein Prähilbertraum, $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein ONS in X, (α_n) eine Folge paarweise verschiedener Elemente von A.*

a) *Es gilt $(c_n) \in l^2$ genau dann, wenn $(\sum_{n=1}^m c_n e_{\alpha_n})_m$ eine Cauchyfolge ist. Ist X ein Hilbertraum, so gilt dies also genau dann, wenn $(\sum_{n=1}^m c_n e_{\alpha_n})_m$ konvergent ist.*

b) *Ist* $y := \sum c_n e_{\alpha_n}$, *so gilt* $c_n = \langle e_{\alpha_n}, y\rangle$, $\|y\|^2 = \sum |c_n|^2$ *und* $\langle y, x\rangle = \sum \langle y_n, e_{\alpha_n}\rangle\langle e_{\alpha_n}, x\rangle$ *für alle* $x \in X$.

Satz 2.10 (Entwicklungssatz) a) *Sei* $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ *ein ONS im Prähilbertraum* X. *Dann gilt*

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in X \text{ (Besselsche Ungleichung);}$$

höchstens abzählbar viele Summanden sind $\neq 0$.

b) *Ist* $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ *ein ONS im Prähilbertraum* X, *so ist dies genau dann eine ONB, wenn gilt*

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle e_\alpha, x\rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in X \text{ (Parsevalsche Gleichung);}$$

Es gilt $x = \sum_{\alpha\in A}\langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha$ *(man beachte, daß höchstens abzählbar viele Terme* $\neq 0$ *sind).*

c) *Ist* $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ *ein ONS im Hilbertraum* X, *so ist* $\sum_{\alpha\in A}\langle e_\alpha, x\rangle e_\alpha$ *die orthogonale Projektion von* x *auf* $\overline{L\{e_\alpha : \alpha \in A\}}$.

Gibt es immer Orthonormalbasen? Wie kann man sie ggf. finden?

Satz 2.11 (Orthonormalisierung nach Gram–Schmidt) *Sei* X *ein Prähilbertraum,* $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *bzw.* $F = \{x_n : n \in \{1, \ldots, m\}\}$ *in* X. *Dann existiert ein ONS* $M = \{e_n\}$ *mit* $L(F) = L(M)$. *Ist* F *linear unabhängig, so kann* M *so gewählt werden, daß*

$$L\{x_1, \ldots, x_n\} = L\{e_1, \ldots, e_n\} \quad \textit{für jedes } n$$

gilt. In diesem Fall ist c_n *in der Form*

$$e_n = \sum_{j=1}^{n} e_{n,j} x_j$$

darstellbar. Durch die zusätzliche Forderung $c_{n,n} > 0$ *werden die* e_n *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Im linear unabhängigen Fall gilt:

$$e_1 := \frac{1}{\|x_1\|}x_1, \; e_{n+1} := \frac{1}{\|x_{n+1} - P_n x_{n+1}\|}(x_{n+1} - P_n x_{n+1}),$$

wobei $P_n x_{n+1}$ die orthogonale Projektion von x_{n+1} auf $L\{x_1, \dots, x_n\}$ ist. ■

Satz 2.12 (Existenz von Orthonormalbasen) a) *Jeder separable Prähilbertraum besitzt eine endliche oder abzählbar unendliche ONB.*

b) *Jeder Hilbertraum besitzt eine ONB.*

Korollar 2.13 a) *Jedes endliche ONS in einem Prähilbertraum kann zu einer ONB ergänzt werden.*

b) *Im Hilbertraum kann jedes ONS zu einer ONB ergänzt werden.*

Satz 2.14 *Alle ONBen in einem (Prä–)Hilbertraum haben die gleiche Mächtigkeit; diese wird als die* Hilbertraumdimension *von X bezeichnet.*

3 Beschränkte Operatoren und ihre Adjungierten

Seien X, Y (Prä–)Hilberträume (zunächst dürfen es auch normierte Räume oder Banachräume sein, insbesondere auch $\mathbb{K}$).

Ein *linearer Operator* A von X nach Y ist eine lineare Abbildung von einem Teilraum $D(A)$ (evtl. $D(A) = X$) in den Raum Y, $A : D(A) \to Y$; $D(A)$ wird als *Definitionsbereich* von A bezeichnet.

Der *Wertebereich* von A ist $R(A) := \{x : x \in D(A)\}$; offenbar ist $R(A)$ ebenfalls ein Teilraum von Y.

A heißt beschränkt, wenn

$$\begin{aligned}
\|A\| &:= \sup\{\|Ax\| : x \in D(A), \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|Ax\| : x \in D(A), \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{\|Ax\| : x \in D(A), \|x\| < 1\} \\
&= \inf\{C \geq 0 : \|Ax\| \leq C\|x\| \;\text{ für alle } x \in D(A)\}
\end{aligned}$$

endlich ist.

Satz 3.1 a) *Es gilt: A beschränkt $\Leftrightarrow$ A stetig $\Leftrightarrow$ A stetig in 0.*

b) *Ist Y ein Prähilbertraum, so gilt*

$$\|A\| = \sup\Big\{|\langle Ax, y\rangle| : x \in D(A), y \in Y, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\Big\}.$$

c) *Auf dem Vektorraum der beschränkten Operatoren von (einem festen Definitionsbereich) $D \subset X$, z. B. $D = X$, nach Y ist $\|\cdot\|$ eine Norm, die* Operatornorm.

d) *Wenn die beschränkten Operatoren A, B „zusammenpassen“ gilt $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.*

Mit $B(X,Y)$ bezeichnen wir den Vektorraum der beschränkten Operatoren von X nach Y mit $D(A) = X$. Speziell ist $B(X) := B(X,X)$ und der topologische Dualraum $X' = B(X,\mathbb{K})$.

Satz 3.2 *Ist X ein normierter Raum und Y ein Banachraum, so ist $(B(X,Y), \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Speziell: Ist X ein Banachraum, so ist $X' = B(X,\mathbb{K})$ ein Banachraum.*

Beispiel 3.3 a) In $L^2(\Omega)$ ist der durch eine wesentlich beschränkt meßbare Funktion $t : \Omega \to \mathbb{C}$ definierte maximale Multiplikationsoperator M_t

$$D(M_t) = \{f \in L^2(\Omega) : tf \in L^2(\Omega)\}, \quad M_t f = tf$$

beschränkt, $M_t \in B(L^2(\Omega))$, $\|M_t\| = \text{wes–sup}\,|t|$.

b) Ist $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$, so ist

$$Kf(x) = \int_\Omega k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y$$

für alle $f \in L^2(\Omega)$ für f. a. $x \in \Omega$ definiert und $Kf \in L^2(\Omega)$ mit $\|Kf\| \leq \|k\|\,\|f\|$, d. h. $K \in B(L^2(\Omega))$ mit $\|K\| \leq \|k\|$.

□

Sei X ein Hilbertraum. Jedes $y \in X$ erzeugt durch

$$F_y(x) := \langle y, x \rangle$$

ein stetiges lineares Funktional mit $\|F_y\| = \|y\|$. Tatsächlich gilt:

Satz 3.4 (Rieszscher Darstellungssatz) *Zu jedem stetigen linearen Funktional F auf einem Hilbertraum X existiert genau ein $y \in X$ mit*

$$F(X) = \langle y, x \rangle \quad \textit{für alle } x \in X.$$

die Zuordnung $F \mapsto y$ ist konjugiert linear, isometrisch und bijektiv.

Bemerkung 3.5 *Ohne den Satz von Hahn Banach sieht man im Hilbertraum leicht, daß sich jedes stetige lineare Funktional auf einem Teilraum M eindeutig unter Normerhaltung auf den ganzen Raum fortsetzen läßt. Durch stetige Fortsetzung setzt man zunächst auf $\overline{M}$ fort. Dieses Funktional kann mit einem $y \in \overline{M}$ erzeugt werden. Gleichzeitig liefert dieses y die eindeutige Fortsetzung (mit gleicher Norm) auf ganz X.*

Satz 3.6 (Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit) *Sei $\mathcal{T}$ eine Familie beschränkter linearer Operatoren von einem Banachraum X in einen normierten Raum Y. $\mathcal{T}$ ist genau dann punktweise beschränkt (d. h. $(\{\|Tx\| : T \in \mathcal{T}\})$ ist beschränkt für jedes $x \in X$), wenn $\mathcal{T}$ beschränkt ist (d. h. $(\|T\| : T \in \mathcal{T})$ ist beschränkt).*

Seien X, Y normierte Räume, $T_n, T \in B(X,Y)$. T_n *konvergiert stark* gegen T, $T_n \xrightarrow{s} T$, wenn $T_n x \to Tx$ für jedes $x \in X$ gilt. (T_n) ist eine *starke Cauchyfolge*, wenn $(T_n x)$ für jedes $x \in X$ eine Cauchyfolge in Y ist.

Satz 3.7
a) *Seien X, Y normierte Räume, $T_n, T \in B(X,Y)$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$. Dann gilt $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.*

b) *Sind X, Z normierte Räume und Y ein Banachraum, $T_n, T \in B(X,Y)$, $S_n, S \in B(Y,Z)$ mit $S_n \xrightarrow{s} S$, $T_n \xrightarrow{s} T$, so gilt $S_n T_n \xrightarrow{s} ST$.*

c) *Sind X, Y Banachräume und $T_n \in B(X,Y)$, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert ein* $T \in B(X,Y)$ *mit* $T_n \xrightarrow{s} T$,

(ii) (T_n) *ist starke Cauchyfolge,*

(iii) *Es existiert ein* C *mit* $\|T_n\| \leq C$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und eine dichte Teilmenge* M *von* X *so, daß* $(T_n x)$ *für jedes* $x \in M$ *eine Cauchyfolge ist.*

Sei X ein Hilbertraum, (x_n) aus X, $x \in X$. (x_n) *konvergiert schwach* gegen x, $x_n \xrightarrow{w} x$, wenn $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ für alle $y \in X$ gilt. (x_n) ist *schwache Cauchyfolge*, wenn $(\langle x_n, y\rangle)$ für jedes $y \in X$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{K}$ ist.

Der folgende Satz ergibt sich aus dem vorhergehenden, wenn man beachtet, daß $x_n \to x$ gleichbedeutend ist mit der starken Konvergenz $F_{x_n} \xrightarrow{s} F_x$.

Satz 3.8 *Sei* X *ein Hilbertraum,* (x_n) *eine Folge aus* X

(i) *Aus* $x_n \xrightarrow{w} x$ *folgt* $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$,

(ii) *ist* (x_n) *schwache Cauchyfolge, so existiert ein* $x \in X$ *mit* $x_n \xrightarrow{w} x$,

(iii) *ist* (x_n) *beschränkt und* $(\langle x_n, y\rangle)$ *Cauchyfolge für alle* y *aus einer dichten Teilmenge von* X, *so ist* (x_n) *schwach konvergent.*

Satz 3.9 *Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum enthält eine schwach konvergente Teilfolge. Die abgeschlossene Einheitskugel im Hilbertraum ist* schwach kompakt.

Satz 3.10 *Sind* X *und* Y *Hilberträume und* T *ein Operator von* X *nach* Y *mit* $D(T) = X$, *so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $T \in B(X,Y)$ *(d. h.* $x_n \to x \Rightarrow T_{x_n} \to T_x$*)*,

(ii) $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow T_{x_n} \xrightarrow{w} Tx$,

(iii) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \xrightarrow{w} T_x$.

Seien X, Y Hilberträume, $T_n, T \in B(X,Y)$. (T_n) heißt *schwach konvergent* gegen T, wenn für jedes $x \in X$ gilt $T_n x \xrightarrow{w} Tx$, d. h. $\langle T_n x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$. (T_n) ist eine *schwache Cauchyfolge*, wenn $(T_n x)$ für jedes $x \in X$ eine schwache Cauchyfolge in Y ist.

Satz 3.11 $\|T_n - T\| \to 0 \Rightarrow T_n \xrightarrow{s} T \Rightarrow T_n \xrightarrow{w} T$. *(Einfache Beispiele zeigen, daß in keinem Fall die Umkehrung gilt.)*

Satz 3.12 *Seien X, Y Hilberträume.*

a) *Aus $T_n, T \in B(X,Y)$ und $T_n \xrightarrow{w} T$ folgt $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.*

b) *Ist (T_n) aus $B(X,Y)$ beschränkt und $(\langle T_n x, y\rangle)$ Cauchyfolge für alle $x \in M_2$ und $y \in M_2$, wobei M_1 und M_2 dichte Teilmengen von X bzw. Y sind, so ist (T_n) eine schwache Cauchyfolge.*

c) *Jede schwache Cauchyfolge (T_n) aus $B(X,Y)$ ist beschränkt und es gibt ein $T \in B(X,Y)$ mit $T_n \xrightarrow{w} T$; $B(X,Y)$ ist* schwach vollständig.

Seien X, Y Hilberträume, $T \in B(X,Y)$. Für alle $y \in Y$ ist also $x \mapsto \langle y, Tx\rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf X (Norm $\leq \|y\|\,\|T\|$). Nach dem Rieszschen Darstellungssatz gibt es also ein eindeutig bestimmtes $y^* \in X$ mit $\langle y, Tx\rangle = \langle y^*, x\rangle$; die Zuordnung $y \mapsto y^*$ ist linear und es gilt $\|y^*\| \leq \|y\|\,\|T\|$. Also existiert ein eindeutig bestimmter linearer Operator $T^* : Y \to X$ mit $\langle y, Tx\rangle = \langle T^* y, x\rangle$, der zu T *adjungierte Operator.*

Satz 3.13 *Seien X, Y Hilberträume, $T \in B(X,Y)$.*

a) $\|T\| = \sup\Big\{|\langle Tx, y\Big\rangle| : x \in X, y \in Y, \|x\| = \|y\| = 1\}$.

b) $\|T^*\| = \|T\|$.

Ein Operator $T \in B(X)$ heißt *symmetrisch, hermitesch, selbstadjungiert,* wenn $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$ für alle $x, y \in X$ gilt, d. h. $T = T^*$.

Satz 3.14 *Für einen selbstadjungierten Operator $T \in B(X)$ gilt*

$$\|T\| = \sup\Big\{|\langle x, Tx\rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1\Big\}.$$

Satz 3.15 *Für S, $T \in B(X)$ gilt*

a) $T^{**} = T$.

b) $(ST)^* = T^*S^*$.

c) $N(T^*) = R(T)^\perp$.

Satz 3.16 (Monotonieprinzip) *Sei X ein Hilbertraum, (T_n) eine beschränkte monotone Folge symmetrischer Operatoren aus $B(X)$ (d. h. $\|T_n\| \leq C$ und $\langle x, T_n x\rangle \substack{\leq \\ \geq} \langle x, T_{n+1}x\rangle$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X$). Dann existiert ein symmetrischer Operator $T \in B(X)$ mit $T_n \xrightarrow{s} T$.*

4 Orthogonale Projektionen, isometrische und unitäre Operatoren

Ist X ein Hilbertraum und Y ein abgeschlossener Teilraum, so wissen wir: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine eindeutig bestimmte Darstellung $x = y + z$ mit $y \in Y$ und $z \in Y^\perp$. Die Abbildung $P = P_Y : x \mapsto y$ nennen wir die *orthogonale Projektion* von X auf Y; P_Y ist ein linearer Operator mit $D(P_Y) = X$ und $R(P_Y) = Y$. Wegen $\|P_Y x\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$ gilt

$$\|P_Y\| \leq 1, \quad P_Y \in B(X).$$

Ist $Y = \{0\}$, so ist $P_Y = 0$; ist $Y \neq \{0\}$, so ist $\|P_Y\| = 1$ (denn für jedes $y \in Y$ gilt $P_Y y = y$).

Ein Operator T heißt *idempotent*, wenn $T^2 = T$ (also auch $T^n = T$ für alle $n \in \mathbb{N}$) gilt.

Satz 4.1 *Sei X ein Hilbertraum, $T \in B(X)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *P ist orthogonale Projektion (auf $R(P)$),*

(ii) *$I - P$ ist orthogonale Projektion (auf $R(P)^\perp$),*

(iii) *P ist idempotent mit $R(P) = N(P)^\perp$,*

(iv) *P ist idempotent und selbstadjungiert.*

Anmerkung: Ein (nichtnotwendig selbstadjungierter) idempotenter Operator P heißt Projektion längs $N(P)$.

Satz 4.2 *Seien Y, Z abgeschlossene Teilräume des Hilbertraumes X, P_Y und P_Z die orthogonalen Projektionen auf Y bzw. Z.*

a) *$P := P_Y P_Z$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $P_Y P_Z = P_Z P_Y$ gilt. Dann ist $P = P_{Y \cap Z}$. Es gilt $Y \perp Z \Leftrightarrow P_Y P_Z = 0 \Leftrightarrow P_Z P_Y = 0$.*

b) *$Q : P_Y + P_Z$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $Y \perp Z$ gilt. Dann ist $Q = P_{Y \oplus Z}$.*

c) *$R := P_Y - P_Z$ ist genau dann orthogonale Projektion, wenn $Z \subset Y$ gilt. Dann ist $R = P_{Y \ominus Z}$.*

Satz 4.3 *Seien Y, Z abgeschlossene Teilräume des Hilbertraumes X.*

a) $0 \leq P_Y \leq I$ *(wobei $A \leq B \Leftrightarrow \langle x, Ax \rangle \leq \langle x, Bx \rangle$ für alle x).*

b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

$$\text{(i)}\, P_Y \leq P_Z, \ \text{(ii)}\, Y \subset Z, \ \text{(iii)}\, P_Z P_Y = P_Y, \ \text{(iv)}\, P_Y P_Z = P_Y.$$

Als Spezialfall des Monotonieprinzips kann man jetzt beweisen:

Satz 4.4 *Ist (P_n) eine monotone Folge von orthogonalen Projektionen ($P_n \leq P_{n+1}$ oder $P_n \geq P_{n+1}$ für alle n), so existiert eine orthogonale Projektion P mit $P_n \xrightarrow{s} P$. Es gilt*

α) falls (P_n) nicht fallend ist: $R(P) = \overline{\bigcup_n R(P_n)}$,

β) falls (P_n) nicht wachsend ist: $R(P) = \bigcap_n R(P_n)$.

Satz 4.5 a) *Sind P, Q orthogonale Projektionen mit $\|P - Q\| < 1$, so gilt* $\dim R(P) = \dim R(Q)$.[1]

[1] Mit $\dim A$ für einen linearen Operator A ist die Hilbertraumdimension des Wertebereiches $R(A)$ gemeint.

b) *Sind* P_n $(n \in \mathbb{N})$ *und* P *orthogonale Projektionen mit* $\dim P_n \leq \dim P < \infty$ *und* $P_n \xrightarrow{s} P$, *so gilt*

$$\dim P_n = \dim P \quad \textit{für große } n \quad \textit{und } \|P_n - P\| \to 0.$$

Im Beweis des vorangehenden Satzes, aber nicht nur dort, ist das folgende einfache Lemma nützlich:

Lemma 4.6 *Sind* Y, Z *abgeschlossene Teilräume eines Hilbertraumes mit* $Y \cap Z^\perp = \{0\}$, *so gilt* $\dim Y \leq \dim Z$.

Seien X, Y Hilberträume. Ein Operator U von X nach Y mit $D(U) = X$ heißt eine *Isometrie* (oder ein *isometrischer Operator*), wenn $\|Ux\| = \|x\|$ für alle $x \in X$ gilt. Ist außerdem $R(U) = Y$ (d. h. U ist ein *isometrischer Isomorphismus* von X auf Y), so heißt U *unitär.*

U heißt eine *partielle Isometrie*, wenn $D(U) = X$ gilt und ein abgeschlossener Teilraum $M \subset X$ existiert mit

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \text{für } x \in M, \quad Ux = 0 \quad \text{für } x \in M^\perp$$

(oder kürzer: $\|Ux\| = \|P_M x\|$ für alle $x \in X$).

Auch $N := R(U) = U(M)$ ist abgeschlossen. Man nennt deshalb M die *Anfangsmenge* von U (auf M wirkt U isometrisch) und N die Endmenge von U (sie ist gleich dem Wertebereich von U).

Satz 4.7 *Seien* X, Y *Hilberträume,* U *ein Operator von* X *nach* Y *mit* $D(U) = X$.

a) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

   (i) U *ist partielle Isometrie mit Anfangsmenge* M *und Endmenge* N,

   (ii) $R(U) = N$, $\langle Ux, Uy\rangle = \langle P_M x, y\rangle$ *für alle* $x, y \in X$,

   (iii) $U^*U = P_M$, $UU^* = P_N$,

   (iv) U^* *ist partielle Isometrie mit Anfangsmenge* N *und Endmenge* M.

b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

   (i) U *ist unitär,*

(ii) *$R(U) = Y$ und $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in X$,*

(iii) *$U^*U = I_X$ und $UU^* = I_Y$, d. h. $U^* = U^{-1}$,*

(iv) *U^* ist unitär.*

Zwei Hilberträume X und Y heißen *isometrisch isomorph* (oder *unitär äquivalent*), wenn es einen unitären Operator U von X auf Y gibt (U^* ist dann unitär von Y auf X). Operatoren A in X und B in Y heißen dann *unitär äquivalent*, wenn gilt

$$A = U^*BU \quad \text{oder } B = UAU^* \quad \text{oder } AU^* = U^*B \quad \text{oder } UA = BU.$$

Sind A und B unitär äquivalent, so gilt offenbar:
$A \in B(X) \Leftrightarrow B \in B(Y)$; $\|A\| = \|B\|$,
$A^* = U^*B^*U$, d. h. auch A^* und B^* sind unitär äquivalent,
A selbstadjungiert (normal) $\Leftrightarrow$ B selbstadjungiert (normal),
A stetig invertierbar $\Leftrightarrow$ B stetig invertierbar,
A kompakt $\Leftrightarrow$ B kompakt,
usw.

Unitär äquivalente Operatoren sind von ihren wesentlichen Eigenschaften her nicht unterscheidbar.

5 Kompakte Operatoren

Kompakte Operatoren sind „fast endlichdimensional" und haben weitgehend die gleichen Eigenschaften wie endlichdimensionale Operatoren. Die Theorie kann weitgehend auch in Banachräumen entwickelt werden. Hier wollen wir dies nur so weit tun, wie es keine besonderen Schwierigkeiten mit sich bringt.

Eine Teilmenge $M \subset C$ heißt *relativ kompakt*, wenn ihr Abschluß $\overline{M}$ kompakt ist, also wenn jede Folge aus M eine (in X) konvergente Teilfolge enthält.

Ein Operator $K \in B(X, Y)$ heißt *kompakt*, wenn das Bild jeder beschränkten Menge aus X relativ kompakt ist (natürlich genügt es, dies z. B. für die 1–Kugel oder eine beliebige ε–Kugel zu fordern), anders formuliert, wenn jede beschränkte Folge (x_n) aus X eine Teilfolge (x_{n_k}) enthält, für die (Kx_{n_k}) in Y konvergiert.

Sei $K(X, Y)$ die Menge der kompakten Operatoren von X nach Y, speziell $K(X)$ die Menge der kompakten Operatoren in X.

Satz 5.1 *Seien X, Y Banachräume. Dann gilt*

(i) $0 \in K(X,Y)$,

(ii) $K \in K(X,Y)$, $a \in \mathbb{K} \Rightarrow aK \in K(X,Y)$

(iii) $K_1, K_2 \in K(X,Y) \Rightarrow K_1 + K_2 \in K(X,Y)$

(iv) (K_k) *aus* $K(X,Y)$, $K \in B(X,Y)$ *mit* $\|K_k - K\| \to 0 \Rightarrow K \in K(X,Y)$.

$K(X,Y)$ ist also ein bezüglich der Operatornorm abgeschlossener Teilraum von $B(X,Y)$.

Satz 5.2 *X, Y, Z seien Banachräume, $A \in B(X,Y)$, $K \in K(Y,Z)$ oder $K \in K(X,Y)$, $A \in B(Y,Z)$. Dann sind KA bzw. $AK \in K(X,Z)$. Für $X = Y = Z$ erhält man: $K(X)$ ist ein (norm–)abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $B(X)$. (Man kann zeigen, daß $K(X)$ das einzige nichttriviale abgeschlossene zweiseitige Ideal in $B(X)$ ist; vgl. ??.)*

Satz 5.3 *Seien X, Y Hilberträume, $K \in B(X,Y)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *K kompakt,*

(ii) *KK^* kompakt,*

(iii) *K^* kompakt.*

(Auch im Banachraum ist K genau dann kompakt, wenn K^* kompakt ist; der Beweis ist aber wesentlich komplizierter.)

Satz 5.4 *Seien X, Y Hilberträume. $K \in B(X,Y)$ ist genau dann kompakt, wenn für jede schwache Nullfolge (x_n) die Bildfolge (Kx_n) eine Norm–Nullfolge ist (oder gleichbedeutend, wenn aus $x_n \xrightarrow{w} x$ folgt $Kx_n \to Kx$).*

Satz 5.5 *Sei K ein kompakter Operator von einem Hilbertraum X in einen Banachraum. Dann sind $N(K)^\perp$ und $R(K)$ separabel. (Alles wesentliche spielt sich also bei kompakten Operatoren in separablen Teilräumen ab.)*

Satz 5.6 *Sei X ein Hilbertraum, $K \in B(X)$.*

a) *Ist K kompakt und (P_n) eine wachsende Folge von orthogonalen Projektionen in X mit $P_n \xrightarrow{s} I$, so gilt $\|K - KP_n\| \to 0$. (Ist X separabel, so können die P_n endlichdimensional gewählt werden.)*

b) *K ist genau dann kompakt, wenn es Normlimes beschränkter endlichdimensionaler Operatoren ist.*

Satz 5.7 *Seien X und Y Hilberträume, $K \in B(X, Y)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *K ist kompakt,*

(ii) *$Ke_n \to 0$ für jede orthonormale Folge (e_n),*

(iii) *$\langle Ke_n, f_n\rangle \to 0$ für orthonormale Folgen (e_n) in X und (f_n) in Y.*

6 Entwicklungssätze für kompakte Operatoren

Grundlegend für den Beweis des folgenden Entwicklungssatzes ist das

Lemma 6.1 *Sei K ein selbstadjungierter kompakter Operator im (reellen oder komplexen) Hilbertraum X.*

a) *K hat (mindestens) einen Eigenwert λ mit $|\lambda| = \|K\|$. Es gilt $\lambda = \|K\|$ oder $\lambda = -\|K\|$ (oder beides).*

b) *Ist φ ein Eigenelement zum Eigenwert λ, $X_1 := \{\varphi\}^\perp$, so ist $K|_{X_1}$ selbstadjungiert und kompakt im Hilbertraum X_1. (Der Satz gilt analog für normale kompakte Operatoren, wobei λ i. allg. nicht reell ist, vgl. Satz 9.11.)*

Satz 6.2 (Entwicklungssatz f. kompakte s. a. Operatoren) *Sei K ein selbstadjungierter kompakter Operator im Hilbertraum X.*

a) *Es existieren endlich viele oder abzählbar viele reelle Zahlen* λ_n *mit* $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| > 0$, $\lambda_n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *im unendlichen Fall, und orthonormierte Elemente* φ_n *mit*

$$KX = \sum_n \lambda_n \langle \varphi_n, x\rangle \varphi_n \quad \textit{für alle } x \in X.$$

Insbesondere ist $K\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$. *Ist* $\{\psi_n\}$ *eine ONB von* $N(K)$, *so ist* $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$ *eine ONB von* X.

b) *Die gleiche Aussage in anderen Worten: Es gibt paarweise verschiedene reelle Zahlen* μ_n *mit* $|\mu_n| \geq |\mu_{n+1}|$, $\mu_n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *im unendlichen Fall, und paarweise orthogonale endlichdimensionale Projektionen* P_n *(d. h.* $P_n P_m = \delta_{nm} P_n$*) so, daß* $K = \sum_n \mu_n P_n$*; die Reihe konvergiert bezüglich der Operatornorm.*

(Auch dieser Satz gilt analog für normale kompakte Operatoren, vgl. Satz 9.11.)

Damit können wir Wurzeln aus selbstadjungierten (später auch normalen) kompakten Operatoren angeben:

Satz 6.3 *Sei* K *ein kompakter selbstadjungierter Operator,* $k \in \mathbb{N}$ *ungerade. Dann besitzt* K *genau dann eine selbstadjungierte kompakte* k*–te Wurzel:*

$$\textit{Für } K = \sum \mu_n P_n \quad \textit{ist } K^{1/k} = \sum \mu_n^{1/k} P_n.$$

(Bei unserem jetzigen Kenntnisstand ist für die Eindeutigkeitsaussage nötig, die Kompaktheit der Wurzel zu fordern; zusammen mit dem Spektralsatz für beliebige selbstadjungierte Operatoren ergibt sich, daß es keine nichtkompakte Wurzel gibt.)

Ein selbstadjungierter Operator T heißt *positiv* (oder nichtnegativ, wenn $\langle x, Tx\rangle \geq 0$ für alle $x \in D(T)$ gilt, *strikt positiv*, wenn $\langle x, Tx\rangle$ für alle $x \neq 0$ aus $D(T)$ gilt.

Satz 6.4 *Sei* K *ein kompakter selbstadjungierter Operator.*

a) *K ist genau dann positiv (strikt positiv), wenn alle Eigenwerte ≥ 0 (bzw. > 0) sind.*

b) *Ist K positiv, so besitzt K für jedes $k \in \mathbb{N}$ genau eine positive kompakte k–te Wurzel. $K^{1/k}$ kann wie oben angegeben werden; dabei sind $\mu_n^{1/k}$ die entsprechenden positiven k–ten Wurzeln.*

Satz 6.5 (Entwicklungssatz für bel. kompakte Operatoren) *Sei K ein kompakter Operator im (reellen oder komplexen) Hilbertraum X bzw. vom Hilbertraum X in den Hilbertraum Y.*

a) *Es gibt positive Zahlen $s_n = s_n(K)$ mit $s_n \to 0$ für $n \to \infty$ im unendlichen Fall, und orthonormale Folgen (φ_n) in X bzw. (ψ_n) in Y so, daß gilt*

$$Kx = \sum_n \langle \varphi_n, x \rangle, \quad K^*y = \sum_n s_n \langle \psi_n, y \rangle \varphi_n.$$

b) *s_n sind die von Null verschiedenen Eigenwerte von $|K| := (K^*K)^{1/2}$; dies sind gleichzeitig die Eigenwerte von $|L^*| := (KK^*)^{1/2}$. Die φ_n sind die zugehörigen orthonormierten Eigenelemente von $|K|$; die $\psi_n = \dfrac{1}{s_n} K\varphi_n$ sind die zugehörigen Eigenelemente von $|K^*|$. Die s_n heißen die* singulären Werte *von KSwird (und K^*).*

c) *K und $|K|$ bzw. K^* und $|K^*|$ sind metrisch gleich, d. h. $\|Kx\| = \| \, |K|x\|$ und $\|K^*x\| = \| \, |K^*|x\|$ für alle $x \in X$.*

Satz 6.6 (Min–Max–Prinzip) a) *Sei K ein kompakter Operator vom Hilbertraum X in den Hilbertraum Y. Für die der Größe nach fallend angeordneten singulären Werte $s_n = s_n(K)$ gilt*

$$\begin{aligned} s_1(K) = \|K\| &= \sup \Big\{ \|Kx\| : x \in X, \|x\| = 1 \Big\}, \\ s_{n+1}(K) &= \inf_{x_1,\ldots,x_n \in X} \sup \Big\{ \|Kx\| : x \in X, x \perp x_1, \ldots, x_n \|x\| = 1 \Big\} (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Dieser gemeinsame Wert $\Big\{ \sum_{\alpha \in A} \|Ke_\alpha\|^2 \Big\}^{1/2} = \Big\{ \sum_{\beta \in B} \|K^* f_\beta\|^2 \Big\}^{1/2}$ ist also unabhängig von der Wahl der ONBen. Er wird als Hilbert–Schmidt–Norm bezeichnet und meist mit $|||K|||$ bzw. $|||K^*|||$ abgekürzt. Es gilt $\|K\| = \|K^*\| \leq |||K||| = |||K^*|||$.

b) *Jeder HSO ist kompakt.*

c) *Ein kompakter Operator ist genau dann ein HSO, wenn die singulären Werte quadratsummierbar werden, es gilt*

$$\sum_j s_j(K)^2 = |||K|||^2.$$

Hilbert–Schmidt–Operatoren in/zwischen L^2–Räumen sind genau die Hilbert–Schmidt–Integraloperatoren:

Satz 6.7 *Ein Operator $K \in B(L^2(Y,\nu)), L^2(X,\mu))$ ist genau dann ein HSO, wenn er ein Hilbert–Schmidt–Integraloperator ist, d. h. wenn es ein $k \in L^2(X \times Y, \mu \times \nu)$ gibt mit*

$$Kf(x) = \int_Y k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \quad \mu\text{-}f.\,ü., \forall f \in L^2(y,\nu).$$

Es gilt $|||K||| = \|k\|$.

Ein kleiner Ausblick: Für $p > 0$ sind die *Schatten–Klassen* (R. Schatten) $C_p(X,Y)$ definiert durch:

$$C_p(X,Y) := \Big\{K \in K(X,Y) : \sum s_j(K)^p < \infty\Big\}.$$

Speziell ist

$C_2(X,Y)$ die Menge der HSO von X nach Y,
$C_1(X,Y)$ heißt die *Spurklasse*; für Operatoren aus $C_1(X,X)$ kann eine Spur definiert werden (sie ist gleich der Summe der Eigenwerte).

Ein Operator liegt genau dann in der Spurklasse, wenn er das Produkt von zwei HSOen ist.

7 Der adjungierte Operator

Seien X, Y Hilberträume. Für einen Operator $T \in B(X,Y)$ ist der adjungierte Operator $T^* \in B(Y,X)$ eindeutig bestimmt durch

$$\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle \quad \text{für alle } x \in X, y \in Y;$$

T^*y ist das $y^* \in X$, das das stetige lineare Funktional $x \mapsto \langle y, Tx\rangle$ auf X erzeugt.

Nun soll der adjungierte Operator zu einem beliebigen (insbesondere beschränkten) Operator definiert werden (es wird sich zeigen, daß er wenigstens dicht definiert sein muß).

Sei T ein Operator von X nach Y, S ein Operator von Y nach X. S und T heißen *formal adjungiert*, wenn gilt

$$\langle y, Tx\rangle_Y = \langle Sy, x\rangle_X \quad \text{für alle } x \in D(T), y \in D(S).$$

Ist $D(T)$ *nicht dicht*, so ändert sich an der formalen Adjungiertheit nichts, wenn S um eine lineare Abbildung von $D(S)$ nach $D(T)^\perp$ verändert wird, d. h. T bestimmt S nicht eindeutig.

Andererseits: Ist $D(T)$ dicht und sind S_1, S_2 formal zu T adjungiert, so gilt für $y \in D(S_1) \cap D(S_2)$

$$\langle S_1 y - S_2 y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle - \langle y, Tx\rangle = 0 \quad \text{für alle } x \in D(T),$$

d. h. (da $D(T)$ dicht ist) $S_1 y = S_2 y$ für $y \in D(S_1) \cap D(S_2)$. Durch $D(S) := D(S_1) + D(S_2)$ und $Sy = S(y_1 + y_2) = S_1 y_1 + S_2 y_2$ für $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in D(S_1)$, $y_2 \in D(S_2)$ wird also eine Fortsetzung von S_1 *und* S_2 definiert, die zu T formal adjungiert ist.

Sei also $D(T)$ dicht. Da zumindest der triviale Operator S_0 mit $D(S_0) = \{0\}$ zu T formal adjungiert ist, gibt es einen eindeutig bestimmten maximalen zu T formal adjungierten Operator T^*, den zu T *adjungierten Operator* (im Fall $T \in B(X, Y)$ liefert dies offenbar nichts neues).

Offensichtlich kann T^* auch beschrieben werden durch

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \Big\{ y \in Y : \exists y^* \in X \ \text{ mit } \langle y^*, x\rangle_Y = \langle y, Tx\rangle_Y \ \forall x \in D(T) \Big\}, \\ T^*y &= y^* \text{ (aus der vorhergehenden Zeile)}, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} D(T^*) &= \Big\{ y \in Y : x \mapsto \langle y, Tx\rangle_Y \ \text{ ist stetig auf } D(T) \Big\}, \\ T^*y &= \text{das Element, das } D(T) \to \mathbb{K}, x \mapsto \langle y; Tx\rangle \ \text{ erzeugt.} \end{aligned}$$

Satz 7.1 *Sei T ein dicht definierter Operator von X nach Y.*

a) *Ist auch* T^* *dicht definiert, so existiert* $T^{**} = (T^*)^*$ *und es gilt* $T^{**} \supset T$.

b) $N(T^*) = R(T)^\perp$, $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp$.

c) T *ist genau dann beschränkt, wenn* $T^* \in B(Y,X)$ *ist; es gilt dann* $\|T^*\| = \|T\|$.

d) *Ist* T *beschränkt, so ist* T^{**} *die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung auf ganz* X.

Die folgenden beiden Sätze zeigen, wie mit adjungierten Operatoren gerechnet werden kann:

Satz 7.2 *Seien* X, Y, Z *Hilberträume,* T_1, T_2 *dicht definierte Operatoren von* Y *nach* Z *bzw. von* X *nach* Y.

a) *Ist* $D(T_1T_2)$ *dicht in* X, *so gilt* $(T_1T_2)^* \supset T_2^*T_1^*$ *(i. allg. gilt nicht „=“).*

b) *Ist* $T_1 \in B(Y,Z)$ *(also* $D(T_1T_2) = D(T_2)$ *dicht), so gilt* $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1$.

c) *Ist* T_2 *bijektiv und* $T_2^{-1} \in B(Y,X)$, *so ist* $D(T_1T_2)$ *dicht und es gilt* $(T_1T_2)^* = T_2^*T_1^*$.

Satz 7.3 *Seien* T_1, T_2 *lineare Operatoren von* X *nach* Y.

a) *Ist* $T_1 + T_2$ *dicht definiert, so gilt* $(T_1 + T_2)^* \supset T_1^* + T_2^*$.

b) *Ist* $T_2 \in B(X,Y)$ *und* T_1 *dicht definiert, so gilt* $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

Ein wichtiges Hilfsmittel für den Umgang mit adungierten Operatoren ist der Graph: Ist T ein linearer Operator von X nach Y, so ist der *Graph* von T definiert durch

$$G(T) := \Big\{(x, Tx) : x \in D(T)\Big\} \subset X \times Y.$$

Sind X und Y Hilberträume, so ist $X \times Y$ mit

$$\Big\langle (x,y),(x',y') \Big\rangle := \langle x, x' \rangle_X + \langle y, y' \rangle_Y, \ \Big\|(x,y)\Big\| := (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

wieder ein Hilbertraum; X und Y sind orthogonale Teilräume von $X \times Y$, man schreibt deshalb auch $X \otimes Y$

Lemma 7.4 *Eine Teilmenge G von $X \times Y$ ist genau dann der Graph eines Operators T von X nach Y, wenn G ein Teilraum von $X \times Y$ ist mit der Eigenschaft:* $(0, y) \in G \Rightarrow y = 0$.

Hat G diese Eigenschaft, so ist der zugehörige Operator T gegeben durch

$$\begin{aligned} D(T) &:= \{x \in X : \exists y \in Y \quad \textit{mit } (x, y) \in G\}, \\ Tx &:= y \quad \textit{mit } (x, y) \in G. \end{aligned}$$

Im folgenden werden zwei unitäre Operatoren $X \times Y \to Y \times X$ (bzw. $X \oplus Y \to Y \oplus X$) benutzt:

$$U(x, y) = (y, -x), \quad V(x, y) = (y, x).$$

Offenbar gilt

$$U^{-1}(y, x) = (-x, y), \quad V(y, x) = (x, y).$$

Satz 7.5 *Seien S, T dicht definierte Operatoren von X nach Y.*

a) $G(T^*) = UG(T)^\perp = (UG(T))^\perp$ *(wobei $\perp$ im Sinne von $Y \times X = Y \oplus X$ zu verstehen ist).*

b) *Aus $S \subset T$ folgt $T^* \subset S^*$.*

Satz 7.6 *Sei T ein dicht definierter injektiver Operator von X nach Y.*

a) $G(T^{-1}) = VG(T)$.

b) *Ist $R(T)$ dicht, so ist auch T^* injektiv und es gilt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

8 Abgeschlossene Operatoren

Seien X, Y Banachräume. Ein Operator T von X nach Y heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph

$$G(T) := \Big\{(x, Tx) : x \in D(T)\Big\} \subset X \times Y$$

abgeschlossen ist (dabei sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen, also z. B. mit der Norm $\|(x,y)\| := (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$ oder $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$ oder $\|(x,y)\| := \max\{\|x\|, \|y\|\}$).

Die Abgeschlossenheit von T bedeutet offenbar nichts anderes als die Vollständigkeit von $(D(T), \|\cdot\|_T)$, wobei $\|\cdot\|_T$ die *Graphennorm* $\|x\|_T = \|(x, Tx)\|$ mit einer der oben definierten Normen $\|(\cdot,\cdot)\|$ in $X \times Y$ ist.

Andererseits bedeutet die Abgeschlossenheit von $G(T)$ nichts anderes als: *Ist (x_n) eine Folge aus $D(T)$ mit $x_n \to x \in X$ und $Tx_n \to y \in Y$, so ist $x \in D(T)$ und $y = Tx$* (in dieser Form wird die Abgeschlossenheit meistens benutzt bzw. nachgewiesen).

T heißt *abschließbar*, wenn die Abschließung $\overline{G(T)}$ der Graphen von T wieder ein Graph ist; der durch $\overline{G(T)}$ definierte Operator wird als die *Abschließung* von T, kurz mit $\overline{T}$, bezeichnet.

Offenbar ist T genau dann abschließbar, wenn gilt: *Ist (x_n) eine Nullfolge aus $D(T)$ und (Tx_n) konvergent, so gilt $Tx_n \to 0$.* Die Abschließung $\overline{T}$ ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} D(\overline{T}) &:= \Big\{x \in X : \exists (x_n) \text{ aus } D(T) \text{ mit } x_n \to x, (Tx_n) \text{ konvergent}\Big\}, \\ Tx &:= \lim_{n\to\infty} Tx_n \text{ mit obiger Folge } (x_n). \end{aligned}$$

Satz 8.1 *Sei T ein dicht definierter Operator vom Hilbertraum X in den Hilbertraum Y.*

a) *T^* ist abgeschlossen.*

b) *T ist genau dann abschließbar, wenn $D(T^*)$ dicht ist. Dann gilt $\overline{T} = T^{**}$.*

c) *Ist T abschließbar, so gilt $\overline{T}^* = T^*$.*

Satz 8.2 (Satz vom abgeschlossenen Graphen) *Seien X, Y Hilberträume, T ein abgeschlossener Operator von X nach Y. Ist $D(T)$ abgeschlossen, so ist T stetig. (Der Satz gilt auch für Operatoren zwischen Banachräumen und wird dort üblicherweise mit Hilfe des Satzes von der offenen Abbildung bewiesen. Im Hilbertraum kann er leicht mit Hilfe des adjungierten Operators und dem Satz von der gleichmäßigen Beschränktheit bewiesen werden. Der Satz von der offenen Abbildung ist dann eine einfache Folgerung.)*

Satz 8.3 (Satz von der offenen Abbildung) *Seien X, Y Hilberträume, $T \in B(X, Y)$ sei surjektiv. Dann ist T offen (d. h. das Bild jeder offenen Menge aus X ist offen in Y).*

Sei T ein linearer Operator von X nach Y, S ein linearer Operator von X nach Z. S heißt *T–beschränkt*, wenn gilt

$$D(T) \subset D(S), \quad \exists a, b \geq 0 \text{ mit } \|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\| \text{ für } x \in D(T).$$

Das Infimum c aller möglichen b heißt die T–Schranke von S. Im allgemeinen kann in obiger Ungleichung nicht $b = c$ gewählt werden.

Bemerkung 8.4 *Häufig ist folgendes nützlich:*

a) *Gilt $\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$, so gilt für jedes $\varepsilon > 0$*

$$\|Sx\|^2 \leq a^2\|x\|^2 + b^2\|Tx\|^2 + 2ab\|x\|\,\|Tx\| \leq a_\varepsilon^2\|x\| + (b + \varepsilon)^2\|Tx\|.$$

b) *Gilt $\|Sx\|^2 \leq a^2\|x\| + b^2\|Tx\|$, so gilt auch*

$$\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|.$$

Satz 8.5 *Seien X, Y, Z Banachräume, T und S lineare Operatoren von X nach Y bzw. von X nach Z. Ist T abgeschlossen und S abschließbar mit $D(T) \subset D(S)$, so ist S T–beschränkt (eine Aussage über die T–Schranke ist nicht möglich).*

Satz 8.6 (Stabilität der Abgeschlossenheit) *Seien X, Y Banachräume, T und S lineare Operatoren von X und Y; S sei T–beschränkt mit relativer Schranke < 1. Dann ist $T + S$ genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist.*

Satz 8.7 a) *Jeder symmetrische Operator ist abgeschlossen; es gilt $\overline{T} \subset T^*$.*

b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *T ist wesentlich selbstadjungiert (d. h. T^* ist selbstadjungiert),*

(ii) *T ist abschließbar und $\overline{T} = T^*$,*

(iii) *T ist abschließbar und $\overline{T}$ ist selbstadjungiert.*

$\overline{T}$ ist dann die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von T.

c) *Ist $D(T) = X$ und ist $D(T^*)$ dicht, so ist T beschränkt. (Speziell gilt der Satz von* Hellinger–Toeplitz*: Ein symmetrischer Operator T mit $D(T) = X$ ist beschränkt.)*

Für einen beschränkten Operator A im Hilbertraum ist offensichtlich A^*A selbstadjungiert und positiv. Es ist gar nicht offensichtlich, daß dies auch für unbeschränkte Operatoren gilt (falls sie abgeschlossen sind).

Satz 8.8 a) *Sei A ein dicht definierter abgeschlossener Operator vom Hilbertraum X in den Hilbertraum Y. Dann ist A^*A sein selbstadjungierter Operator in X und es gilt $A = \overline{A|_{D(A^*A)}}$ (d. h. $D(A^*A)$ ist ein* determinierender Bereich – *engl.* core – *von A).*

b) *Seien X, Y_1, Y_2 Hilberträume, A_1 und A_2 dicht definierte abgeschlossene Operatoren von X nach Y_1 bzw. Y_2. Es gilt $A_1^*A_1 = A_2^*A_2$ genau dann, wenn A_1 und A_2 metrisch gleich sind (d. h. $D(A_1) = D(A_2)$ und $\|A_1x\| = \|A_2x\|$ für alle $x \in D(A_1) = D(A_2)$).*

Ein Operator N im Hilbertraum X heißt *normal*, wenn N und N^* metrisch gleich sind

$$D(N) = D(N^*) \;\text{ und }\; \|Nx\| = \|N^*x\| \;\text{ für alle } x \in D(N).$$

Insbesondere stimmen die Nullräume von N und N^* überein. Zusammen mit obigem Satz folgt:

Satz 8.9 a) *Jeder normale Operator T ist abgeschlossen und maximal normal (d. h. aus N normal und $T \subset N$ folgt $T = N$).*

b) *Für einen dicht definierten Operator sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(i) *T ist normal,*

(ii) *T^* ist normal,*

(iii) $T^*T = TT^*$.

Satz 8.10 *Für jeden normalen Operator T gilt:*

a) *Für jedes $z \in \mathbb{K}$ ist $T \pm z$ normal, insbesondere gilt $\|(T \pm z)\|x\| = \|(T^* \pm \overline{z})x\|$ für alle $x \in D(T) = D(T^*)$.*

b) *Ist T injektiv, so ist auch T^{-1} normal, T^* injektiv und $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ (für ein $z \in \mathbb{K}$, für das $T - z$ injektiv ist, ist also $(T - z)^{-1}$ normal).*

c) *$R(T^*) = R(T)$ (nicht nur die Abschlüsse sind gleich).*

Bemerkung 8.11 *Jeder selbstadjungierte Operator T ist normal. Dann ist $T - z$ normal für jedes $z \in \mathbb{C}$, also ist $(T - z)^{-1}$ normal, falls $T - z$ injektiv ist. Das bedeutet: Für einen selbstadjungierten Operator T ist die Resolvente (vgl. folgenden Abschnitt) normal. Hierin liegt hauptsächlich die Bedeutung normaler Operatoren.*

Abschließend sollen konkret einige (nichttriviale) adjungierte Operatoren berechnet werden:

Alle hier betrachteten Operatoren seien definiert durch

$$f \mapsto \tau f = -if'.$$

T_0: $D(T_0) := \Big\{ f \in L^2(0,1) : f \text{ abs. stetig, } f' \in L^2(0,1), f(0) = f(1) = 0 \Big\}$,
T_2: $D(T_2) := \Big\{ f \in L^2(0,1) : f \text{ abs. stetig, } f' \in L^2(0,1) \Big\}$,
T_{01}: $D(T_{01} := \Big\{ f \in L^2(0,1) : f \text{ abs. stetig, } f' \in L^2(0,1), f(0) = 0 \Big\}$,
T_{10}: $D(T_{10} := \Big\{ f \in L^2(0,1) : f \text{ abs. stetig, } f' \in L^2(0,1), f(1) = 0 \Big\}$
T_{11}: $D(T_{11} := \Big\{ f \in L^2(0,1) : f \text{ abs. stetig, } f' \in L^2(0,1), f(0) = f(1) \Big\}$.

T_0 heißt der durch τ definierte *minimale* (abgeschlossene) Operator, T_2 der *maximale* Operator.

Satz 8.12 a) *Es gilt*

$$R(T_0) = \Big\{ g \in L^2(0,1) : \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \Big\} = \{1\}^\perp.$$

Der Beweis legt nahe, daß es eigentlich heißen sollte

$$R(T_0) = \Big\{ g \in L^2(0,1) : \int_0^1 \overline{u(x)} g(x)\, \mathrm{d}x = 0 \,\forall \;\; \textit{Lösungen von } \tau u = 0 \Big\}.$$

b) $T_0^* = T_2$, $T_2^* = T_0$.

c) $T_{01}^* = T_{10}$, $T_{10}^* = T_{01}^*$.

d) $T_{11}^* = T_{11}$, *d. h.* T_{11} *ist selbstadjungiert.*

9 Grundlagen der Spektraltheorie

Ausgangspunkt sind die Lösungseigenschaften einer Gleichung der Form

$$(T - z)x = y$$

mit einem linearen Operator T im Banach– bzw. Hilbertraum X, $z \in \mathbb{K}$ und $y \in X$. Optimal wären die Eigenschaften:

(i) lösbar für alle $y \in X$, d. h. $T - z$ ist surjektiv,

(ii) die Lösung ist eindeutig, d. h. $T - z$ ist injektiv,

(iii) die Lösung x hängt stetig von y ab, d. h. $(T - z)^{-1}$ ist stetig,

(iv) die Lösung x hängt (soweit sie existiert) stetig von z ab, d. h. die Abbildung $z \mapsto (T - z)^{-1}$ ist stetig im Bereich der z, wo die Gleichung eindeutig lösbar ist.

Es wird sich zeigen, daß die Eigenschaft (iv) nicht extra gefordert werden muß, sie ergibt sich – in stärkerer Form – aus den ersten drei Eigenschaften (vgl. Satz 9.6).

Die *Resolventenmenge* $\varrho(T)$ ist die Menge der $z \in \mathbb{K}$, für die die ersten drei Eigenschaften erfüllt sind:

$$\varrho(T) := \Big\{ z \in \mathbb{K} : T - z \;\text{ ist bijektiv, } (T - z)^{-1} \;\text{ ist stetig} \Big\};$$

dabei ist mit „$T - z$ bijektiv“ gemeint, daß $T - z$ als Abbildung von $D(T)$ auf X bijektiv ist.

Ist $\varrho(T)$ nicht leer, d. h. es existiert ein $z \in \varrho(T)$, so ist $(T - z)^{-1}$ abgeschlossen, also auch T abgeschlossen. Das bedeutet umgekehrt, wenn T nicht abgeschlossen ist, ist $\varrho(T) = \emptyset$, es gibt also keine brauchbare Lösungstheorie.

Man setzt deshalb meist voraus, daß T abgeschlossen ist. Dann folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen

$$T - z \text{ bijektiv } \Rightarrow (T - z)^{-1} \text{ stetig.}$$

Für abgeschlossene Operatoren vereinfacht sich also die Definition der Resolventenmenge:

$$\varrho(T) = \Big\{ z \in \mathbb{K} : T - z \text{ ist bijektiv} \Big\} \quad \text{für abgeschlosseneOperatoren } T.$$

Die *Resolvente* oder *Resolventenfunktion* ist

$$R(T, \cdot) : \varrho(T) \to B(X),\, z \mapsto R(T, z) := (T - z)^{-1}.$$

Der Operator $R(T, z)$ für ein $z \in \varrho(T)$ heißt die *Resolvente des Operators T im Punkt z.*

Das *Spektrum* $\sigma(T)$ von T ist $\sigma(T) := \mathbb{K} - \varrho(T)$, also die Menge der $z \in \mathbb{K}$ für die eine der Eigenschaften (i), (ii), (iii) verletzt ist (bzw. für abgeschlossene Operatoren T: für die $(T - z)$ nicht bijektiv ist).

Satz 9.1 *Sei T ein dicht definierte abgeschlossener Operator im Hilbertraum. Dann gilt $\varrho(T^*) = \varrho(T)^*$, $\sigma(T^*) = \sigma(T)^*$, wobei für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{K}$ M^* die zu M konjugierte Menge ist, $M^* := \{\overline{z} : z \in M\}$. (Man beachte, daß im Banachraum gilt $\varrho(T^*) = \varrho(T)$, $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.)*

Lemma 9.2 *Seien S und T bijektive lineare Operatoren von X nach Y (genauer: bijektiv von $D(S)$ bzw. $D(T)$ nach Y; die Topologie der Räume spielt hier keine Rolle.*

a) *Gilt $D(S) \subset D(T)$, so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$; gilt $D(T) \subset D(S)$, so gilt $T^{-1} - S^{-1} = S^{-1}(S - T)T^{-1}$.*

b) *Gilt $D(S) = D(T)$, so gilt*

$$T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S-T)S^{-1} = S^{-1}(S-T)T^{-1}.$$

(Man beachte die Analogie zu $\frac{1}{z} - \frac{1}{w} = \frac{w-z}{zw}$ *für* $z, w \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*)*

Satz 9.3 (Resolventengleichungen) *Seien S und T abgeschlossene Operatoren im Banachraum X mit $D(S) = D(T)$.*

a) *Für $z, z' \in \varrho(T)$ gilt die* erste Resolventengleichung

$$R(T,z) - R(T,z') = (z-z')R(T,z)R(T,z') = (z-z')R(T,z')R(T,z).$$

b) *Für $z \in \varrho(T) \cap \varrho(S)$ gilt die* zweite Resolventengleichung

$$R(T,z) - R(S,z) = R(T,z)(S-T)R(S,z) = R(S,z)(S-T)R(T,z).$$

Satz 9.4 (*Stabilität der stetigen Invertierbarkeit*) *Seien X, Y Banachräume, S, T lineare Operatoren von X nach Y. Ist T abgeschlossen und bijektiv (als Abb. von $D(T)$ nach Y, d. h. $T^{-1} \in B(X,Y)$), $D(S) \supset D(T)$ und $\|ST^{-1}\| < 1$, so ist auch $T+S$ abgeschlossen und bijektiv, und es gilt*

$$(T+S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{-1}(ST^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (T^{-1}S)^n T^{-1},$$

wobei die (identischen) Reihen in der Operatornorm konvergieren.

Bemerkung 9.5 *Man beachte, daß sich diese Reihen* formal *aus den Identitäten*

$$\begin{aligned} (T+S)^{-1} &= (T(I+T^{-1}S))^{-1} = (I+T^{-1}S)^{-1}T^{-1} \\ &= ((I+ST^{-1})T)^{-1} = T^{-1}(I+ST^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

ergeben, indem die Terme $(I+T^{-1}S)^{-1}$ bzw. $(I+ST^{-1})$ als geometrische Reihe geschrieben werden.

Satz 9.6 *Ist $z_0 \in \varrho(T)$ und $|z - z_0| < \|R(T, z_0)\|^{-1}$, so ist auch $z \in \varrho(T)$ und es gilt*

$$R(T, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n R(T, z)^{n+1}$$

(Die Resolventenfunktion ist also analytisch in der Resolventenmenge; Eigenschaft (iv) ist also automatisch erfüllt.)

Korollar 9.7 *Die Resolventenmenge ist eine offene, das Spektrum eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{K}$.*

Ist $T \in B(X)$, so ist $T - z = -z + T$ bijektiv für $|z| > \|T\|$ und der obige Satz liefert

Satz 9.8 a) *Ist $T \in B(X)$, so gilt*

$$\varrho(T) \supset \{z \in \mathbb{K} : |z| > \|T\|\}, \quad \sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq \|T\|\}.$$

Für $|z| > \|T\|$ gilt

$$(T - z)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n \quad \text{Neumannsche Reihe},$$

wobei die Reihe im Sinn der Operatornorm konvergiert.

b) *Die Neumannsche Reihe konvergiert für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| > r(T) = \limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ und stellt dort $(T - z)^{-1}$ dar, d. h. es gilt*

$$\varrho(T) \supset \{z \in \mathbb{K} : |z| > r(T)\}, \quad \sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq r(T)\}.$$

c) *Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so gilt*

$$r(T) = \max\{z \in \sigma(T)\};$$

deshalb ist es sinnvoll, $r(T)$ als Spektralradius *von T zu bezeichnen.*

d) *Für normale (insbes. selbstadjungierte) Operatoren gilt $r(T) = \|T\|$.*

Satz 9.9 a) *Alle Eigenwerte eines hermiteschen Operators sind reell.*

b) *Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten eines hermiteschen oder normalen Operators sind orthogonal.*

Satz 9.10 *Sei T ein selbstadjungierter oder normaler Operator im (reellen oder komplexen) Hilbertraum.*

a) *z ist genau dann Eigenwert von T, wenn $\overline{R(T-z)} \neq X$ gilt; es gilt $N(T-z) = R(T-z)^{\perp}$.*

b) *Für alle $z \in \mathbb{K}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $z \in \sigma(T)$,

(ii) $\exists (x_n)$ *aus* $D(T)$ *mit* $\|x_n\| = 1$, $(T-z)x_n \to 0$,

(iii) $R(T-z) \neq X$.

Satz 9.11 (Entwicklung normaler kompakter Operatoren) *Sei K ein normaler kompakter Operator im komplexen Hilbertraum X.*

a) *Es existieren endlich oder abzählbar viele komplexe Zahlen λ_n mit $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$, $\lambda_n \to 0$ im unendlichen Fall, und orthonormale Elemente φ_n mit*

$$kx = \sum_n \lambda_n \langle \varphi_n, x \rangle \varphi_n \qquad \text{für alle } x \in X.$$

b) *Entsprechend: $\mu_n \in \mathbb{C}$, $|\mu_n| \geq |\mu_{n+1}|$, $\mu_n \to 0$, und paarweise orthogonale endlichdimensionale Projektionen P_n mit $K = \sum_n \mu_n P_n$ (Konvergenz im Sinne der Operatornorm).*

c) *K ist genau dann selbstadjungiert, wenn alle λ_n bzw. μ_n reell sind.*

Satz 9.12 *Das Spektrum jedes (insbesondere auch unbeschränkten) selbstadjungierten Operators im reellen oder komplexen Hilbertraum und jedes normalen Operators im komplexen Hilbertraum ist nicht leer.*

Satz 9.13 *Sei T ein hermitescher Operator im komplexen Hilbertraum.*

a) *Für* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *ist* $(T - z)$ *stetig invertierbar (i. allg. aber nicht surjektiv); es gilt*

$$\|(T-z)x\| \geq |\operatorname{Im} z|\,\|x\|, \quad \|(T-z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}.$$

b) *Ist* T *abgeschlossen, so ist* $R(T-z)$ *abgeschlossen für jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Der folgende Satz erlaubt es, die (wesentliche) Selbstadjungiertheit ohne Berechnung eines adjungierten Operators zu untersuchen:

Satz 9.14 a) *Für einen symmetrischen Operator im komplexen Hilbertraum sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T *ist selbstadjungiert,*

(ii) $R(T-z) = X$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

(iii) *es existieren* z_+ *und* z_- *aus der oberen bzw. unteren Halbebene mit* $R(T - z_\pm) = X$,

(iv) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

b) *Entsprechend sind äquivalent:*

(i) T *ist wesentlich selbstadjungiert,*

(ii) $\overline{R(T-z)} = X$ *für alle* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$,

(iii) *es existieren* z_+ *und* z_- *aus der oberen bzw. unteren Halbebene mit* $\overline{R(T - z_\pm)} = X$,

(iv) $\sigma(\overline{T} \subset \mathbb{R})$.

10 Hilbertraum und Quantenmechanik

Wir stellen uns ein (klassisches oder quantenmechanisches) System aus N geladenen Teilchen im elektromagnetischen Feld vor. Speziell denken wir an: 1 Teilchen (z. B. Elektron, Proton,...) frei oder im Feld, ein Atom, Ion, Molekül,....

Wie wird ein solches System klassisch beschrieben?

Ortskoordinaten $q_1, \ldots, q_n$ $(n = 3N)$,
Impulskoordinaten $p_1, \ldots, p_n$.
Mit der *Hamiltonfunktion* $H(q,p)$ (=Gesamtenergie als Funktion von $q = q_1, \ldots, q_n$ und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ erhält man die *Hamiltonschen Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial}{\partial p_j} H(q,p), \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial}{\partial q_j} H(q,p), \end{aligned} \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Zum Beispiel für ein Teilchen mit Masse m und Ladung e im elektrischen Feld $E(\cdot)$ mit Potential $V(\cdot)$ (d. h. $E(q) = -\operatorname{grad} V(g)$):

$$H(q,p) = \frac{1}{2m} p^2 + eV(q) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1}^{3} p_j^2 + eV(q_1, q_2, q_3),$$

$$\dot{q}_j = \frac{1}{m} p_j, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial}{\partial q_j} V(q_1, q_2, q_3).$$

Klassisch ist ein solches System durch diese Differentialgleichungen für alle Zeiten beschrieben, wenn q und p zu einem Zeitpunkt (z. B. $t = 0$) bekannt sind.

In der *Schrödingerdarstellung* (*Schrödingerbild*) der Quantenmechanik wird das System zum Zeitpunkt t durch eine *Zustandsfunktion*

$$\psi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \psi_t(x) = \psi_t(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n; t)$$

beschrieben, wobei $|\psi_t(\cdot)|^2$ die *Wahrscheinlichkeitsdichte* für den Aufenthaltsort des Teilchens beschreibt,

$$\begin{aligned} \int_A |\psi_t(x)|^2 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Ws. dafür, daß zur Zeit } t \text{ die Ortskoordinaten} \\ q_1, \ldots, q_n \text{ Werte in } A \text{ annehmen,} \end{array} \right. \\ &= \mathrm{ws}_{\psi_t}\{(q_1, \ldots, q_n) \in A\}. \end{aligned}$$

Also muß gelten

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_t(x)|^2 \, \mathrm{d}x = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Will man auch nicht–normierte Zustandsfunktionen ψ_t zulassen, so muß man entsprechend definieren:

$$\mathrm{ws}_{\psi_t}\{q \in A\} := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} |\psi_t(x)|^2 \, \mathrm{d}x} \int_A |\psi_t(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Nicht L^2–Funktionen machen jedoch keinen Sinn. $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist der natürliche Zustandsraum. Für alle $t \in \mathbb{R}$ sei also $\psi_t \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \psi(x,t) = \psi(x_1, \ldots, x_n; t) = \psi_t(x_1, \ldots, x_n);$$

dieses ψ heißt die *Wellenfunktion.*

Offensichtlich kann durch eine solche Wellenfunktion die Ortskoordinate eines Teilchens niemals exakt beschrieben werden: Den *Meßgrößen* (*Observablen*), wie z. B. dem Ort des Teilchens, oder dem Impuls,..., werden durch Quantisierungsvorschriften „Operatoren" zugeordnet. Für die Ortskoordinaten ist dies

$$\text{Koordinate } q_j \mapsto \quad \text{Multiplikation mit } x_j.$$

Der *Erwartungswert* der Koordinate im Zustand ψ ist (falls das Integral existiert)

$$q_j^\psi := \langle \psi, x_j \psi \rangle = \int x_j |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Ein Maß für die „Ungenauigkeit", mit der q_j^ψ angenommen wird, ist die *Varianz*

$$\begin{aligned} \operatorname{var}_\psi(q_j) &:= \text{Erwartungswert von } (q_j - q_j^\psi)^2 \text{ im Zustand } \psi \\ &= \int |(x_j - q_j^\psi)\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

oder die *Streuung* $\sigma_\psi(q_j) := \operatorname{var}_\psi(q_j)^{1/2}$.

Für die *Impulskoordinaten* besagt die Quantisierungsvorschrift

$$\text{Impulskoordintate } p_j \mapsto \quad \text{Diff.–Op. } \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

(wobei die Konstante $\hbar$ hier keine Rolle spielen wird). Entsprechend erhält man den Erwartungswert, die Varianz und die Streuung (falls die Integrale existieren)

$$\begin{aligned} p_j^\psi &:= \left\langle \psi, \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi \right\rangle = \frac{\hbar}{i} \int \overline{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi(x) \, \mathrm{d}x \\ \operatorname{var}_\psi(p_j) &:= \int \left| \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} - p_j^\psi \right) \psi(x) \right|^2 \mathrm{d}x, \\ \sigma_\psi(p_j) &:= \operatorname{var}_\psi(p_j)^{1/2}. \end{aligned}$$

Natürlich gibt es Zustandsfunktionen, für die die Ortskoordinate beliebig gut lokalisiert wird (das ist leicht zu sehen; für die Impulskoordinate ist das schwieriger, mit Hilfe der Fouriertransformation allerdings genauso leicht). Der folgende Satz besagt, daß Orts– und Impulskoordinate nie gleichzeitig beliebig gut lokalisiert sein können.

Satz 10.1 (Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation) a) *Für jedes $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\sigma_\psi(q_j)\sigma_\psi(p_j) \geq \frac{\hbar}{2}\|\psi\|^2.$$

b) *Allgemeiner gilt: Sind A, B hermitesche Operatoren im Hilbertraum X,*

$$A_x := \langle x, Ax\rangle, \quad \sigma_x(A) = \|(A - A_x)x\| \ \textit{ für } x \in D(A)$$

und entsprechend für B, so gilt

$$\sigma_x(A)\sigma_x(B) \geq \frac{1}{2}\Big|\langle x, [A,B]x\rangle\Big| \ \textit{ für } x \in D(A) \cap D(B)$$

(hier ist $[A, B] = AB$ der Kommutator von A und B).

Die zeitliche Veränderung der Wellenfunktion wird durch die *Schrödingergleichung*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = S\psi(x,t)$$

beschrieben, wobei der *Schrödingeroperator* S nur auf die Variable x wirkt. Man erhält S mittels einer *Quantisierungsvorschrift* aus der Hamiltonfunktion (deshalb auch *Hamiltonoperator*), indem man an jeder Stelle in $H(q,p)$

q_j durch Multiplikation mit x_j

p_j durch den Differentialausdruck $\dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$

ersetzt. Da diese beiden Operatoren nicht vertauschbar sind, ergeben sich im allgemeinen Fall Probleme. In den wichtigsten Fällen genügt es, den Ausdruck für $H(q,p)$ geeignet symmetrisch zu schreiben und dann die obige Vorschrift anzuwenden.

Für ein geladenes Teilchen mit der Masse m und Ladung e im elektrischen Feld E mit Potential V und magnetischem Feld b mit Vektorpotential a (d. h. $b = \operatorname{rot} a$) erhält man

$$
\begin{aligned}
H(q,p) &= H(q_1,q_2,q_3,p_1,p_2,p_3) = \frac{1}{2m}\Big(p - \frac{e}{c}a(q)\Big)^2 + e(V(q) \\
&= \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\Big(p_j - \frac{e}{c}a_j(q_1,q_2,q_3)\Big)^2 + eV(q_1,q_2,q_3) \\
&= \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\Big\{p_j^2 - \frac{e}{c}p_j a_j(q_1,q_2,q_3) - \frac{e}{c}a_j(q,q_1,q_2,q_3)p_j \\
&\quad + \frac{e^2}{c^2}a_j(q_1,q_2,q_3)^2\Big\} + V(q_1,q_2,q_3), \\
S &= \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\Big(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{e}{c}a_j(x)\Big)^2 + eV(x) \\
&= \frac{1}{2m}\Big\{-\hbar^2\Delta + 2i\frac{e\hbar}{c}\sum_{j=1}^{3}a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{e\hbar}{i}\operatorname{div} a(x) + \frac{e^2}{c^2}|a(x)|^2\Big\} \\
&\quad + eV(x),
\end{aligned}
$$

wobei Δ der Laplacesche Differentialausdruck $\sum_{j=1}^{3}\dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ ist.

Damit ist S als Differentialausdruck gegeben. Aber wie sieht der Definitionsbereich aus, der nötig ist, um S als Operator vollständig zu beschreiben? Dies ergibt sich i. wes. aus folgenden Überlegungen.

Da der Erwartungswert $E_\psi := \langle\psi, S\psi\rangle$ der Energie in jedem Zustand $\psi \in D(S)$ reell sein muß, muß S jedenfalls hermitesch sein. Der oben gefundene Ausdruck definiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ jedenfalls einen hermiteschen – sogar symmetrischen – Operator. Wie die folgenden Überlegungen zeigen, muß S tatsächlich selbstadjungiert sein.

Sei $U(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ der *Evolutionsoperator* eines quantenmechanischen Systems, d. h.

$$U(t)\psi := \text{Zustand zur Zeit } t, \text{ wenn } \psi \text{ der Zustand zur Zeit } 0 \text{ ist.}$$

Wenn dies ein physikalisch sinnvolles System sein soll, müssen wenigstens die folgenden Eigenschaften erfüllt sein:

(i) $D(U(t)) = X$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $U(0) = I$.

(iii) $U(t)$ ist linear für jedes $t \in \mathbb{R}$. Es gilt das Superpositionsprinzip; die Zustände bilden einen Vektorraum; lineare Superpositionen bleiben bei der Zeitentwicklung erhalten.

(iv) $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2) = U(t_2)U(t_1)$.

(v) $U(s)\psi \to U(t)\psi$ für $s \to t$ und alle $\psi \in X$ (d.h. $U(s) \xrightarrow{s} U(t)$ für $s \to t$). Plötzliche Änderungen sollen nicht erlaubt sein.

(vi) $\|U(t)\psi\| = \|\psi\|$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\psi \in X$. Dies ergibt sich (für ψ aus einem dichten Teilraum, dem Definitionsbereich des infinitesimalen Generators, vgl. weiter unten) aus der Tatsache, daß $\psi_t := U(t)\psi$ die Schrödingergleichung mit einem symmetrischen Operator erfüllt.

(vii) $R(U(t)) = X$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Insgesamt bedeutet das: $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ist eine *stark stetige einparametrige Gruppe unitärer Operatoren.*

Der *infinitesimale Generator (Erzeuger)* A von $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ist definiert durch:

$$
\begin{aligned}
D(A) &:= \left\{x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t) - I)x \text{ existiert}\right\}, \\
Ax &:= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t) - I)x \quad \text{für } x \in D(A).
\end{aligned}
$$

Satz 10.2 (M. Stone) a) *Sei $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige einparametrige Gruppe unitärer Operatoren im Hilbertraum X, A ihr infinitesimaler Generator, $S := iA$. Dann gilt* (i) *$D(S)$ ist dicht,* (ii) *S ist hermitesch,* (iii) *$R(S \pm i) = X$; insgesamt bedeutet das die Selbstadjungiertheit von S (Schiefselbstadjungiertheit des Generators A).*

b) *Ist X separabel, so kann in Teil a die starke Stetigkeit durch die schwache Meßbarkeit ersetzt werden (d. h. $t \mapsto \langle x.U(t)y\rangle$ ist meßbar für alle $x, y \in X$).*

Damit folgt leicht:

Satz 10.3 *Sei $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige einparametrige Gruppe unitärer Operatoren, A ihr infinitesimaler Generator, $S := iA$. Dann ist für jedes $x \in D(S)$ $U(t)x$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems*

$$\frac{d}{dt}x(t) = -iSx(t), \quad x(0) = x.$$

Insbesondere ist $U(t)x \in D(S)$ für $x \in D(S)$ und $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 10.4 *Ist bekannt, daß für den Schrödingeroperator S der Operator $A = -iS$ der infinitesimale Generator einer stark stetigen einparametrigen Gruppe unitärer Operatoren ist, so ist das obige AWP für jedes $x \in D(S)$ eindeutig lösbar. – Wir werden später sehen, daß zu jedem selbstadjungierten Operator S eine solche Gruppe mit dem Generator $-iS$ existiert. Damit ist jede Schrödingergleichung für $x \in D(S)$ eindeutig lösbar und $x(t)$ liegt in $D(S)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Zum Abschluß noch ein interessantes Kriterium für die wesentliche Selbstadjungiertheit, das mit stark stetigen Gruppen zusammenhängt:

Satz 10.5 *Sei S ein symmetrischer Operator, $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ stark stetige einparametrige Gruppe unitärer Operatoren mit*

- *$U(t)D(S) \subset D(S)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (d.h. $U(t)$ läßt $D(S) =$ invariant),*
- *$\frac{1}{t}(U(t) - I)x \to -iSx$ für $t \to 0$ und $x \in D(S)$ (d.h. $-iS$ ist eine Einschränkung des infinitesimalen Generators von $U(t)$).*

Dann ist S wesentlich selbstadjungiert.

Beispiel 10.6 Der Operator S mit

$$D(S) = C_0^\infty(-\infty, \infty), \quad Sf = \frac{1}{i}f'$$

ist wesentlich selbstadjungiert. (Dies folgt mit obigem Satz und $(U(t)f)(x) = f(x-t)$. □

11 Der Spektralsatz

Jeder selbstadjungierte kompakte Operator K läßt sich in der Form

$$K = \sum \lambda_n P_n$$

schreiben mit einer Nullfolge (λ_n) $(\lambda_n \neq 0)$ und paarweise orthogonalen endlichdimensionalen Projektionen P_n.

Definieren wir (wobei P_0 die Projektion auf den Nullraum von K ist)

$$E(t) = E_K(t) := \begin{cases} \sum\limits_{\{n:\lambda_n \leq t\}} P_n & \text{für } t < 0, \\ P_0 + \sum\limits_{\{n:\lambda_n \leq t\}} P_n & \text{für } \geq 0, \end{cases}$$

so gilt:

- $E(t)$ ist für jedes t die orthogonale Projektion auf die abgeschlossene lineare Hülle der Eigenräume zu Eigenwerten $\leq t$ (einschließlich des eventuellen Eigenwerts 0),
- $E(t) = 0$ für $t < -\|K\|$ (bzw. $t <$ kleinster Eigenwert),
- $E(t) = I$ für $t \geq \|K\|$ (bzw. $t \geq$ größter Eigenwert),
- $E(t)$ ist wachsend, $E(s) \leq E(t)$ für $s \leq t$,
- $E(t+\varepsilon) \xrightarrow{s} E(t)$ für $\varepsilon \to 0+$ (starke Rechtsstetigkeit); in allen $t \neq 0$ ist $E(\cdot)$ sogar norm–rechtsstetig, sogar konstant in einem kleinen abgeschlossenen Intervall rechts von t.

Offenbar können wir mit Hilfe dieser Funktion $E(\cdot)$ die obige Darstellung von K formal umschreiben:

$$K = \sum_{E(t) \neq E(t-)} t\Big(E(t) - E(t-)\Big) = \sum_{t\in\mathbb{R}} \ldots =: \int_{\mathbb{R}} t dE(t).$$

Ohne große Schwierigkeiten läßt sich diese Überlegung auf beschränkte selbstadjungierte Operatoren mit reinem Punktspektrum übertragen (d. h. auf beschränkte selbstadjungierte Operatoren mit einer ONB von Eigenelementen bzw. $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} P_\lambda = I$ mit den Projektionen P_λ auf die Eigenräume zu λ).

Ist A der Operator der Multiplikation mit id in $L^2(a,b;\varrho)$, d. h.

$$D(A) = \Big\{ f \in L^2(a,b;\varrho) : xf \in L^2(a,b;\varrho) \Big\}, \quad Af(x) = xf(x),$$

so kann man definieren

$$\begin{aligned} E(t) &:= \text{ Projektion in } L^2(a,b;\varrho) \text{ auf } L^2(a,t;\varrho) \\ &= \text{ Multiplikation mit } \chi_{(a,t]} \end{aligned}$$

und erhält

$$\begin{aligned} A &\sim \sum \tilde{t_j} \Big(E(t_j) - E(t_{j-1}) \Big) \sim \int_a^b t dE(t), \\ Af(x) &\sim \sum \tilde{t_j} \chi_{(t_{j-1},t_j]}(x) f(x) \sim \Big(\int_a^b t dE(t) f \Big)(x). \end{aligned}$$

Für unbeschränkte Operatoren wird die Sache etwas komplizierter; und es wird i. allg. auch nicht so einfach sein, eine geeignete Funktion $E(\cdot)$ zu finden.

Eine Funktion $E : \mathbb{R} \to B(X)$ heißt eine *Spektralschar* in X, wenn gilt

(i) $E(t)$ ist orthogonale Projektion für jedes $t \in \mathbb{R}$,

(ii) $E(s) \leq E(t)$ (d. h. $R(E(s)) \subset R(E(t))$ bzw. $\|E(s)x\| \leq \|E(t)x\|$ für alle $x \in X$) für $s \leq t$,

(iii) $\operatorname*{s-lim}_{\delta \to 0+} E(t+\delta) = E(t)$, *starke Rechtsstetigkeit*,

(iv) $\operatorname*{s-lim}_{t \to -\infty} E(t) = 0$,

(v) $\operatorname*{s-lim}_{t \to \infty} E(t) = I$.

Wir geben drei typische Beispiele an:

Beispiel 11.1 Sei A eine Indexmenge und für jedes $\alpha \in A$ sei P_α eine orthogonale Projektion im Hilbertraum X, $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$ ($\mu_\alpha \neq \mu_\beta$ für $\alpha \neq \beta$), mit

$$P_\alpha P_\beta = 0 \text{ für } \mu_\alpha \neq \mu_\beta, \quad \sum_{\alpha \in A} = I.$$

Dann ist

$$E(t) := \sum_{\{\alpha\in A:\mu_\alpha\le t\}} P_\alpha$$

eine Spektralschar in X, $E(t)$ ist die orthogonale Projektion auf die abgeschlossene lineare Hülle der Räume $R(P_\alpha)$ mit $\alpha \le t$. □

Beispiel 11.2 In $L^2(\mathbb{R},\varrho)$ bzw. $\bigoplus_{\alpha\in A} L^2(\mathbb{R},\varrho_\alpha)$ ist durch

$$E(t)f = \chi_{(-\infty,t]}f \quad \text{bzw. } E(t)(f_\alpha)_{\alpha\in A} = \left(\chi_{(-\infty,t]}f_\alpha\right)_{\alpha\in A}$$

eine Spektralschar definiert. □

Beispiel 11.3 Ist (X,μ) ein Maßraum, $g : X \to \mathbb{R}$ μ–meßbar, so wird durch

$$E(t)f = \chi_{\{x\in X:g(x)\le t\}}f$$

eine Spektralschar definiert. □

Wir zeigen zunächst, wie für möglichst viele Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit Hilfe einer Spektralschar E ein Operator „$\int u(t)dE(t)$“ erklärt werden kann. Der Spektralsatz wird dann zeigen, daß es zu jedem selbstadjungierten Operator A genau eine Spektralschar E gibt mit $A = \int \mathrm{id}(t)\,\mathrm{d}E(t) = tdE(t)$.

Sei E eine Spektralschar im Hilbrtraum X. Für jedes $x \in X$ sei

$$\varrho_x = \varrho_x^E = \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varrho_x(t) := \|E(t)x\|^2 = \langle x, E(t)x\rangle.$$

Offenbar ist ϱ_x wachsend (genauer nichtfallend) und rechtsstetig mit

$$\varrho_x(t) \to \begin{cases} 0 & \text{für } t \to -\infty, \\ \|x\|^2 & \text{für } t \to \infty. \end{cases}$$

ϱ_x erzeugt also in kanonischer Weise ein (Lebesgue–Stieltjes–)Maß auf $\mathbb{R}$, das wir ebenfalls mit ϱ_x bezeichnen.

Eine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ nennen wir *E–meßbar*, wenn sie ϱ_x–meßbar ist für jedes $x \in X$. Insbesondere ist jede Borel–meßbare Funktion E–meßbar bezüglich jeder Spektralschar E, also insbesondere jede stetige oder stückweise stetige Funktion, und jede Funktion, die punktweise Limes von Treppenfunktionen ist.

Definieren wir zunächst *das Integral bezüglich einer Spektralschar* E für eine Treppenfunktion

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad u(t) = \sum_j c_j \chi_{I_j}(t) \quad (\text{o. E. } I_j \text{ disjunkt}),$$
$$\int_{\mathbb{R}} u(t)\,\mathrm{d}E(t) = \int u(t)\,\mathrm{d}E(t) := \sum_j c_j E(I_j)$$

mit $E((a,b]) := E(b) - E(a)$, $E(\{a\}) := E(a) - E(a-)$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$\begin{aligned}\Big\| \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x \Big\|^2 &= \sum |c_j|^2 \|E(I_j)x\|^2 = \sum |c_j|^2 \varrho_x(I_j) \\ &= \int |u(t)|^2\,\mathrm{d}\varrho_x(t) = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)} \leq \|x\|^2 \max |u|^2.\end{aligned}$$

Also ist $\int a(t)\,\mathrm{d}E(t) \in B(X)$ mit $\| \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)\| \leq \max |u|$.

Sei nun $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ beliebig E–meßbar. Zu jedem $x \in X$ mit $u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ existiert eine Folge (u_n) von Treppenfunktionen mit $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$; insbesondere ist (u_n) eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$. Also gilt

$$\begin{aligned}\Big\| \int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t) - \int u_m(t)\,\mathrm{d}E(t)x \Big\|^2 &= \Big\| \int \Big(u_n(t) - u_m(t)\Big)\,\mathrm{d}E(t)x \Big\|^2 \\ = \int \Big|u_n(t) - u_m(t)\Big|^2\,\mathrm{d}\varrho_x &= \|u_n - u_m\|_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)} \to 0 \quad \text{für } n,m \to \infty,\end{aligned}$$

d. h. auch $\Big(\int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x \Big)$ ist eine Cauchyfolge in X. Man kann also definieren

$$\int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x := \lim_{n\to\infty} \int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x$$

und erkennt, daß diese Definition nicht von der Wahl der Folge (u_n) abhängt. Es gilt

$$\begin{aligned}\Big\| \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x \Big\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \Big\| \int u_n(t)\,\mathrm{d}E(t)x \Big\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)} \\ &= \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)}.\end{aligned}$$

Dieses Integral ist linear in u im folgenden Sinn: Für $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_x)$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int \Big(au(t) + bv(t)\Big)\,\mathrm{d}E(t)x = a\int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x + b\int v(t)\,\mathrm{d}E(t)x.$$

Wichtig ist aber auch die Linearität dieses Integrals in x; sie ist Bestandteil des folgenden Satzes.

Zur Formulierung und zum Beweis des Satzes benötigen wir zwei einfache Funktionenfolgen:

$$\varphi_n, \chi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \varphi_n(z) := \begin{cases} z & \text{für } |z| \le n, \\ 0 & \text{für } |z| > n, \end{cases} \quad \chi_n(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } |z| \le n, \\ 0 & \text{für } |z| > n. \end{cases}$$

Satz 11.4 *Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum X, $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ E–meßbar und u_E definiert durch*

$$\begin{aligned} D(u_E) &:= \Big\{x \in X : u \in L^2(\mathbb{R}, \varrho_2)\Big\}, \\ u_E x &:= \int u(t)\,\mathrm{d}E(t)x \ \textit{für } x \in D(u_E). \end{aligned}$$

Dann ist u_E ein normaler (linearer) Operator in X; wir schreiben formal dafür $\int u(t)\,\mathrm{d}E(t)$. Ist u reellwertig, so ist u_E selbstadjungiert.

Für beliebige E–meßbare Funktionen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt:

a) *Für $x \in D(u_E)$ und $y \in D(v_E)$ gilt*

$$\begin{aligned} \langle v_E y, u_E x\rangle &= \lim_n \int \overline{\varphi_n(v(t))}\,\varphi_n(u(t))\,\mathrm{d}_t\langle y, E(t)x\rangle \\ &=: \int \overline{v(t)}u(t)\,\mathrm{d}\varrho_{y,x}(t) \end{aligned}$$

mit $\varrho_{y,x}(t) = \langle y, E(t)x\rangle$; $\varrho_{y,x}$ läßt sich nach der Polarisierungsidentität als Linearkombination von 4 positiven Maßen schreiben: $\varrho_{y,x} = \varrho_p y + x - \varrho_{y-x} + i\varrho_{y-ix} - i\varrho_{y+ix}$.

b) *Für $x \in D(u_E)$ gilt*

$$\|u_E x\|^2 = \int |u(t)|^2\,\mathrm{d}\varrho_x(t) = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\varrho_x)}.$$

c) *Ist u beschränkt, so ist $u_E \in B(X)$ mit $\|u_E\| \leq \sup\Big\{|u(t)| : t \in \mathbb{R}\Big\}$.*

d) *Ist $u(t) \equiv 1$, so gilt $u_E = 1_E = I$.*

e) *Für $x \in D(u_E)$ und alle $y \in X$ gilt $\langle y, u_E x\rangle = \int u(t)\, \mathrm{d}\varrho_{yx}(t)$.*

f) *Ist $u(t) \geq c$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist $u_E \geq cI$ (u_E ist halbbeschränkt nach unten mit unterer Schranke c).*

g) *Es gilt $u_E + v_E \subset (u+v)_E$ und $D(u_E + v_E) = D((|u| + |v|)_E)$.*

h) *Es gilt $u_E v_E \subset (uv)_E$ und $D(u_E v_E) = D(v_E) \cap D((uv)_E)$.*

i) *$D(u_E)$ ist dicht, $D(u_E) = D(\overline{u}_E)$, $u_E^* = \overline{u}_E$.*

j) *Ist $S \subset \mathbb{R}$ so, daß $u = \chi_S$ E–meßbar ist, so ist $u_E = (\chi_S)_E$ eine orthogonale Projektion; man schreibt dafür auch $E(S)$ (wegen $(\chi_{(a,b]})_E = E(b) - E(a) =: E((a,b])$ erscheint diese Bezeichnung gerechtfertigt).*

Im *Beweis* zeigt man zunächst, daß u_E tatsächlich ein linearer Operator ist. Alle anderen Eigenschaften, die Dichtheit des Definitionsbereichs, die Normalität und die Selbstadjungiertheit für reelles u ergeben sich aus den Eigenschaften a bis j.

Satz 11.5 (Spektralsatz von J. v. Neumann) *Zu jedem selbstadjungierten Operator T im Hilbertraum X existiert genau eine Spektralschar E mit $\mathrm{id}_E = T$. Im komplexen Hilbertraum gilt die* Stonesche Formel

$$\Big\langle y, E(t)x\Big\rangle = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} \Big\langle y, \Big((T - s - i\varepsilon)^{-1} - (T - s + i\varepsilon)^{-1} x\Big)\Big\rangle \,\mathrm{d}s$$

für alle $x, y \in X$, $t \in \mathbb{R}$.

Der komplexe Fall wird durch „Komplexifizierung“ auf den reellen Fall zurückgeführt.

Zur Eindeutigkeit*: Ist $T = \int + \,\mathrm{d}E(t)$, so folgt mit obigem Kalkül für $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ und alle $x, y \in X$*

$$f(z) := \Big\langle y, (T - z)^{-1} x\Big\rangle = \int \frac{1}{t - z}\, \mathrm{d}_t \langle y, E(t)x\rangle.$$

Nach dem folgenden Satz ist $\langle y, E(\cdot)x\rangle$ (und somit $E(\cdot)$) eindeutig bestimmt und liefert die Stonesche Formel (vgl. folgenden Satz):

$$\begin{aligned}
\langle y, E(t)x\rangle &= \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{t+\delta}\Big(f(s+i\varepsilon)-f(s-i\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}s \\
&= \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{t+\delta}\Big\langle y, ((T-s-i\varepsilon)^{-1}-(T-s+i\varepsilon)^{-1}x\Big\rangle\,\mathrm{d}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Das ist die Stonesche Formel, und damit ist die Eindeutigkeit von $E(\cdot)$ bewiesen.

Satz 11.6 (Stieltjes–Umkehrformel) *Sei $w:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ von beschränkter Variation [2], rechtsstetig mit $w(t)\to 0$ für $t\to-\infty$. Außerdem sei*

$$\begin{aligned}
f:\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\to\mathbb{C},\quad f(z) &:= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}w(t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}w_1 - \int\ldots\,\mathrm{d}w_2 + i\int\ldots\,\mathrm{d}w_3 - i\int\ldots\,\mathrm{d}w_4.
\end{aligned}$$

a) *Für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt*

$$w(t) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{t+\delta}\Big(f(s+i\varepsilon)-f(s-i\varepsilon)\Big)\,\mathrm{d}s.$$

Insbesondere ist w durch f eindeutig bestimmt.

b) *Ist w reellwertig, so gilt für alle $t\in\mathbb{R}$*

$$w(t) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t+\delta}\operatorname{Im} f(s+i\varepsilon)\,\mathrm{d}s.$$

[2] Eine Funktion $w:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt von *beschränkter Variation*, wenn sie sich in der Form $w = w_1 - w_2 + iw_3 - iw_4$ schreiben läßt mit 4 beschränkten nichtfallenden Funktionen $w_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Zum *Beweis* genügt es, Teil b zu zeigen. Dieser ergibt sich durch Ausrechnen der rechten Seite, in die f gemäß Definition eingesetzt wird, und durch Verwenden des Satzes von Fubini und des Satzes von Lebesgue.

Zur *Existenz einer Spektralschar*: Wenn es eine solche Spektralschar gibt, dann ist sie nach dem bereits Bewiesenen durch die Stonesche Formel gegeben. Wir zeigen im folgenden, daß die Stonesche Formel tatsächlich eine Spektralschar definiert.

Für jedes $x \in X$ ist

$$f_x : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad f_y(z) := \langle x, (T-z)^{-1}x \rangle$$

eine *Herglotz–Funktion*, d. h.

- f_x ist holomorph in $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to B(X)$, $z \mapsto (T-z)^{-1}$ analytisch ist),
- $\operatorname{Im} f_x(z) \geq 0$ für $z \in \mathbb{C}_+$, denn

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_x(z) &= \operatorname{Im} \left\langle x, (T-z)^{-1}x \right\rangle = \operatorname{Im} \left\langle (T-z)(T-z)^{-1}x, (T-z)^{-1}x \right\rangle \\ &= (\operatorname{Im} z)\, \|(T-z)^{-1}x\|^2 > 0. \end{aligned}$$

- $|f_x(z) \operatorname{Im} z| \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}_+$, da

$$|f_x(z) \operatorname{Im} z| \leq \left| \frac{1}{\operatorname{Im} z} \right| \|x\|^2 |\operatorname{Im} z| = \|x\|^2 =: M.$$

Also kann der folgende Satz angewandt werden:

Satz 11.7 (G. Herglotz) *Sei $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ holomorph und $M \geq 0$ mit*

$$\operatorname{Im} f(z) \geq 0 \quad \text{und } |f(z) \operatorname{Im} z| \leq M \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}_+.$$

Dann gibt es genau eine rechtsstetige nicht–fallende Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $w(t) \to 0$ für $t \to -\infty$, $w(t) \leq M$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z} \, \mathrm{d}w(t) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}_+.$$

Nach der Stieltjes–Umkehrformel ist w gegeben durch

$$w(t) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} \operatorname{Im} f(s + i\varepsilon) \, \mathrm{d}s.$$

Mit diesem Satz folgt

$$\langle x, (T-z)^{-1}x\rangle = f_x(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}w_x(t)$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit der rechtsstetigen nicht–fallenden Funktion

$$w_x(t) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{t+\delta} \Big\langle \Big((T-s-i\varepsilon)^{-1} - (T-s+i_\varepsilon)^{-1}\Big)x\Big\rangle\,\mathrm{d}s,$$

für die außerdem gilt: $w_x(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ und $w_x(t) \leq \|x\|^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Polarisierungsidentität liefert

$$\langle y, (T-z)^{-1}x\rangle = f_{y,x}(z) := \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}w_{y,x}(t) \quad \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$$

mit

$$w_{y,x}(t) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{t+\delta} \Big\langle y, \Big((T-s-i\varepsilon)^{-1} - (T-s+i\varepsilon)^{-1}\Big)x\Big\rangle\,\mathrm{d}s.$$

Die Abbildung $X \times X \to \mathbb{C}$, $(y,x) \mapsto w_{y,x}(t)$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Sesquilinearform; diese ist

- hermitesch und nichtnegativ, $w_{x,x}(t) = w_x(t) \geq 0$,
- beschränkt, $|w_{y,x}(t)|^2 \leq w_y(t)w_x(t) \leq \|y\|^2\,\|x\|^2$.

Also gibt es für jedes $t \in \mathbb{R}$ genau einen beschränkten selbstadjungierten Operator $E(t) \in B(X)$ mit

$$\langle y, E(t)x\rangle = w_{y,x}(t) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Mit einiger Rechnung zeigt man, daß $t \mapsto E(t)$ eine Spektralschar ist, für die auf Grund der obigen Formeln gilt

$$\langle y, (T-z)^{-1}x\rangle = \int \frac{1}{t-z}\,\mathrm{d}_t\langle y, E(t)x\rangle \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

Der früher entwickelte Kalkül liefert dann $T = \int t \, \mathrm{d}E(t) = \mathrm{id}_E$. Damit ist der Spektralsatz (bis auf die absichtlich verbliebenen Lücken) bewiesen.

Leicht lassen sich mit Hilfe der Stoneschen Formel in den beiden folgenden Beispielen die Spektralscharen berechnen:

Beispiel 11.8 Sei T ein selbstadjungierter Operator mit reinem Punktspektrum: $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in A)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte, P_α die orthogonalen Projektionen auf die zugehörigen Eigenräume (also $P_\alpha P_\beta = 0$ für $\alpha \neq \beta$, $\sum\limits_\alpha P_\alpha = I$):

$$D(T) = \Big\{ x \in X : \sum |\mu_\alpha|^2 \, \|P_\alpha x\|^2 < \infty \Big\}, \quad Tx = \sum \mu_\alpha P_\alpha x.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
(T-z)^{-1}x &= \sum \frac{1}{\mu_\alpha - z} P_\alpha x \quad \text{für } z \in \varrho(T) = \mathbb{C} \setminus \overline{\{\alpha_\alpha : \alpha \in A\}}, \\
\langle y, E(t)x \rangle &= \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{t+\delta} \left(\frac{1}{\mu_\alpha - s - i\varepsilon} - \frac{1}{\mu_\alpha - s + i\varepsilon} \right) \langle y, P_\alpha x \rangle \, \mathrm{d}s \\
&= \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{t+\delta} \sum \frac{2i\varepsilon}{(s-\mu_\alpha)^2 + \varepsilon^2} \langle y, P_\alpha x \rangle \, \mathrm{d}s \\
&= \lim_{\delta \to 0+} \sum \Big\{ \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t + \delta - \mu_\alpha}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \Big\} \langle y, P_\alpha x \rangle \\
&= \sum_{\{\alpha : \mu_\alpha \leq t\}} \langle y, P_\alpha x \rangle.
\end{aligned}$$

Das ist die bereits im Beispiel 11.1 betrachtete Spektralschar. □

Beispiel 11.9 Sei (X, μ) ein Maßraum, $g : X \to \mathbb{R}$ eine μ–meßbare Funktion, $T = M_g$ der maximale Operator der Multiplikation mit g in $L^2(X, \mu)$,

$$D(T) = \Big\{ f \in L^2(X, \mu) : gf \in L^2(X, \mu) \Big\}, \quad Tf = gf.$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
(T-z)^{-1}f &= \frac{1}{g-z}f \quad \text{für } z \in \varrho(T), \\
\langle h, E(t)f\rangle &= \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{t+\delta}\int_X \overline{h(x)}\frac{2i\varepsilon}{(s-g(x))^2+\varepsilon^2}f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}s \\
&= \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_X \overline{h(x)}f(x)\frac{1}{\pi}\arctan\frac{s-g(x)}{\varepsilon}\Big|_{-\infty}^{t+\delta}\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_{\{x\in X: g(x)\le t\}} \overline{h(x)}f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \Big\langle h, \chi_{\{x\in X: g(x)\le t\}}f\Big\rangle .
\end{aligned}
$$

Das ist die bereits in Beispiel 11.3 betrachtete Spektralschar. □

12 Einige Folgerungen aus dem Spektralsatz

Satz 12.1 (Spektraldarstellungssatz 1) *Sei T ein selbstadjungierter Operator im separablen Hilbertraum X. Dann gibt es endlich viele oder abzählbar unendlich viele Borelmaße ϱ_n auf $\mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung*

$$U : X \to \bigoplus_n L^2(\mathbb{R}, \varrho_n)$$

so, daß $T = U^{-1}M_{\mathrm{id}}U$. Ein solches U heißt eine Spektraldarstellung *von T.*

Bemerkung 12.2 *Jeder selbstadjungierte Operator ist also unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator mit* id *in $\oplus L^2(\mathbb{R}, \varrho_n)$. Dies hat insbesondere den Vorteil, daß an den Maßen alle spektralen Eigenschaften von T abgelesen werden können. Für den Multiplikationsoperator mit* id *in $L^2(\mathbb{R}, \varrho)$ gilt offensichtlich z. B.:*

- $\lambda \in \sigma(M_{\mathrm{id}}) \Leftrightarrow \varrho((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) \neq 0$ *für jedes* $\varepsilon > 0$,
- λ *ist Eigenwert von* $M_{\mathrm{id}} \Leftrightarrow \varrho(\{\lambda\}) \neq 0$.

Satz 12.3 (Spektraldarstellungssatz 2) *Zu jedem selbstadjungierten Operator T im separablen Hilbertraum X gibt es einen σ–endlichen Maßraum (M, μ), eine μ–meßbare Funktion $g : M \to \mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung $V : X \to L^2(M; \mu)$ mit $T = V^{-1} M_g V$.*

Die einfachste Möglichkeit, diese Spektraldarstellung aus der ersten zu gewinnen ist die, für (M, μ) die disjunkte Vereinigung der Maßräume $(\mathbb{R}, \varrho_n)$ zu wählen.

Beispiel 12.4 Hier soll eine Spektraldarstellung des selbstadjungierten Operators $T = -i\dfrac{d}{dx}$ in $L^2(\mathbb{R})$ (Definitionsbereich weiter unten) konstruiert werden; dies liefert einen ungewöhnlichen Zugang zur (zunächst eindimensionalen) ***Fouriertransformation***.

Im folgenden sei $\tau f = -if'$. Aus Beispiel 10.6 wissen wir, daß T_0 mit

$$D(T_0) = C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad T_0 f = \tau f$$

wesentlich selbstadjungiert ist. Also ist $T = \overline{T_0} = T_0^* = T^*$ selbstadjungiert. Es gilt

$$\begin{aligned} D(T) &= W_1^2(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : f \ \text{ absolut stetig, } f' \in L^2(\mathbb{R}) \Big\}, \\ Tf &= \tau f \ \text{ für } f \in D(T). \end{aligned}$$

Zum Beweis beachte man, daß dieser Operator offenbar abgeschlossen ist mit $T_0 \subset T$, also $\overline{T_0} \subset T$. Außerdem gilt $T \subset \overline{T_0}$, da zu jedem $f \in W_1^2(\mathbb{R})$ eine Folge (f_n) aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ existiert mit $f_n \to f$ und $f_n' \to f'$ (erst „glatt abschneiden“ und dann glätten).

Die Resolvente ist gegeben durch

$$(T - z)^{-1} g(x) = (R_z g)(x) := e^{izx} \int_{-\infty}^{x} e^{-izy} g(y)\, \mathrm{d}y \ \text{ für } \operatorname{Im} z > 0.$$

Dies zeigt man so: Durch Nachrechnen sieht man, daß $(\tau - z) R_z g = g$ gilt. Für $g \in L^2(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger ist $R_z g(x) = 0$ nahe $-\infty$ und fällt exponentiell für $x \to \infty$, liegt also in $L^2(\mathbb{R}^m)$. Damit gilt

$$R_z g = (T - z)^{-1} g \ \text{ für } g \in L_0^2(\mathbb{R}).$$

Ist g beliebig aus $L^2(\mathbb{R})$ und (g_n) eine Folge aus$L_0^2(\mathbb{R})$ mit $g_n \to g$, so gilt

- $R_z g(T-z)^{-1} g_n \to (T-z)^{-1} g$ in $L^2(\mathbb{R})$ wegen der Stetigkeit von $(T-z)^{-1}$, und
- $R_z g_n(x) \to R_z g(x)$ punktweise auf Grund der obigen Formel. Also gilt $(T-z)^{-1} g = R_z g$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R})$.

Für jedes kompakte Intervall $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ist $(T-z)^{-1}\chi_{[\alpha,\beta]}$ ein Hilbert–Schmidt–Operator, denn es ist ein Integraloperator mit dem L^2–Kern

$$k_{z,\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} e^{izx}e^{-izy} & \text{für } y \le x, y \in [\alpha,\beta], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei nun

$$V : L^2(\mathbb{R}) \to \bigoplus_j L^2(\mathbb{R}, \varrho_j), \quad f \mapsto (V_j f)_j$$

eine Spektraldarstellung von T (man beachte, daß an dieser Stelle weder die Maße ϱ_j noch die Abbildung V bzw. $V_j : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$ bekannt sind; sie ergeben sich im folgenden).

Dann ist auch

$$(M_{\text{id}} - z)^{-1} V \chi_{[\alpha,\beta]} = V(T-z)^{-1}\chi_{[\alpha,\beta]}$$

ein Hilbert–Schmidt–Operator von $L^2(\mathbb{R})$ nach $\bigoplus_j L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$. Also gibt es Funktionen $\tilde{v}_j[\alpha,\beta](\lambda, x)$, die für ϱ_j fast alle λ in $L^2(\mathbb{R})$ liegen, mit

$$\tilde{v}_j^{[\alpha,\beta]}(\lambda, x) = 0 \quad \text{für } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus [\alpha,\beta])$$

und

$$\Big((M_{\text{id}} - z)^{-1} V \chi_{[\alpha,\beta]} f\Big)(\lambda) = \Big(\int_{\mathbb{R}} \tilde{v}_j^{[\alpha,\beta]}(\lambda, x) f(x)\,\mathrm{d}x\Big)_j.$$

Mit $v_j^{[\alpha,\beta]}(\lambda, x) = (\lambda - z)\overline{v}_j^{[\alpha,\beta]}(\lambda, x)$ gilt also

$$\Big(V \chi_{[\alpha,\beta]} f\Big)(\lambda) = \Big(\int_{\mathbb{R}} v_j^{[\alpha,\beta]}(\lambda, x) f(x)\,\mathrm{d}x\Big)_j.$$

Für $[\alpha,\beta] \subset [\alpha',\beta']$ und alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $f(x) = 0$ in $\mathbb{R} \setminus [\alpha,\beta]$ gilt natürlich $V\chi_{[\alpha,\beta]} f = V\chi_{[\alpha',\beta']} f$, also

$$v_j^{[\alpha,\beta]}(\lambda, x) = v_j^{[\alpha',\beta']}(\lambda, x) \quad \text{f. ü. in } \mathbb{R} \times [\alpha,\beta].$$

Deshalb gibt es Funktionen $v_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $v_j(\lambda, x) = v_j^{[\alpha,\beta]}(\lambda, x)$ f. ü. in $\mathbb{R} \times [\alpha, \beta]$ für alle $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ und

$$(V_j f)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} v_j(\lambda, x) f(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{für } f \in L_0^2(\mathbb{R}).$$

Für beliebige $f \in L^2(\mathbb{R})$ ergibt sich daraus

$$(V_j f)(\lambda) = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} v_j(\lambda, x) f(x) \,\mathrm{d}x$$

(wobei l.i.m. im Sinne von $L^2(\mathbb{R}, \varrho_j)$ zu verstehen ist).

Was kann man über die Funktionen $v_j(\cdot, \cdot)$ sagen?

Für beliebiges $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ sei $A_{\alpha,\beta,0}$ der „minimale“ durch τ in $L^2(\alpha, \beta)$ erzeugte Operator,

$$\begin{aligned} D(A_{\alpha,\beta,0}) &= \Big\{ f \in L^2(\alpha, \beta) : f \text{ absolut stetig}, f' \in L^2(\alpha, \beta), f(\alpha) = f(\beta) = 0 \Big\} \\ A_{\alpha,\beta,0} f &= -if' \quad \text{für } f \in D(A_{\alpha,\beta,0}). \end{aligned}$$

Wir wissen (Satz 8.12), daß $(A_{\alpha,\beta,0})^* = A_{\alpha,\beta}$ der maximale durch τ in $L^2(\alpha, \beta)$ erzeugte Operator ist, d. h.

$$\begin{aligned} D(A_{\alpha,\beta}) &= \Big\{ f \in L^2(\alpha, \beta) : f \ \text{ absolut stetig}, f' \in L^2(\alpha, \beta) \Big\}, \\ A_{\alpha,\beta} f &= -if' \quad \text{für } f \in D(A_{\alpha,\beta}). \end{aligned}$$

Für jedes $f \in D(A_{\alpha,\beta,0})$ gilt also

$$\begin{aligned} \Big\langle \overline{v_j(\lambda, \cdot)}\Big|_{[\alpha,\beta]}, A_{\alpha,\beta,0} f \Big\rangle &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} v_j(\lambda, x) \tau f(x) \,\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} v_j(\lambda, x) (Tf)(x) \,\mathrm{d}x \\ &= (V_j T f)(\lambda) = \lambda (V_j f)(\lambda) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda v_j(\lambda, x) f(x) \,\mathrm{d}x \\ &= \Big\langle \overline{\lambda v_j(\lambda, \cdot)}\Big|_{[\alpha,\beta]}, f \Big\rangle. \end{aligned}$$

Also ist $\overline{v_j(\lambda,\cdot)}\Big|_{[\alpha,\beta]} \in D\Big((A_{\alpha,\beta,0})^*\Big) = D(A_{\alpha,\beta})$ und $A_{\alpha,\beta}\overline{v_j(\lambda,\cdot)} = \lambda\overline{v_j(\lambda,\cdot)}$, bzw.

$$-i\frac{d}{dx}\overline{v_j(\lambda,x)} = \lambda\overline{v_j(\lambda,x)}, \quad i\frac{d}{dx}v_j(\lambda,x) = \lambda v_j(\lambda,x).$$

Daraus folgt

$$v_j(\lambda,x) = e^{-i\lambda x}$$

(zunächst eigentlich nur $v_j(\lambda,x) = c_j(\lambda)e^{-i\lambda x}$; die Funktion $|c_j(\cdot)|$ kann aber in das Maß ϱ_j eingebaut werden, die Phase $\arg c_j(\cdot)$ spielt ohnehin keine Rolle für die Spektraldarstellung).

Wieviele Komponenten sind für die Spektraldarstellung von T wirklich nötig?[3] Da $V : L^2(\mathbb{R}) \to \oplus_j L^2(\mathbb{R},\varrho_j)$ unitär ist (also insbesondere bijektiv), ist jeder Teilraum

$$\widetilde{H}_k = \Big\{(g_j)_j : g_j = 0 \quad \text{für } j \neq k\Big\}$$

von $\oplus_j L^2(\mathbb{R},\varrho_j)$ in $R(V)$ enthalten. Sei

$$H_k := V^{-1}\widetilde{H}_k.$$

Für jedes $f \in H_k$ ist $V_j f = 0$ ϱ_j–f. ü. $j \neq k$. Auf Grund der obigen Darstellung aller V_j ist dann aber auch

$$(V_k f)(\lambda) = 0 \quad \varrho_j - \text{f. ü. für alle } j \neq k,$$

d. h. jedes $f \in \widetilde{H}_k$ verschwindet ϱ_j–f. ü. für $j \neq k$. Die Maße ϱ_j werden also von disjunkten Mengen getragen. Definiert man für jede Borelmenge A

$$\varrho(A) = \sum_j \varrho_j(A),$$

so wird also

$$\widetilde{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R},\varrho), \quad (\widetilde{F})(\lambda) = \operatorname*{l.i.m.}_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Spektraldarstellung von T (wobei hier der l.i.m. im Sinne von $L^2(\mathbb{R},\varrho)$ zu verstehen ist).

[3] Mit dem Konzept der geordneten Spektraldarstellung sieht man sofort, daß die $v_j(\lambda_j,\cdot)$ linear unabhängig sind, es kann also nur eine Komponente sein.

Nun bleibt noch das Maß ϱ explizit zu bestimmen:

Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $f_a(x) = e^{iax}f(x)$ gilt offenbar $\|f\| = \|\widetilde{F}f\| = \|f_a\| = \|\widetilde{F}f_a\|$ und

$$(\widetilde{F}f_a)(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-n}^{n} e^{-i(\lambda-a)x} f(x)\,\mathrm{d}x = (\widetilde{F}f)(\lambda - a).$$

Insgesamt folgt, daß das Maß ϱ translationsinvariant ist, also ein Vielfaches des Lebesgue–Maßes, $\varrho = c\varrho_L$.

Es bleibt die Konstante c zu bestimmen. Diese findet man, indem man F auf eine spezielle Funktion anwendet, z. B. $\varphi(x) = \exp(-x^2/2)$. Für diese Funktion zeigen wir $\widetilde{F}\varphi = \sqrt{2\pi}\varphi$. Die Unitarität von F liefert dann $c = 1/2\pi$, und somit ist

$$F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (Ff)(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-i\lambda x} f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Spektraldarstellung von T; F wird als (eindimensionale) *Fouriertransformation* bezeichnet.

Die noch fehlende Identität $\widetilde{F}\varphi = \sqrt{2\pi}\varphi$ folgt aus

$$\varphi'(x) + x\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = 1$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda(\widetilde{F}\varphi)(\lambda)\lambda &= \int e^{-i\lambda x}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = i\int \Big(\frac{d}{dx}e^{-i\lambda x}\Big)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -i\int e^{-i\lambda x}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -i(\widetilde{F}\varphi')(\lambda) = i\widetilde{F}(x\varphi)(\lambda) \\
&= i\int e^{-i\lambda x} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -(\widetilde{F}\varphi)'(\lambda), \\
(\widetilde{F}\varphi)(0) &= \int \exp(-x^2/2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.
\end{aligned}$$

φ und $\widetilde{F}\varphi$ erfüllen also die gleiche lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangswerten 1 bzw. $\sqrt{2\pi}$, also gilt $\widetilde{F}\varphi = \sqrt{2\pi}\varphi$. $\square$

Als nächstes betrachten wir **Funktionen eines selbstadjungierten Operators**. Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum X, E seine Spektralschar (im Sinne von Satz11.5), u eine E–meßbare Funktion. Wir definieren

$$u(T) := u_E = \int_{\mathbb{R}} t dE(t).$$

Diese Definition erscheint vernünftig, weil aus dem Funktionalkalkül u. a. folgt:

- für $u(t) = t$, $u = \mathrm{id}$ gilt $u_E = \mathrm{id}_E = T$,
- für $u(t) = t^2$, $u = \mathrm{id} \cdot \mathrm{id}$ gilt $u_E = \mathrm{id}_E \, \mathrm{id}_E = TT = T^2$,
- für $u(t) = 1$ gilt $u_E = 1_E = I$,
- für $u(t) = \sqrt{t}$ (für $t \geq 0$) und $T \geq 0$ wird sich zeigen: $u_E u_E = R$, d. h. $u_E = T^{1/2}$.

Weiter betrachten wir die Funktionenschar $u_s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $u_s(t) = e^{-ist}$ für $s \in \mathbb{R}$. Da die Funktionen u_s beschränkt sind, macht der Funktionalkalkül keinerlei Probleme. Wegen $u_{s_1}(t)u_{s_2}(t) = u_{s_1+s_2}(t)$ gilt offenbar

$$\begin{aligned} u_{s_1}(T)u_{s_2}(T) &= (u_{s_1})_E(u_{s_2})_E = (u_{s_1}u_{s_2})_E \\ &= (u_{s_1+s_2})_E = u_{s_1+s_2}(T). \end{aligned}$$

Es liegt deshalb nahe, die formale Schreibweise

$$u_s(T) = e^{-isT}$$

zu verwenden. Tatsächlich gilt, was mit Hilfe des Funktionalkalküls leicht zu beweisen ist:

Satz 12.5 *$\{u_s(t) : s \in \mathbb{R}\}$ ist eine stark stetige einparametrige Gruppe unitärer Operatoren mit infinitesimalem Generator $-iT$.*

Bemerkung 12.6 *Wie schon in Bemerkung 10.4 angemerkt, ist also für jeden selbstadjungierten Operator T das Anfangswertproblem der* Schrödingergleichung

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t), \quad \varphi(0) = 0$$

für jedes $\psi \in D(T)$ eindeutig lösbar.

Nun soll noch der Zusammenhang zwischen Spektrum und Spektralschar untersucht werden. Die Definition des *Spektrums* ist bekannt; außerdem ist offensichtlich jeder *Eigenwert* im Spektrum enthalten.

Das *wesentliche Spektrum* $\sigma_e(T)$ ist die Menge der $\lambda \in \mathbb{R}$, die Häufungspunkte des Spektrums sind oder unendlichvielfache Eigenwerte. $\sigma_e(T)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\sigma(T)$.

Das *diskrete Spektrum* $\sigma_d(T)$ ist die Menge der Eigenwerte endlicher Vielfachheit, die isolierte Punkte des Spektrums sind. Dies ist eine i. allg. nicht abgeschlossene Teilmenge von $\sigma(T)$, $\sigma_d(T) = \sigma(T) - \sigma_e(T)$.

Mit Hilfe des Spektralkalküls kann leicht der folgende Satz bewiesen werden, mit dem die Punkte des Spektrums charakterisiert werden:

Satz 12.7 *Sei T ein selbstadjungierter Operator, $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Eigenschaften (i)...(iii) bzw. (iv) sind jeweils äquivalent:*

a) (i) *λ ist Eigenwert von T.*

   (ii) *Es gibt eine* Cauchy*folge $(x_n) \in D(T)$ mit*

$$x_n \not\to 0 \quad \textit{und} \ (T - \lambda)x_n \to 0.$$

   (iii) $E(\{\lambda\}) = E(\lambda) - E(\lambda -) \neq 0$ *(d. h. λ ist Sprungstelle von E).*

b) (i) $\lambda \in \sigma(T)$,

   (ii) *Es gibt eine Folge (x_n) aus $D(T)$ mit $x_n \not\to 0$ und $(T - \lambda)x_n \to 0$,*

   (iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) \neq 0$ (d. h. λ ist Wachstumsstelle von E),*

   (iv) $(\lambda - z)^{-1} \in \sigma((T - z)^{-1}) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$ *für ein/alle $z \in \varrho(T)$.*

c) (i) $\lambda \in \sigma_e(T)$,

   (ii) *Es gibt eine Folge (x_n) aus $D(T)$ mit $x_n \not\to 0$, $x_n \xrightarrow{w} 0$ und $(T - \lambda)x_n \to 0$ (eine solche Folge heißt eine* singuläre Folge *zu T und λ,*

   (iii) *Für jedes $\varepsilon > 0$ ist* $\dim(E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon)) = \infty$.

d) (i) $\lambda \in \sigma_d(T)$,

(ii) *Es gibt eine Folge* (x_n) *aus* $D(T)$ *mit* $x_n \not\to 0$ *und* $(T-\lambda)x_n \to 0$, *und jede derartige Folge enthält eine konvergente Teilfolge,*

(iii) $E(\{\lambda\}) \neq 0$ *und endlichdimensional, und es gibt ein* $\varepsilon > 0$ *mit* $E(\lambda+\varepsilon) - E(\lambda-\varepsilon) = E(\{\lambda\})$.

e) *Ist* D *ein core (determinierender Bereich von* T*, d.h.* $\overline{T|_D} = R$*), so können die jeweiligen Folgen mit Eigenschaft (ii) aus* D *gewählt werden.*

Eine wichtige Klasse selbstadjungierter Operatoren (insbesondere in den Anwendungen) sind die halbbeschränkten Operatoren. Ein selbstadjungierter Operator T heißt *halbbeschränkt nach unten*, wenn ein $\gamma \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$\langle x, Tx\rangle \geq \gamma \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in D(T).$$

Satz 12.8 *Für einen selbstadjungierten Operator* T *mit Spektralschar* E *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) T *ist halbbeschränkt mit unterer Schranke* γ.

(ii) $E(t) = 0$ *für* $t < \gamma$,

(iii) $(-\infty, \gamma) \subset \varrho(T)$.

Für die Eigenwerte eines halbbeschränkten Operators unterhalb des wesentlichen Spektrums gilt eine Max–Min–Charakterisierung ähnlich der für kompakte Operatoren.

Satz 12.9 *Sei* T *ein nach unten halbbeschränkter selbstadjungierter Operator:*

a) $\min \sigma(T) = \inf \Big\{ \langle x, Tx\rangle : x \in D(T), \|x\| = 1 \Big\}$.

b) *Für die Zahlenfolge* (λ_n) *mit*

$$\lambda_n := \sup_{y_1,\ldots,y_{n-1} \in D(S)} \inf \Big\{ \langle x, Tx\rangle : x \in D(T), \|x\| = 1, x \perp <_1, \ldots y_{n-1} \Big\}$$

für $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

(i) (λ_n) *ist nicht-fallend,* $\lambda_n \to \lambda_\infty \leq \infty$,

(ii) *Ist* $\lambda_n < \lambda_\infty$*, so ist* λ_n *Eigenwert von* T *mit endlicher Vielfachheit,* $\lambda_n \in \sigma_d(T)$.

(iii) *Ist* $\lambda_\infty < \infty$*, so ist* $\lambda_\infty = \min \sigma_e(T)$*; ist* $\lambda_\infty = \infty$*, so ist* $\sigma_e(T) = \emptyset$.

13 Störungstheorie selbstadjungierter Operatoren

Häufig haben Operatoren, die untersucht werden sollen die Gestalt $T + V$, wobei T selbstadjungiert ist mit gut bekanntem Spektrum, während V symmetrisch und „relativ klein“ ist.

Ist auch $T+V$ selbstadjungiert? Was kann man über das Spektrum von $T+V$ sagen?

Zunächst zur *Stabilität der Selbstadjungiertheit.*

Satz 13.1 (Rellich-Kato) *Sei T selbstadjungiert, V symmetrisch und T–beschränkt mit T–Schranke < 1. Dann ist $T + V$ selbstadjungiert. (Ist T wesentlich selbstadjungiert, so ist $T + V$ wesentlich selbstadjungiert mit $\overline{T+V} = \overline{T} + \overline{V}$. Ist T selbstadjungiert und gilt $\|Vx\| \leq \|Tx\| + a\|x\|$ mit einem $a \geq 0$, so ist $T + V$ wesentlich selbstadjungiert.)*

Auch die Halbbeschränktheit ist recht stabil:

Satz 13.2 *Sei T selbstadjungiert mit unterer Schranke γ_T, V symmetrisch und T–beschränkt mit T–Schranke < 1. Dann ist auch $T + V$ halbbeschränkt nach unten.*

Gilt $\|Vx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$ für alle $x \in D(T)$ mit einem $b < 1$, so ist

$$\gamma := \gamma_T - \max\left\{\frac{a}{1-b}, a + b|\gamma_T|\right\}$$

eine *untere Schranke von $T + V$.*

Aus der Charakterisierung der Punkte des wesentlichen Spektrums durch singuläre Folgen ergibt sich sofort: Sind T_1, T_2 selbstadjungiert mit $D(T_1) = D(T_2)$, und ist $T_1 - T_2$ kompakt, so haben T_1 und T_2 die gleichen singulären Folgen; insbesondere ist also $\sigma_e(T_1) = \sigma_e(T_2)$. Tatsächlich gilt viel mehr:

Ist T ein Operator von X nach Y (zunächst Banachräume), und ist V ein Operator von X nach Z mit $D(T) \supset D(V)$. V heißt *T–kompakt*, wenn jede Folge (x_n) aus $D(T)$, für die $(\|x_n\|_T)$ beschränkt ist, eine Teilfolge (x_{n_k}) enthält, für die (Vx_{n_k}) konvergent ist, d.h. wenn $V : (D(T), \|\cdot\|_T) \to Z$ kompakt ist.

Satz 13.3 *Sei T ein abgeschlossener Operator in X mit nicht–leerer Resolventenmenge, V ein Operator von X nach Y, $z \in \varrho(T)$. Dann gilt: V ist genau dann T–kompakt, wenn $V(T-z)^{-1} : X \to Y$ kompakt ist.*

Satz 13.4 *Sei T ein abgeschlossener Operator, V sei T–kompakt. Dann ist V T–beschränkt mit T–Schranke 0.*

Satz 13.5 *Sei T selbstadjungiert, V symmetrisch und T–kompakt. Dann ist auch $T+V$ selbstadjungiert und es gilt $\sigma_e(T+V) = \sigma_e(T)$ (tatsächlich haben T und $T+V$ die gleichen singulären Folgen).*

Satz 13.6 *Sind T_1 und T_2 selbstadjungiert und ist $(T_1-z)^{-1} - (T_2-z)^{-1}$ kompakt für ein/alle $z \in \varrho(T_1) \cap \varrho(T_2)$, so gilt $\sigma(T_1) = \sigma_e(T_2)$.*

Bemerkung 13.7 *Aus der T–Kompaktheit von V folgt mit Hilfe der Resolventengleichung die Kompaktheit von $(T+V-z)^{-1} - (T-z)^{-1}$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. In diesem Sinn folgt Satz 13.5 aus Satz 13.6.*

In manchen Fällen ist die relative Kompaktheit von V eine etwas zu starke Forderung. Es ist deshalb nützlich, daß u. U. die T^2–Kompaktheit ausreicht. (Man beachte, daß aus der T–Beschränktheit und der T^p–Kompaktheit von V für ein $p > 1$ die T^q–Kompaktheit für jedes $q > 1$ folgt; i. allg. nicht für $q = 1$.)

Offensichtlich ist V genau dann T^2–kompakt, wenn $V(T-z)^{-2}$ kompakt ist.

Satz 13.8 *Sei T selbstadjungiert, V symmetrisch und T–kompakt.*

a) *Ist S eine selbstadjungierte Fortsetzung von $T+V$, so gilt $\sigma_e(T) \subset \sigma_e(S)$. (Man beachte, daß aus der Voraussetzung nicht folgt, daß V relativ beschränkt bezüglich T ist, also auch $T+V$ nicht notwendig selbstadjungiert ist.)*

b) *Ist außerdem $D(T) \subset D(V)$ (V ist also T–beschränkt), so ist jede singuläre Folge zu T und λ auch singuläre Folge zu $T+V$ und λ.*

c) *Ist $D(T) \subset D(V)$ und $T+V$ selbstadjungiert (z. B. weil V eine T–Schranke < 1 hat), so gilt $\sigma_e(T) = \sigma_e(T+V)$, T und $T+V$ haben die gleichen singulären Folgen.*

Wie kann man feststellen, ob unterhalb eines $\mu \in \mathbb{R}$ mindestens/höchstens eine gewisse Anzahl von Spektralpunkten liegen?

Satz 13.9 *Sei T ein selbstadjungierter Operator.*

a) *Existiert ein m–dimensionaler Teilraum ($m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) von $D(T)$ mit*

$$\langle x, Tx\rangle < \mu\|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in M \setminus \{0\},$$

so ist $\dim E(\mu-) \geq m$. *(Weiß man, daß unterhalb μ nur diskretes Spektrum liegt, so gibt es also mindestens m Eigenwerte [mit Vielfachheit gezählt] unterhalb μ.)*

b) *Gibt es einen m–dimensionalen ($m \in \mathbb{N}$) Teilraum M von X mit*

$$\langle x, Tx\rangle \geq \mu\|x\|^2 \quad \textit{für alle } x \in D(T) \cap M^\perp,$$

so ist T halbbeschränkt nach unten und es gilt $\dim E(\mu-) \leq m$. *(Insbesondere gibt es also höchstens m Eigenwerte [mit Vielfachheit gezählt] unterhalb μ.)*

Beweis. a) Wäre $\dim E(\mu-) < m$, so gäbe es ein $x \in M \cap R(E(\mu-))^\perp$ mit $\|x\| \neq 0$, also $\langle x, Tx\rangle \geq \mu\|x\|^2$, ein Widerspruch.
b) Wäre $\dim E(\mu-) > m$, so gäbe es ein $\sigma < \mu$ mit $\dim(E(\mu-) - E(\sigma)) > m$, also ein $x \in \Big(R(E(\mu-) - E(\sigma)) \cap M^\perp\Big) \setminus \{0\} \subset D(T)$, für das gilt

$$\langle x, Tx\rangle < \mu\|x\|^2.$$

Also gilt $\dim E(\mu-) \leq m$; daraus folgt auch die Halbbeschränktheit. ■

14 Ein–Teilchen–Schrödingeroperatoren

Bis auf mathematisch unwichtige physikalische Konstanten hat ein Ein–Teilchen–Operator (im elektromagnetischen Feld) die Form

$$\begin{aligned} S &= -\Delta + 2i\sum_{j=1}^m a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + i \operatorname{div} a(x) + |a(x)|^2 + V(x), \\ &= -\Delta + W \end{aligned}$$

wobei $V(\cdot)$ das Potential des elektrischen Feldes ist, $E(x) = -\operatorname{grad} V(x)$, $a(\cdot)$ das Vektorpotential des magnetischen Feldes, $b(x) = \operatorname{rot} a(x)$. (In der Physik wird häufig o. E. $\operatorname{div} a(x) = 0$ angenommen, *Coulomb–Eichung*; die Wahl verschiedener Vektorpotentiale mit gleicher Rotation liefert unitär äquivalente Operatoren.)

Für hinreichend glatte und schnell genug abfallende Funktionen f (z. B. aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ oder $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$) gilt offenbar (mit der Fouriertransformation F)

$$-\Delta f = F^{-1} M_{|\cdot|^2} F f, \quad M_{|\cdot|^2} f = F(-\Delta) F^{-1} f.$$

Da M_0 mit

$$D(M_0) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \quad M_0 f(x) = |x|^2 f(x)$$

wesentlich selbstadjungiert ist mit $\overline{M_0} = M_{|\cdot|^2}$, dem maximalen Multiplikationsoperator mit $|x|^2$, ist auch T_0 mit

$$D(T_0) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \quad T_0 f(x) = -\Delta f(x)$$

wesentlich selbstadjungiert, $T = \overline{T}_0$ mit

$$D(T) = F^{-1} D(M_{|\cdot|^2}), \quad T = F^{-1} M_{|\cdot|^2} F.$$

$D(M_{|\cdot|^2})$ wird auch mit $L_2^2(\mathbb{R}^m)$ bezeichnet; dabei ist für $k \in \mathbb{N}$ (ggf. auch für $k \in \mathbb{R}$)

$$L_k^2(\mathbb{R}^m) = \Big\{ f \in L^2(\mathbb{R}^m) : |\cdot|^k f \in L^2(\mathbb{R}^m) \Big\};$$

dies ist ein Hilbertraum mit der Norm

$$\|f\|_{(k)} := \Big\{ \int\limits_{\mathbb{R}^m} (1 + |x|^2)^k |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \Big\}^{1/2}.$$

Der Sobolevraum der Ordnung k ist

$$W_k^2(\mathbb{R}^m) := F^{-1} L_k^2(\mathbb{R}^m),$$

mit der Norm

$$\|f\|_k = \|Ff\|_{(k)} = \Big\| (1 + |\cdot|^2)^{k/2} F f \Big\|,$$

und es gilt $f \in W_k^2(\mathbb{R}^m)$ genau dann, wenn eine Folge (f_n) aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ existiert, für die $(D^\alpha f_n)$ für jedes $|\alpha| \leq k$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$ konvergiert und $f_n \to f$ in $L^2(\mathbb{R}^m)$ gilt. Der L^2–Limes $f_\alpha = \lim D^\alpha f_n$ ist die D^α–Ableitung (im L^2–Sinn) von f.

Satz 14.1 (Sobolevscher Einbettungssatz) *Sei* $k > \frac{m}{2}$. *Dann enthält die Äquivalenzklasse von jedem* $f \in W_k^2(\mathbb{R}^m)$ *eine stetige Funktion (die wir wieder mit* f *bezeichnen), und es existiert ein* $C = C(k, m)$ *mit*

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|_k \quad \textit{und } f(x) \to 0 \quad \textit{für } |x| \to \infty.$$

Um stets deutlich zu machen, worum es geht, bezeichnen wir im folgenden den selbstadjungierten Operator T, der in obigem Sinn durch den aufDifferentialausdruck $-\Delta$ erzeugt wird, mit $-\Delta$.

Satz 14.2 a) $\sigma(-\Delta) = [0, \infty)$, $-\Delta$ *hat keine Eigenwerte.*

b) *Für* $m \leq 3$ *gilt* $D(-\Delta) \subset C_\infty(\mathbb{R}^m)$ *(dem Raum der stetigen Funktionen mit* $f(x) \to 0$ *für* $|x| \to \infty$*).*

Mit Hilfe der Fouriertransformation kann nun auch die Resolvente von $-\Delta$ (für $m \leq 3$) und die durch $-\Delta$ erzeugte uniäre Gruppe explizit berechnet werden:

Satz 14.3 *Auf* $\mathbb{C}\backslash[0, \infty)$ *sei* $\sqrt{z}$ *so definiert, daß* $\operatorname{Im}\sqrt{z} > 0$ *gilt. Dann ist* $(-\Delta - z)^{-1}$ *für* $m \leq 3$ *ein Integraloperator mit Kern* $k_z(x - y)$, $k_z \in L^2(\mathbb{R}^m)$,

$$k_z(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|x|} & \textit{für } m = 1, \\ \dfrac{1}{4\pi|x|} e^{i\sqrt{z}|x|} & \textit{für } m = 3 \end{cases}$$

(der Fall $m = 2$ *ist komplizierter).*

Satz 14.4 *Für* $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ *und* $t \neq 0$ *gilt*

$$e^{-it(-\Delta)} f(x) = \operatorname*{l.i.m.}_{N\to\infty} \frac{1}{(4\pi it)^{1/2}} \int\limits_{|y|\leq N} \exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4it}\Big) f(y)\,\mathrm{d}y$$

(dabei ist $\operatorname{Re}(4\pi it)^{1/2} > 0$ *und* $(4\pi it)^{m/2} = ((4\pi it)^{1/2})^m$*).*

Eine wichtige Konsequenz aus dieser Formel ist

$$\int_K \left| e^{-it(-\Delta)} f(x) \right|^2 dx \to 0 \quad \text{für } f \in L^2(\mathbb{R}^m) \quad \text{und } K \subset\subset \mathbb{R}^m.$$

Das bedeutet, daß es bezüglich dem Schrödingeroperator $-\Delta$ nur *Streuzustände* gibt.

Nun soll noch gezeigt werden, daß $S = -\Delta + W$ ebenfalls selbstadjungiert ist auf $D(S) = W_2^2(\mathbb{R}^m)$, daß S halbbeschränkt nach unten ist, und (unter etwas stärkerer Voraussetzung) daß S das wesentliche Spektrum $[0, \infty)$ hat. Zunächst ein – auch in anderen Zusammenhängen – nützliches Hilfsmittel:

Lemma 14.5 *Ist $g \in L^2(\mathbb{R}^m)$ und ist $G_\alpha : f \mapsto gD^\alpha f$ relativ beschränkt bezüglich $-\Delta$ mit relativer Schranke 0, so ist G_α bereits $(-\Delta)$–kompakt.*

Zum *Beweis* zeigt man zunächst, daß G_α $(-\Delta)^p$–kompakt ist für $p > \frac{m}{4} + \frac{|\alpha|}{2}$. Zusammen mit der $(-\Delta)$–Beschränktheit mit Schranke 0 folgt daraus die Behauptung.

Satz 14.6 *Sei $m \leq 3$, $a(\cdot)$ beschränkt,* $\operatorname{div} a \in L^2_{\text{lok}}(\mathbb{R}^m)$, $V \in L^2_{\text{lok}}(\mathbb{R}^m)$.

a) *Ist $|a(x)| + |\operatorname{div} a(x)| + |V(x)|$ beschränkt für $|x| \to \infty$, so ist W $(-\Delta)$–kompakt mit relativer Schranke 0.*

b) *Gilt $|a(x)| + |\operatorname{div} a(x)| + |V(x)| \to 0$ für $|x| \to \infty$, so ist W $(-\Delta)$–kompakt.*

(In beiden Fällen ist also $T = -\Delta + W$ selbstadjungiert auf $W_2^2(\mathbb{R}^m)$, wesentlich selbstadjungiert auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ und halbbeschränkt nach unten. Im Fall b ist außerdem $\sigma_e(T) = [0, \infty)$ und unterhalb 0 gibt es höchstens isolierte Eigenwerte, die sich nur bei 0 häufen können.)

Allgemeiner gilt:

Satz 14.7 *Sei $m \leq 3$, $a(\cdot)$ beschränkt,* $\operatorname{div} a$ *und V gleichmäßig lokal L^2.*

a) *W ist $(-\Delta)$–beschränkt mit relativer Schranke 0.*

b) *gilt mit* $N_2(p) = \int_{|x-y|\le 1} |q(y)|^2 \, \mathrm{d}y$

$$|a(x)| + N_{\operatorname{div} a}(x) + N_V(x) \to 0 \quad \textit{für } |x| \to \infty,$$

so ist W $(-\Delta)$*-kompakt.*

In höheren Dimensionen ($m \ge 3$) müssen die L^2–Bedingungen durch entsprechende L^q–Bedingungen ($q > \frac{m}{2}$) ersetzt werden. Die wirklich interessanten Operatoren in höherer Dimension sind N–Teilchen–Operatoren ($m = 3N$). Dort hängen die Koeffizienten wieder nur von 3 Koordinaten ab, und es genügen die L^2–Bedingungen bezüglich dieser Koordinaten.

15 Eigenwerte von Ein–Teilchen–Operatoren

Zwei recht grobe Aussagen über die Zahl der negativen Eigenwerte von $T = -\Delta + W$ sind relativ leicht möglich.

Satz 15.1 *Die Voraussetzungen für die* $(-\Delta)$*-Beschränktheit von* W *aus dem vorangehenden Abschnitt seien erfüllt.*

a) *Für* $m \ge 3$ *sei* $V(x) \ge -\dfrac{(m-2)^2}{4|x|^2}$. *Dann ist* $-\Delta + V \ge 0$, *d.h.* $-\Delta + V$ *hat keine negativen Spektralpunkte (also insbesondere keine negativen Eigenwerte; über eventuelle positive Eigenwerte ist damit nichts ausgesagt).*

b) *Gibt es* $D > 0$, $\varepsilon \in (0,2)$ *und* $r \ge 0$ *mit*

$$V(x) \le -\frac{D}{|x|^{2-\varepsilon}} \quad \textit{für } |x| \ge r,$$

$$|x|^{2-\varepsilon}\Big\{|a(x)|^2 + |\operatorname{div} a(x)|\Big\} \to 0 \quad \textit{für } |x| \to \infty,$$

so ist $\dim R(E(0-)) = \infty$. *(Ist außerdem* W $(-\Delta)$*-kompakt, so ist* $-\Delta + W$ *halbbeschränkt nach unten,* $\sigma_e(-\Delta + W) = [0, \infty)$*, und die negativen Eigenwerte können sich nur bei 0 häufen.)*

Der Beweis des ersten Teils dieses Satzes benutzt die *Hardysche Ungleichung*:

Satz 15.2 (Hardy–Ungleichung) *Sei* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ *für* $m \geq 3$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$ *für* $m = 1$ *und* $m = 2$. *Dann gilt*

$$\int \frac{|f(x)|^2}{|x|^2}\,\mathrm{d}x \leq \begin{cases} \dfrac{4}{(m-2)^2} \displaystyle\int |\operatorname{grad} f(x)|^2\,\mathrm{d}x & \text{für } m = 1, m = 3, \\ 4 \int |\ln|x||\,|\operatorname{grad} f(x)|^2\,\mathrm{d}x & \text{für } m = 2 \end{cases}.$$

Zum *Beweis* von Teil b werden Funktionen $\varphi_n(x) := n^{-m/2}\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^m : 1 < |x| < 2\}$ benutzt. Für diese folgt auf Grund der Voraussetzungen

$$\Big\langle \varphi_n, (-\Delta + W)\varphi_n \Big\rangle < 0 \quad \text{für große } n.$$

Damit und mit Satz 13.9 folgt die Behauptung.

Abschließend noch ein einfaches Resultat über die Nichtexistenz positiver Eigenwerte von $-\Delta + V$ (d. h. die Stetigkeit des Spektrums in $[0, \infty)$).

Satz 15.3 (Virialsatz) *Sei* $T = -\Delta + V$, V *homogen vom Grad* $-\varrho$ *mit* $\varrho \in (0, 2)$ *(damit die Bedingungen für die Selbstadjungiertheit erfüllt sind, muß gelten:* $\varrho < \frac{m}{2}$ *für* $m < 3$, $\varrho < \frac{3}{2}$ *für* $m \geq 3$*). Dann gilt für jede Eigenfunktion* f *von* T *zum Eigenwert* λ

$$\Big\langle f, \{(2-\varrho)V - 2\lambda\}f \Big\rangle = 0,$$

in anderen Worten der quantenmechnaische Virialsatz [4]*:*

$$2\langle f, -\delta f\rangle =: 2E_{\mathrm{kin}} = -\varrho E_{\mathrm{pot}} := -\varrho\langle f, Vf\rangle.$$

Korollar 15.4 *Unter den Voraussetzungen des obigen Satzes hat* $-\Delta + V$ *keine Eigenwerte in* $[0, \infty)$.

Ist nämlich $(-\Delta + V)f = \lambda f$ *mit* $\lambda \geq 0$, *so gilt*

$$\begin{aligned} 0 &= \Big\langle f, \Big\{(2-\varrho)V - 2\lambda\Big\}f \Big\rangle = \Big\langle f, (2-\varrho)(V-\lambda)f \Big\rangle - \varrho\lambda\langle f, f\rangle \\ &= (2-\varrho)\langle f, \Delta f\rangle - \varrho\lambda\|f\|^2 > 0. \end{aligned}$$

[4]Der Virialsatz stammt ursprünglich aus der Mechanik (genauer der Himmelsmechanik). Dort ist $\varrho = -1$, und der Satz besagt, daß das Mittel der potentiellen Energie über eine Periode gleich dem 2–fachen des Mittels der kinetischen Energie ist.

Überraschend ist, daß dieses Resultat auch für N–Teilchenoperatoren mit Coulomb–Wechselwirkungen gilt: auch diese haben keine Eigenwerte ≤ 0, d. h. es gibt keine gebundenen Zustände mit positiver Energie. Allerdings ist für diese Operatoren das wesentliche Spektrum $[\mu, \infty)$, wobei im allgemeinen μ negativ ist; in $[\mu, \infty)$ können tatsächlich Eigenwerte enthalten sein.