

## Übungsblatt 5

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  ein Element von endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass  $\mathrm{ord}(A) \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $P_n$  ein regelmäßiges  $n$ -Eck und sei  $D_n$  die Symmetriegruppe von  $P_n$ , die *Diedergruppe*. Sie  $r$  die Rotation um  $2\pi/n$  um den Mittelpunkt und sei  $s$  die Spiegelung an einer Geraden durch den Mittelpunkt und einen der Eckpunkte. Offenbar ist  $r, s \in D_n$ . Zeigen Sie:

- (a) Es gilt  $rs = sr^{-1}$ .
- (b) Die Untergruppe  $U := \langle r, s \rangle \subseteq D_n$  hat Ordnung  $2n$ .
- (c) Es gilt  $|D_n| \leq 2n$ .
- (d) Folgern Sie, dass  $U = D_n$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Entscheiden Sie für jede der folgenden Gruppen  $G$ , ob es sich bei den Untergruppen  $U$  um Normalteiler handelt.

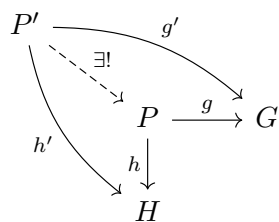
- (a)  $G = \mathbb{Z}$ ,  $U = \langle 2 \rangle$ .
- (b)  $G = D_n$  für  $n \geq 3$ ,  $U = \langle s \rangle$ .
- (c)  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ,  $U = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .
- (d)  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ,  $U = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ ist orthogonal}\}$ .

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien  $(G, \cdot)$  und  $(H, *)$  Gruppen.

Ein *Produkt* von  $G$  und  $H$  ist eine Gruppe  $P$  zusammen mit zwei Gruppenhomomorphismen  $g: P \rightarrow G$  und  $h: P \rightarrow H$ , die universell in folgendem Sinne sind: Für jede andere

Gruppe  $P'$  mit Gruppenhomomorphismen  $g': P' \rightarrow G$  und  $h': P' \rightarrow H$  gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus  $f: P' \rightarrow P$  so dass  $g \circ f = g'$  und  $h \circ f = h'$  gilt.



Zeigen Sie:

- (a) Sind  $P_1$  und  $P_2$  zwei Produkte von  $G$  und  $H$  mit Gruppenhomomorphismen  $g_i: P_i \rightarrow G$  und  $h_i: P_i \rightarrow H$ , so sind  $P_1$  und  $P_2$  isomorph.
- (b) Für alle Gruppen  $G$  und  $H$  existiert ein Produkt.