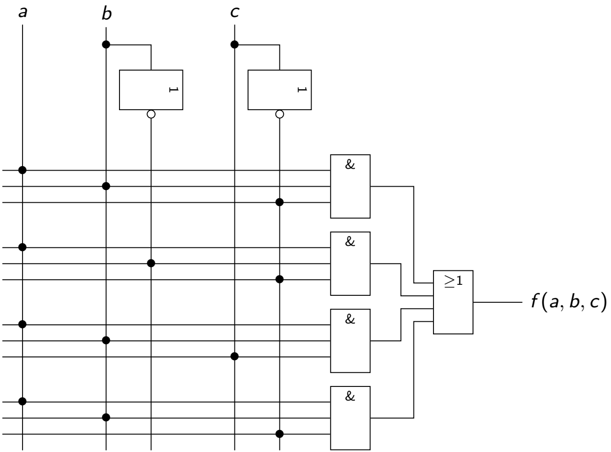
Digitaltechnik

Vorsemesterkurs
Sommersemester 2024
Ronja Düffel

04. April 2024

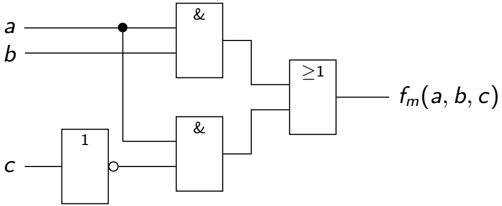
Minimierung von Schaltfunktionen

$$f(a, b, c) = (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c})$$



Minimierung von Schaltfunktionen

$$f(a,b,c) = (a \wedge b \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c})$$
$$= (a \wedge \overline{c}) \vee (a \wedge b) = f_m(a,b,c)$$



7 Gatter für $f(a,b,c)$ vs 4 Gatter für minimierte $f_m(a,b,c)$

Minimierung, Grundlagen

- Resolutionsregeln:
  - $(a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) = a$
  - $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) = a$

Beweis:

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) &= a \wedge (b \vee \overline{b}) && \text{Distributivgesetz} \\ &= a \wedge 1 && \text{Reduktionsgesetz} \\ &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) &= a \vee (b \wedge \overline{b}) && \text{Distributivgesetz} \\ &= a \vee 0 && \text{Reduktionsgesetz} \\ &= a \end{aligned}$$

Merksatz: Unterscheiden sich UND- und ODER-Terme nur in der Negation einer einzigen Variablen, können sie zu einem Term verschmolzen werden, bei dem diese Variable weggelassen wird.

Beispiel

bcd

$$f(a, b, c, d) = (a\overline{b}cd) \vee (abcd) \vee (ab\overline{c}d) \vee (\overline{a}bcd) \vee (\overline{a}b\overline{c}d)$$

acd $\quad abd$ $\quad b\overline{c}d$ $\quad \overline{a}bd$ $\quad bd$

bd

$$f(a,b,c,d)_m = bd \vee acd$$

$$g(a,b,c,d) = (a\overline{b}cd) \vee (abcd) \vee (\overline{a}b\overline{c}d)$$

acd

$$g(a,b,c,d)_m = (acd) \vee (\overline{a}b\overline{c}d)$$

Minimierung mit KV-Diagrammen

$$f(a,b,c,d) = (a\bar{b}cd) \vee (abcd) \vee (ab\bar{c}d) \vee (\bar{a}bcd) \vee (\bar{a}b\bar{c}d)$$

acd

bd

$f(a,b,c,d)$:

b

d

c

a

0	0	1	0
0	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	0

$f_m = acd \vee bd$

Implikant und Primimplikant

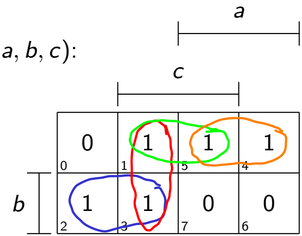
Definition (Implikant)

Ein Konjunktionsterm ($\wedge$) m einer Bool'schen Funktion f heißt Implikant, wenn er Teil der Funktion f ist. D.h. wenn $m(a, b, \dots) = 1$, dann $f(a, b, \dots) = 1$.

Kleinster Implikant einer Funktion f ist ein Minterm, der in der KDNF vorkommt (1-Feld im KV-Diagramm).

Ein Implikant m von f heißt Primimplikant, wenn er nicht weiter verkürzt werden kann (maximaler Block von 1-en im KV-Diagramm).

$g(a, b, c)$:

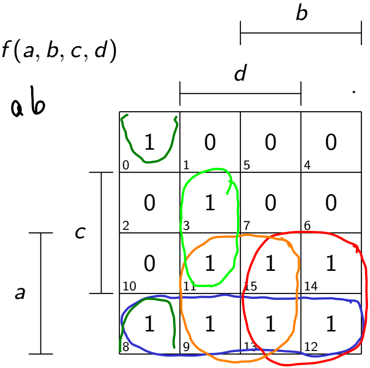


$g_m = \bar{a}b \vee a\bar{b} \vee \bar{b}c$

$\bar{a}b$
$\bar{a}c$
$\bar{b}c$
$a\bar{b}$

Noch ein Beispiel

$f_m = \bar{b}\bar{c}\bar{d} \vee \bar{b}cd \vee ab \vee ad$



$\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ – Kern
$a\bar{c}$ – rel. elem.
ab – Kern
ad – rel. elem.
$\bar{b}cd$ – Kern

Primimplikanten

Kernprimimplikant: Primimplikant, der eine 1 enthält, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt wird.

absolut eleminierbarer Primimplikant: Primimplikant, der komplett durch Kernprimimplikanten abgedeckt wird.

relativ eleminierbarer Primimplikant: Primimplikanten, die weder Kern- noch absolut eleminierbare Primimplinkanten sind.

Minimale DNF aus KV-Diagramm

1. Primimplikanten bestimmen
2. Minimale Überdeckung der 1-en suchen

$h(a, b, c, d)$:

$h_m = \bar{a}\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee abd$

			d	d, b	b
		1 (0)	1 (1)	1 (5)	1 (4)
	c	0 (2)	0 (3)	0 (7)	0 (6)
a	c	1 (10)	1 (11)	1 (15)	0 (14)
a		0 (8)	0 (9)	1 (13)	0 (12)

$\left.\begin{matrix}\bar{a}\bar{c}\bar{d} \\ \bar{a}\bar{c}d\end{matrix}\right\rangle \bar{a}\bar{c}$

$\bar{a}\bar{c}$ - kern

$a\bar{b}c$ - kern

acd - rel. elem.

abd - rel. elem.

$b\bar{c}d$ - rel. elem

Unvollständig definierte Funktionen

- don't care, gekennzeichnet durch d oder $-$
- kann, aber muss nicht abgedeckt werden

$f_m = \bar{a}b \vee c$

$\bar{a}b$
c
$a\bar{b}$

$f(a, b, c)$:

		c	c, a	a
	0 [0]	1 [1]	- [5]	- [4]
b	1 [2]	- [3]	1 [7]	0 [6]

Schaltungsentwurf

1. Problemanalyse und Aufstellung einer Wahrheitstabelle
2. Minimierung der Funktion
3. Implementierung der Schaltung

Beispiel

Ziel: Schaltung $P(x_2, x_1, x_0) = 1$ genau dann, wenn die Eingangsbelegung ein Palindrom ist.

x_2	x_1	x_0	$P(x_2, x_1, x_0)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$P(x_2, x_1, x_0)$:

		x_2	x_2	
		x_0	x_0	
	1 (0)	0 (1)	1 (5)	0 (4)
x_1	1 (2)	0 (3)	1 (7)	0 (6)

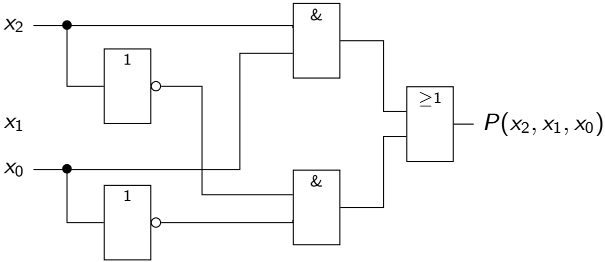
$x_0 \, x_2$

$\bar{x}_0 \, \bar{x}_2$

$P_m = x_0 x_2 \vee \bar{x}_0 \bar{x}_2$

Schaltung: Palindrom

$$P(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2}\,\overline{x_0} \vee x_2 x_0$$

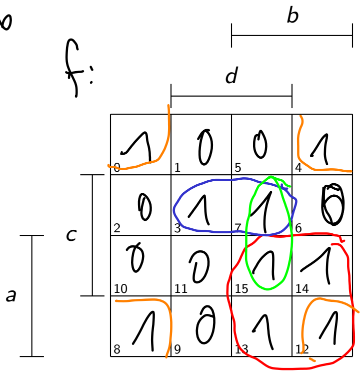


Fragen?

?

Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)

$f = \bar{c}\bar{d} \lor \bar{a}cd \lor ab$



$\bar{c}\bar{d}$ - Kern

$\bar{a}cd$ - Kern

bcd - abs. elem.

ab - Kern

Beispiel KV-Diagramm (4-stellig)

$g = (b \vee \bar{d}) \wedge \bar{c}$ (KNF) minimal

$g = b\bar{c} \vee c\bar{d}$ (DNF) minimal

g: