Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
WS 2022/23
13. Oktober 2022

Vorkurs Mathematik
Dr. Johannes Horn

Aufgabenblatt 4

1 Eigenschaften von Abbildungen via Quantoren

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Schreiben sie die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv unter der Benutzung von Quantoren.

2 Bild und Urbild

Sei $f \colon X \to Y$ eine Abbildung. Seien $N \subseteq X$ und $M \subseteq Y$ Teilmengen der Definitions- bzw. Zielmenge. Bestimme in den folgenden Beispielen das Bild $f(N)$ von N unter f und das Urbild $f^{-1}(M)$ von M unter f.

i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$ und $N = M = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\}$.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 4x + 1$ und $N = M = [a, b]$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$.

3 Mehr Beispiele

Prüfen Sie, ob die folgenden Definitionen Abbildungen definieren. Wenn ja prüfen Sie, ob die Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n^2$.

ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 1$.

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 4x + 1$.

4 Quantoren - Verneinung

Geben sie die folgenden Aussagen in eigenen Worten wieder. Dann verneinen Sie die Aussagen. Hierbei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

i) $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} : |y| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(0)| < \epsilon$.

ii) $\forall n \in \mathbb{Z} : (n > 2 \land 2 \mid n) \ \exists p_1, p_2 \text{ Primzahlen} : n = p_1 + p_2$.

Ersteres ist die Definition von Stetigkeit der Funktion f am Punkt $0 \in \mathbb{R}$. Mehr dazu in Analysis 1.