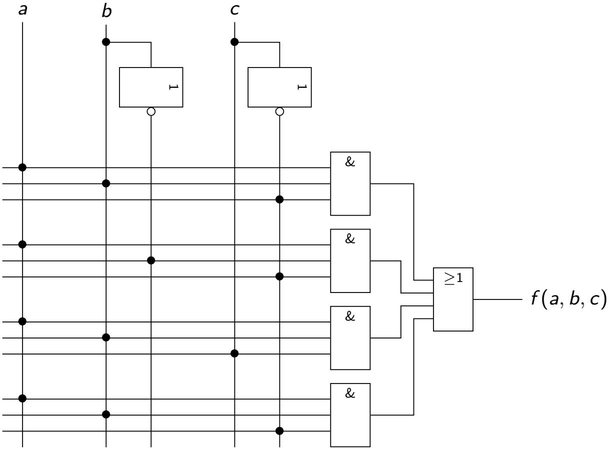
Digitaltechnik

Vorsemesterkurs
Sommersemester 2024
Ronja Düffel

04. April 2024

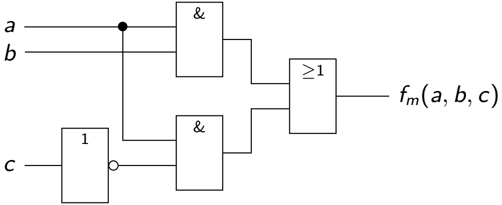
Minimierung von Schaltfunktionen

$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c})$$



Minimierung von Schaltfunktionen

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c}) \\
&= (a \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b) = f_m(a,b,c)
\end{aligned}
$$



7 Gatter für $f(a,b,c)$ vs 4 Gatter für minimierte $f_m(a,b,c)$

Minimierung, Grundlagen

- Resolutionsregeln:
  - $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a$
  - $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$

Beweis:

$$\begin{aligned}(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) &= a \wedge (b \vee \overline{b}) && \text{Distributivgesetz}\\ &= a \wedge 1 && \text{Reduktionsgesetz}\\ &= a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) &= a \vee (b \wedge \overline{b}) && \text{Distributivgesetz}\\ &= a \vee 0 && \text{Reduktionsgesetz}\\ &= a\end{aligned}$$

Merksatz: Unterscheiden sich UND- und ODER-Terme nur in der Negation einer einzigen Variablen, können sie zu einem Term verschmolzen werden, bei dem diese Variable weggelassen wird.

Beispiel

$$f(a, b, c, d) = (a\overline{b}cd) \vee (abcd) \vee (ab\overline{c}d) \vee (\overline{a}bcd) \vee (\overline{a}b\overline{c}d)$$

Minimierung mit KV-Diagrammen

$$f(a,b,c,d) = (a\bar{b}cd) \vee (abcd) \vee (ab\bar{c}d) \vee (\bar{a}bcd) \vee (\bar{a}b\bar{c}d)$$

$f(a,b,c,d)$:

			b	b
		d	d	
	0	0	1	0
c	0	0	1	0
c, a	0	1	1	0
a	0	0	1	0

Implikant und Primimplikant

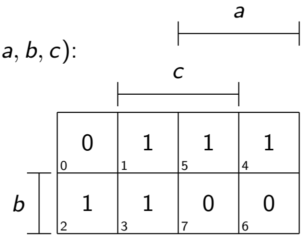
Definition (Implikant)

Ein Konjunktionsterm ($\wedge$) *m einer Bool'schen Funktion f heißt Implikant, wenn er Teil der Funktion f ist. D.h. wenn $m(a, b, \dots) = 1$, dann $f(a, b, \dots) = 1$.*

Kleinster Implikant einer Funktion f ist ein Minterm, der in der KDNF vorkommt (1-Feld im KV-Diagramm).

Ein Implikant m von f heißt Primimplikant, wenn er nicht weiter verkürzt werden kann (maximaler Block von 1-en im KV-Diagramm).

$g(a, b, c)$:



Noch ein Beispiel

$f(a, b, c, d)$

				b	b
			d	d	
		1 (0)	0 (1)	0 (5)	0 (4)
	c	0 (2)	1 (3)	0 (7)	0 (6)
a	c	0 (10)	1 (11)	1 (15)	1 (14)
a		1 (8)	1 (9)	1 (13)	1 (12)

Primimplikanten

Kernprimimplikant: Primimplikant, der eine 1 enthält, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt wird.

absolut eleminierbarer Primimplikant: Primimplikant, der komplett durch Kernprimimplikanten abgedeckt wird.

relativ eleminierbarer Primimplikant: Primimplikanten, die weder Kern- noch absolut eleminierbare Primimplinkanten sind.

Minimale DNF aus KV-Diagramm

1. Primimplikanten bestimmen
2. Minimale Überdeckung der 1-en suchen

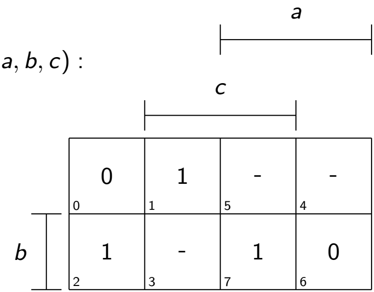
$h(a, b, c, d)$:

1 (0)	1 (1)	1 (5)	1 (4)
0 (2)	0 (3)	0 (7)	0 (6)
1 (10)	1 (11)	1 (15)	0 (14)
0 (8)	0 (9)	1 (13)	0 (12)

Unvollständig definierte Funktionen

- don’t care, gekennzeichnet durch d oder $-$
- kann, aber muss nicht abgedeckt werden

$f(a, b, c):$



Schaltungsentwurf

1. Problemanalyse und Aufstellung einer Wahrheitstabelle
2. Minimierung der Funktion
3. Implementierung der Schaltung

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

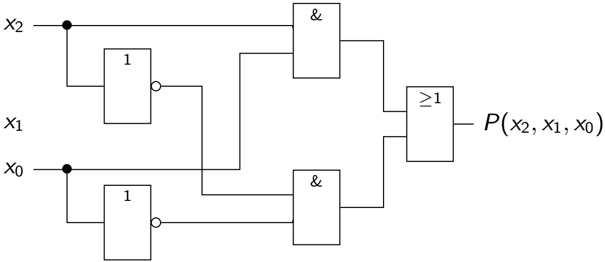
x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$P(x_2, x_1, x_0)$:

			x_2	x_2
		x_0	x_0	
	1 (0)	0 (1)	1 (5)	0 (4)
x_1	1 (2)	0 (3)	1 (7)	0 (6)

Schaltung: Palindrom

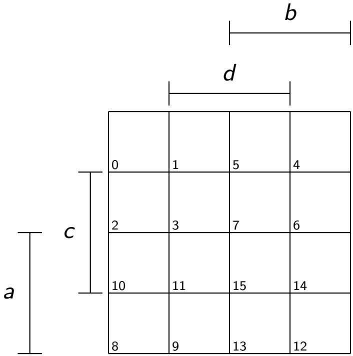
$$P(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee x_2 x_0$$



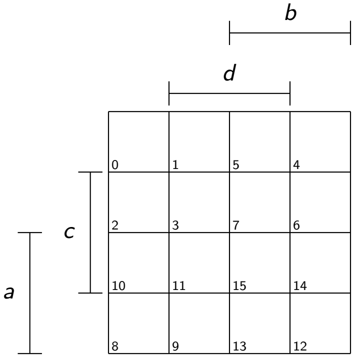
Fragen?

?

Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)



Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)



Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)