GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

10.-14. Oktober 2022, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H8

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in H8.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H8 und H11.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore“ (lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Material

Die Folien und das Aufgabenblatt werden täglich vor der Vorlesung online gestellt auf Institutsseite/Studium/Studienbeginn:

`https://www.uni-frankfurt.de/115778371/Studium#a_1ba4bb84-de22988d`

Außerdem auf dem Discord des Lernzentrum:

`https://discord.com/invite/7SEF3Rc`

Lernzentrum	Hier können Studierende der Mathematik die aktuellen Übungsaufgaben unter Anleitung bearbeiten, Fragen zu den Vorlesungen des Grundstudiums stellen und alleine oder in Gruppen lernen.
Wo	Robert-Mayer-Str. 10, Raum 405.
Wann	Mo-Fr Nachmittag.

Ziel der Vorlesung

1. Eine langsame Annäherung an die Mathematik wie sie an der Universität gelehrt wird.
2. Kennenlernen bestimmter Grundbegriffe für die spätere Vorlesung: Beweisverfahren, Logik, Mengen, Abbildungen, komplexe Zahlen.
3. Motivation für das Studium sammeln durch das Kennenlernen von netten Anwendungen, ungelösten Problemen und Ausblicken auf spätere Vorlesungen: Fehlererkennung bei ISBN, Euklidische Primzahlen, etc.

Leitlinien für gutes und produktives Miteinander

1. Mathematische Talent ist gleichmäßig zwischen verschiedenen Gruppen verteilt unabhängig vom geographischen, demographischen und ökonomischen Hintergrund.
2. Jeder kann in der Mathematik eine freudvolle, bedeutungsvolle und befähigende Erfahrung machen.
3. Fragen zu stellen ist ein wesentlicher Teil der Mathematik. Alle mathematischen Fragen sind erlaubt und erwünscht.

Also: Was ist Mathematik?

Video: June Huh, Preisträger der Fields-Medaille 2022.

Eine trockene Antwort:

Mathematik ist ein Gedankengebäude bestehend aus

Aussagen / Sätzen,

die aus gewissen Grundannahmen, genannt

Axiome,

logisch geschlussfolgert werden. Den Prozess des logischen Schlussfolgerns nennen wir

Beweisen.

Aussagen und Sätze

Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“, das entweder wahr oder falsch ist.

Satz 1

Sei n eine ganze Zahl, die so gewählt ist, dass eine zweite ganze Zahl k existiert, sodass $n = 2k$ gilt. ← Aussage A: Voraussetzungen

Dann existiert auch eine ganze Zahl l, sodass gilt $n^2 = 2l$. ← Aussage B: Folgerung

Der Satz hat die Form:
„Wenn Aussage A wahr ist, dann ist auch Aussage B war.“
In Zeichen: $A \Rightarrow B$

Beweis

Satz 1

Sei n eine ganze Zahl, die so gewählt ist, dass eine zweite ganze Zahl k existiert, sodass $n = 2k$ gilt.

Dann existiert auch eine ganze Zahl l, sodass gilt $n^2 = 2l$.

Direkter Beweis

Beim direkten Beweis nehmen wir die Voraussetzung des Satzes (Aussage A) an und folgern Aussage B durch eine Kette logischer Argumente.

Beweis auf der nächsten Folie.

Beweis von Satz 1.

Nach Annahme ist n gerade. Also existiert eine ganze Zahl k, sodass $n = 2k$. Dann ist

$$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$

Also ist $l = 2k^2$ eine ganze Zahl, sodass

$$n^2 = 2l.$$

$\square$

Definitionen

Definitionen dienen zur Vergabe von Namen und Abkürzungen für mathematische Objekte oder Eigenschaften mathematischer Objekte. Sie sind weder wahr noch falsch, aber können mehr oder weniger sinnvoll sein.

Definition 2 (Teiler, gerade Zahl)

i) Eine ganze Zahl k teilt eine ganze Zahl n, in Zeichen $k \mid n$, wenn ein ganze Zahl l existiert, sodass $n = k \cdot l$. In diesem Fall heißt k Teiler von n.

ii) Eine ganze Zahl n heißt gerade, wenn 2 ein Teiler von n ist.

Satz 1

Das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade.

Tipps zum Lesen von Definitionen

Definition 2

ii) Eine ganze Zahl n heißt gerade, wenn 2 ein Teiler von n ist.

i) Verstehe ich alle Zeichen und Begriffe, die in der Definition vorkommen?
Begriffe: Ganze Zahl, Teiler.

ii) Kann ich ein Beispiel finden, dass die Definition erfüllt bzw. nicht erfüllt?
Beispiel: 2, Gegenbeispiel: 3

iii) Kann ich die Definition in eigenen Worten wiedergeben?
...

iv) Wie teste ich diese Eigenschaft?
Teilen mit Rest

Tipps zum Lesen von Sätzen

i) Verstehe ich alle Zeichen und Begriffe, die im Satz vorkommen?
Ganze Zahl, teilbar, Quersumme:

Definition 3 (Quersumme)

Sei n eine ganze Zahl mit Dezimaldarstellung $n = n_k \dots n_0$, dann ist die Quersumme von n gegeben durch $n_0 + \cdots + n_k$.

ii) Was sind die Voraussetzungen? Was die Folgerung/Behauptung?
Quersumme durch 3 teilbar $\Rightarrow$ Ganze Zahl durch 3 teilbar.

iii) Warum sind die Voraussetzungen notwendig? Kann ich ein Gegenbeispiel finden, wenn ich Voraussetzungen weglasse?
Nicht jede ganze Zahl ist durch 3 teilbar.

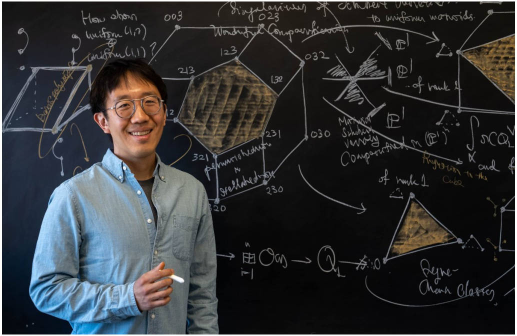
iv) Kann ich den Satz in eigenen Worten wiedergeben?

Satz 4

Eine ganze Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihr Quersumme durch 3 teilbar ist. *(Beweis morgen!)*

Weiter wie in mathematischen Vorlesungen üblich:

An der Tafel!



Ich empfehle das Mitschreiben!

Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“ das entweder wahr oder falsch ist.

Beispiel

i) Aussage $A = $ „$5 + 7 = 12$.“ Wahr.
ii) Aussage $B = $ „Deutschland liegt in Europa.“ Wahr.
iii) Aussage $C = $ „$7 \cdot 8 = 55$.“ Falsch.
iv) Der Term „$7 \cdot 8$ “ ist keine Aussage.

Definition 5 (Negation)

Sei A eine Aussage. Die Negation der Aussage A wird mit $\neg A$ bezeichnet. Der Wahrheitswert der Negation ist durch die nebenstehende Wahrheitstafel definiert

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel:

1. Aussage $B =$ „Deutschland liegt in Europa." Wahr.
   Aussage $\neg B =$ „Deutschland liegt nicht in Europa." Falsch.
2. Aussage $C =$ „$7 \cdot 8 = 55$." Falsch.
   Aussage $\neg C =$ „$7 \cdot 8 \neq 55$." Wahr.

Definition 6

Seien A und B zwei Aussagen.

- Die Konjunktion $A \wedge B$ der Aussagen A, B, gesprochen „A und B“ und
- die Disjunktion $A \vee B$ der Aussagen A, B, gesprochen „A oder B“

werden durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Beispiel: Aussage $A =$ „$5 + 7 = 12$“, Aussage $B =$ „Deutschland liegt in Europa.“ , Aussage $C =$ „$7 \cdot 8 = 55$“.

- $A \wedge B$ ist wahr. $A \wedge C$ ist falsch.
- $A \vee B$ ist wahr. $A \vee C$ ist wahr. $C \vee \neg B$ ist falsch.

Äquivalenzen

Definition 7

Zwei Aussagen A und B sind äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitswert, d.h. die gleichen Werte in der Wahrheitstafel, haben.

In Zeichen: $A \Leftrightarrow B$.
In Worten: „A ist äquivalent zu B"oder „A gilt genau dann, wenn B gilt".

Satz 8 (De Morgan)

Seien A und B Aussagen. Dann ist

i) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ *und*
ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Beweis i) auf der nächsten Folie. Beweis ii) Übung.

Beweis vom Satz 8 i).

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	w	f	f
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

$\square$

Definition 9

Seien A und B zwei Aussagen.
Die Implikation $A \Rightarrow B$ der Aussagen A, B, gesprochen „Aus A folgt B“ wird durch die nebenstehende Wahrheitstafel definiert.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Achtung: **Aus eine falschen Aussage folgt alles.**

Beispiel: Aussage A : „Heute ist schönes Wetter.“, Aussage B: „Wir gehen spazieren.“

$(A \Rightarrow B)$= „Wenn heute schönes Wetter ist, gehen wir spazieren“.

Über den Fall, dass heute schlechtes Wetter ist wird keine Aussage getroffen. Die Aussage bleibt wahr, ob wir bei schlechtem Wetter spazieren gehen oder nicht.

Wie werden Äquivalenzen bewiesen?

Satz 10

Seien A und B Aussagen. Dann gilt

$$(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

Wichtig: Der Beweis eine Äquivalenz beinhaltet also immer den Beweis der Implikationen in beide Richtungen!

Beweis.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

□