GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

# Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

## Tag 2

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

10.-14. Oktober 2022, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H8

# Tagesablauf Vorkurs

| | |
|---|---|
| 10:15-11:45 Uhr | Vorlesung in H8. |
| 11:45-13:15 Uhr | Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan. |
| 13:15-14:15 Uhr | Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H8 und H11. |
| 14:15-14:45 Uhr | Besprechung der Übungsaufgaben |

## Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore"(lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

## Wiederholung

### Aussage

Eine *Aussage* ist ein „sprachliches Gebilde“ , das entweder wahr oder falsch ist.

### Verknüpfung von Aussagen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Negation | $\neg$ | „nicht“ | Äquivalenz | $\Leftrightarrow$ | „genau dann, wenn“ |
| Konjunktion | $\wedge$ | „und“ | Implikation | $\Rightarrow$ | „aus ... folgt“ |
| Disjunktion | $\vee$ | „oder“ | | | |

### Beweis von Äquivalenzen

Um eine Äquivalenz von Aussagen $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, müssen wir die beiden Implikationen $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ zeigen.

## Beweisverfahren

- Kontrapositionsprinzip
- Widerspruchsbeweis
- Beweis durch vollständige Induktion

# Satz, Lemma, Korollar, ...

## Sätze in verschiedenen Rollen und von verschiedener Wertigkeit

| | |
|---|---|
| **Hauptsatz / Fundamentalsatz** | Wichtigster Satz einer Arbeit, Hauptresultat eines Textes. |
| **Proposition** | Wichtiges Resultat das für die Theorie wesentlich ist und zum Hauptsatz hinführt. |
| **Lemma** | Technischer Hilfssatz, der keine große Bedeutung außerhalb der Theorie hat. |
| **Korollar** | Direkte Folgerung aus einem Satz. |
| **Bemerkung** | Hinweis des Autors, der unwesentlich für das Verständnis des Textes ist. Dennoch oft sehr wertvoll für den Leser. |

# Äquivalenz

## Satz 11

*Sei $n$ eine ganze Zahl. Dann ist $n$ gerade genau dann, wenn $n^2$ gerade ist.*

## Definition 12

Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, wenn sie nur durch $\pm 1$ und $\pm p$ teilbar ist.

## Proposition 13 (Primfaktorzerlegung)

*Sei $n$ eine ganze Zahl mit $n \neq 0, \pm 1$. Dann existieren Primzahlen $p_1, \dots, p_k$ mit $p_1 \leq \cdots \leq p_k$, sodass*

$$n = (\pm 1) \cdot p_1 \cdots p_k.$$

*Dies bestimmt $p_1, \dots, p_k$ eindeutig.*

# Beweis

**Direkter Beweis von Satz 11.**

- $\Rightarrow$: Satz 1, gestern bewiesen.
- $\Leftarrow$: Sei $n$ eine ganze Zahl. Für $n = 0$ ist $n^2 = 0$. Damit stimmt die Aussage. Außerdem ist $n = \pm 1$ nicht gerade. Also können wir annehmen $n \neq 0, \pm 1$. Folglich existiert nach Proposition 13 eine Primfaktorzerlegung $n = (\pm 1) \cdot p_1 \cdots p_k$ mit $p_1 \leq \cdots \leq p_k$. Dann ist die Primfaktorzerlegung von $n^2$ gegeben durch

  $$n^2 = p_1^2 \cdots p_k^2$$

  Nach Annahme gilt $2 \mid n^2$. Auf Grund der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung ist damit $p_1 = 2$. Also gilt auch $2 \mid n$.

$\square$

Das war kompliziert.

# Kontraposition

## Direkter Beweis

Beim direkten Beweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ führt man einige Beweisschritte/Implikationen durch um von $A$ nach $B$ zu gelangen:

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_k \Rightarrow B.$$

Hierbei sind $C_1, \ldots, C_k$ Aussagen, die Zwischenschritte darstellen.

## Lemma 14 (Kontrapositionsprinzip)

*Seien $A$ und $B$ Aussagen. Dann gilt*

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

**Beweis.**

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg B \Rightarrow \neg A$ | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | f | w | w |
| w | f | f | w | f | f |
| f | w | w | f | w | w |
| f | f | w | w | w | w |

$\square$

**Beweis von Satz 11 mit Kontraposition.**

$\Rightarrow$: Wie zuvor.

$\Leftarrow$: Die Kontraposition von „Wenn $n^2$ gerade ist, ist auch $n$ gerade.“ lautet

„Wenn $n$ ungerade ist, ist auch $n^2$ ungerade.“

Sei $n$ ungerade, d.h. es gibt eine ganze Zahl $k$ mit $n = 2k + 1$. Dann ist

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 2k + 1.$$

Also ist $n^2$ ungerade.

$\square$

# Widerspruchsbeweis

Beim Widerspruchsbeweis einer Aussage $A$ nehmen wir $\neg A$ an und versuchen einen Widerspruch herzuleiten.
**Schwierigkeit:** Es ist nicht klar wozu ein Widerspruch entsteht.

## Lemma 15

*Seien $A$ und $B$ Aussagen dann gilt $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$.*

## Beweis.

| $A$ | $B$ | $\neg B$ | $A \Rightarrow B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| w | w | f | w | f | f |
| w | f | w | f | w | w |
| f | w | f | w | f | f |
| f | f | w | w | f | f |

□

Beim Widerspruchsbeweis einer Implikation $A \Rightarrow B$ führen wir $A \wedge \neg B$ zum Widerspruch.

## Satz 16 (Euklid 300 v. Chr.)

*Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

## Widerspruchsbeweis.

Angenommen es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$. Definiere die ganze Zahl

$$k = p_1 \cdots p_n + 1.$$

Nach Proposition 13 existieren Primzahlen $q_1, \ldots, q_k$, sodass $k = q_1 \cdots q_l$. Sei $q_1 = p_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann gilt $p_i \mid k$ und $p_i \mid p_1 \cdots p_n$. Damit folgt aber

$$p_i \mid k - p_1 \cdots p_n = 1.$$

im Widerspruch zur Annahme, dass $p_i$ eine Primzahl ist. $\square$

## Satz 17

*Es existieren keine ganzen Zahlen $a, b \neq 0$, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.*

## Widerspruchsbeweis.

Seien $a, b$ ganze Zahlen, sodass $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Wir können annehmen, dass $a, b$ keinen gemeinsamen Teiler $\neq \pm 1$ haben. Es gilt nach Quadrieren

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2. \tag{1}$$

Also ist $a^2$ gerade und damit nach Satz 11 auch $a$. Also existiert eine ganze Zahl $k$, sodass $a = 2k$. Einsetzen in (1) liefert

$$2b^2 = 4k^2 \quad \overset{\text{Kuerzen}}{\Rightarrow} \quad b^2 = 2k^2 \quad \Rightarrow \quad 2 \mid b^2 \quad \overset{\text{Satz } 11}{\Rightarrow} \quad 2 \mid b.$$

Also gilt $2 \mid a$ und $2 \mid b$ im Widerspruch zur Annahme. □

# Aussageform auf den natürlichen Zahlen

**Definition 18**

Eine Aussageform (oder auch Prädikat) $A(n)$ auf den natürlichen Zahlen ist ein sprachliches Gebilde, dass von einer Variable $n$ abhängt und nach Einsetzen einer natürlichen Zahl für $n$ zu einer Aussage wird.

Beispiel: $A(n)$= „$n$ ist eine gerade Zahl."
Satz 11 $\Rightarrow$ Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt, $A(n) \Leftrightarrow A(n^2)$.

Der **Induktionsbeweis** (auch **vollständige Induktion**) ist eine Methode um Aussagen der Form

„Für alle natürlichen Zahlen $n$ gilt $A(n)$."

zu beweisen.

## Satz 19 (Kleiner Satz von Gauss)

*Sei $n$ eine natürliche Zahl, dann ist*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Die **vollständige Induktion** beruht auf folgenden Eigenschaften von $\mathbb{N}$:

- Jede natürliche Zahl $n$ hat einen eindeutigen Nachfolger $S(n) > 1$.
- Wenn: - eine Teilmenge der natürlichen Zahlen $1$ enthält und
  - für jede natürliche Zahl in dieser Teilmenge auch deren Nachfolger enthalten ist

  Dann: Enthält die Teilmenge alle natürlichen Zahlen.

## Induktionsprinzip

Sei $A(\cdot)$ eine Aussageform auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.

Angenommen

i) Induktionsanfang — es gilt $A(1)$ und

ii) Induktionsschritt — für alle natürliche Zahlen $n$ gilt: Aus $A(n)$ folgt $A(n+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle natürliche Zahlen $n$.

Aufschreiben von Induktionsbeweise:

**IA:** Induktionsanfang: Hier wird die Aussage $A(1)$ gezeigt.

**IV:** Induktionsvoraussetzung: Wir notieren uns, die Aussage $A(n)$ für eine natürliche Zahle $n$, die im Induktionsschritt angenommen wird.

**IS:** Induktionsschritt: Wir folgern $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Beweis von Satz 19.

IA: $A(1)$: $1 = \frac{n(n+1)}{2} = 1 \quad \checkmark$.

IV: Sei $n$ eine natürliche Zahl, sodass

$$1 + 2 + \ldots n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

IS: Dann ist

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (n+1) &= (1 + 2 + \cdots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

D.h. $A(n+1)$ gilt.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n$. $\square$

# Induktionsbeweis

**Satz 20**

*Für alle natürlichen Zahlen $n$ ist $6^n + 4$ durch $5$ teilbar.*

**Beweis.**

IA: $A(1)$: $5 \mid 6 + 4 = 10 \quad \checkmark$.

IV: Sei $n$ eine natürliche Zahl, sodass

$$5 \mid 6^n + 4.$$

IS: Dann folgt

$$6^{n+1} + 4 = 6(6^n) + 4 = (1 + 5)6^n + 4 = 5 \cdot 6^n + (6^n + 4).$$

Nach IV gilt $5 \mid (6^n + 4)$ und somit folgt $5 \mid 6^{n+1} + 4$.

Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n$. $\square$

# Varianten des Induktionsbeweises

1. **Der Induktionsanfang muss nicht bei $n = 1$ sein.** Sein $n_0$ eine natürliche Zahl. Angenommen wir wollen zeigen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürliche Zahlen $n \geq n_0$ gilt. Dann passen wir dass Induktionsverfahren wie folgt an:

   **IA':** Induktionsanfang: Hier wird die Aussage $\mathbf{A(n_0)}$ gezeigt.

   **IV':** Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ gilt für eine natürliche Zahl $\mathbf{n \geq n_0}$.

   **IS:** Induktionsschritt: Wir folgern $A(n+1)$ aus $A(n)$.

2. Manchmal reicht es im Induktionsschritt nicht $A(n)$ anzunehmen um $A(n+1)$ zu zeigen. Dann kann es helfen die folgende **stärkere Induktionsvoraussetzung** anzunehmen.

   **IV":** Induktionsvoraussetzung: $A(n)$ gilt für **alle** natürliche Zahl $\mathbf{n_0, n_0 + 1, \ldots, n}$.