GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 5

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

10.-14. Oktober 2022, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H8

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in H8.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H8 und H11.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore“(lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Wiederholung

Eigenschaften von Abbildungen

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist f

injektiv	$\Leftrightarrow$	Alle $n \in N$ haben höchstens ein Urbild unter f.
surjektiv	$\Leftrightarrow$	Alle $n \in N$ haben mindestens ein Urbild unter f.
bijektiv	$\Leftrightarrow$	Alle $n \in N$ haben genau ein Urbild unter f.

Quantoren

$\forall\, m \in M : A(m)$	„Für alle $m \in M$ gilt $A(m)$."
$\exists\, m \in M : A(m)$	„Es existiert ein $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt."
$\exists!\, m \in M : A(m)$	„Es existiert genau ein $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt."

Plan für heute

Einführung in die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

- Euklidische Ebene
- Motivation: Lösbarkeit von quadratischen Gleichungen.
- Definition und Rechenregeln
- Komplexe Zahlen in Polardarstellung
- Einheitswurzeln
- Ausblick: Riemannsche Flächen

Kartesisches Produkt

Definition 42

Seien M und N Mengen. Eine Tupel ist ein geordnetes Paar (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$.

Das kartesische Produkt $M \times N$, gesprochen „M Kreuz N", ist definiert durch

$$M \times N = \{(m, n) \mid m \in M \wedge n \in N\}.$$

Achtung: Die Ordnung ist entscheidend. Sei $M = N = \mathbb{Z}$. Dann ist $(2, 1) \neq (1, 2)$.

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$, $N = \{a, b\}$. Dann ist

$$M \times N = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Definition 43 (Reelle Ebene)

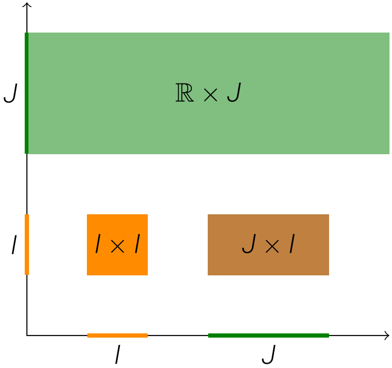
Sei nun $M = N = \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

die reelle Ebene.

Sei $\quad I = [1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
und $\quad J = [3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$.
Dann ist

$$I \times I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x, y \leq 2\},$$
$$\mathbb{R} \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2\},$$
$$J \times I = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 3 \leq x \leq 5 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{matrix} \right\}.$$



Euklidische Ebene

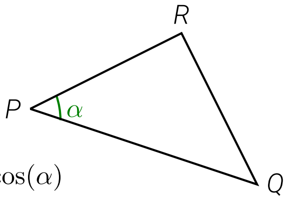
Definition 44

Seien $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, dann definieren wir den euklidische Abstand von P und Q als

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Wir bezeichnen $(\mathbb{R}^2, d)$ als euklidische Ebene.

Wenn wir Längen messen können, können wir auch Winkel messen, denn nach dem Cosinussatz gilt für drei Punkte P, Q, R mit Innenwinkel α des Dreiecks bei P



$$d(Q, R)^2 = d(P, Q)^2 + d(P, R)^2 - 2d(P, Q)d(P, R)\cos(\alpha)$$

Manche quadratische Gleichungen haben keine Lösungen. Zum Beispiel: $x^2 + 5 = 0$.

Durch Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen erreichen wir:

„Jede quadratische Gleichung hat eine komplexe Lösung. “

Noch besser:

„Jedes Polynom vom Grad n hat genau n komplexe Lösungen (gezählt mit Multiplizität). “

Idee (Gauss): Wir führen abstrakt eine Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ ein.

Die **imaginäre Einheit** $\mathbf{i}$ mit $i^2 = -1$.

Definition 45 (Komplexe Zahlen)

Eine komplexe Zahl z ist ein Objekt der Form

$$z = a + bi \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hierbei wird a als der Realteil von z bezeichnet, in Zeichen $a = \mathrm{Re}(z)$, und b als Imaginärteil von z, in Zeichen $b = \mathrm{Im}(z)$.
Seien z, z' komplexe Zahlen dann gilt

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \wedge \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z').$$

Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Komplexe Zahlen
Rechenoperationen

Wir können mit komplexen Zahlen rechnen wie mit reellen Zahlen unter Beachtung von $i^2 = 1$. Seien $z = a + bi, z' = c + di$ komplexe Zahlen. Dann ist

$$\begin{aligned} z + z' &= a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i, \\ z \cdot z' &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ &\overset{i^2=-1}{=} (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Definition 46 (Addition und Multiplikation)

Seien $z = a + bi, z' = c + di$ komplexe Zahlen. Wir definieren die Addition und Multiplikation wie oben durch

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + c) + (b + d)i \\ z \cdot z' &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Satz 47

Jede quadratische Gleichung mit Koeffizienten in den reellen Zahlen hat eine komplexe Lösung.

Beweis.

Zuerst bemerken wir, dass nun für alle $x \in \mathbb{R}$ eine $y \in \mathbb{C}$ existiert mit $y^2 = x$. Falls $x \geq 0$, ist $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$. Falls $x < 0$, dann ist

$$x = -x \cdot -1 = -x \cdot i^2.$$

Also ist $y = \pm\sqrt{-x} \cdot i$ eine Wurzel. Seien nun $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ betrachte die quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Ende des Beweises von Satz 47.

Wir beweisen die bekannte Formel durch quadratisches Ergänzen.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Nach Voraussetzung ist $-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \in \mathbb{R}$ also existiert eine Wurzel w. Wir erhalten

$$x + \frac{b}{2a} = \pm w = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Nun folgt die bekannte Formel

$$x_\pm = \frac{-b + \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Also sind alle Lösungen von dieser Form. Einsetzen in die Gleichung zeigt, dass dies Lösungen sind. $\square$

Komplexe Zahlenebene

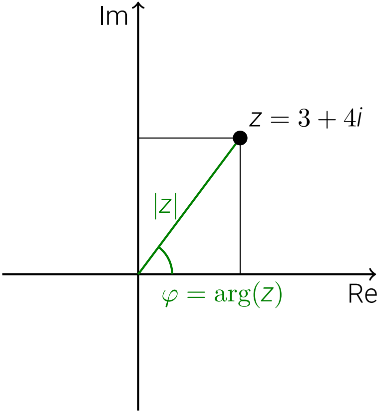
Wir können die Menge der komplexe Zahl mit der euklidischen Ebene identifizieren durch die bijektive Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$$
$$z \mapsto (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$$

Wir definieren den Betrag einer komplexen Zahl als den Abstand des Bild im $\mathbb{R}^2$ zum Ursprung $(0, 0)$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Man kann auch **Polarkoordinaten** $(|z|, \arg(z)) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi)$ benutzen um komplexe Zahlen zu beschrieben, wobei $\arg(z)$ der Winkel zur reellen Achse ist.



Dann gilt

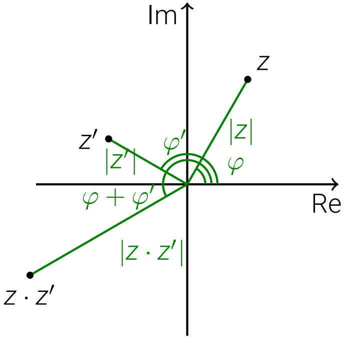
$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

Gegeben zwei komplexe Zahlen in Polardarstellung (hier: $\cos\varphi = \cos(\varphi)$ usw.)

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$z' = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

wobei $r, r' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi)$. Dann ist

$$\begin{aligned} & z \cdot z' \\ &= r \cdot r' \big((\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi') \\ &\quad + i\,(\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi') \big) \\ &= r \cdot r' \left(\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')\right). \end{aligned}$$



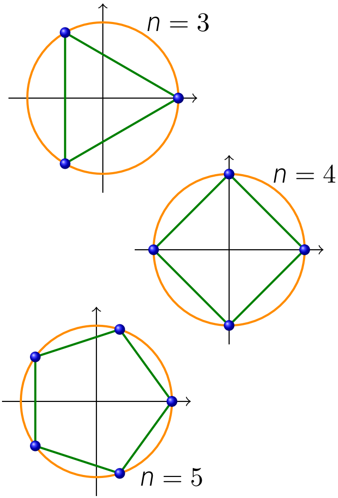
Also:

Betrag multiplizieren & Winkel addieren

Einheitswurzeln

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten die Gleichung $x^n - 1 = 0$. Wir erhalten die folgende reellen Lösungen

$$x = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \pm 1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$



Satz 48

Die Gleichung $x^n - 1 = 0$ hat n komplexe Lösungen

$$x_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \in \mathbb{C}$$

für $k = 1, \ldots n$.

Beweis.

Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $x^n = 1$. Dann ist

$$|x|^n = |x^n| = 1^n = 1.$$

Da $|x| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ist also $|x| = 1$. Die Lösung der Gleichung sind also in Polarkoordinaten gegeben als $x = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$. Nun folgt aus

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = 1,$$

dass $\sin(n\varphi) = 0$ und $\cos(n\varphi) = 1$. Also existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$n\varphi = 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi k}{n}.$$

Damit sind alle Lösungen von der angegebenen Form und alle angegebenen x_k lösen die Gleichung. Es bleibt zu zeigen, dass es genau n verschieden Lösungen gibt. Siehe nächste Folie.

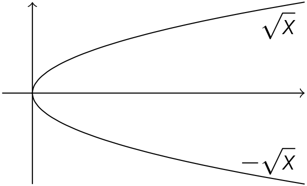
Ende des Beweises von Satz 48.

Es bleibt zu zeigen, dass es genau n verschieden Lösungen gibt. Einerseits gilt für alle $l \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\cos(\alpha + 2\pi l) = \cos(\alpha) \quad \text{und} \quad \sin(\alpha + 2\pi l) = \sin(\alpha).$$

Das heißt wir können uns auf $1 \leq k \leq n$ beschränken. Andererseits ist ein Winkel $\alpha \in (0, 2\pi]$ eindeutig bestimmt durch die Angabe von $\cos$ und dem Vorzeichen von $\sin$ siehe Aufgabe. Das heißt die x_k mit $1 \leq k \leq n$ haben verschieden Winkel in Polarkoordinaten und sind somit verschiedene Nullstellen. $\square$

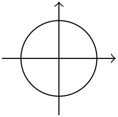
Der Graph der reellen Wurzelfunktion



Betrachte

$$z(\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi)$.



Eine Wurzel von $z(\varphi)$ ist gegeben durch

$$w(\varphi) = \cos(\tfrac{1}{2}\varphi) + i \sin(\tfrac{1}{2}\varphi).$$

1. Starten wir bei $\varphi = 0$ und bewegen uns einmal im Kreis, indem φ von 0 nach 2π läuft.
2. Dann macht $w(\varphi)$ nur eine halbe Umdrehung und wir landen bei $w(2\pi) = -1$, also auf dem anderen Zweig der reellen Wurzel.
3. Erste nach einer weiter Umdrehung landen wir zum ersten Mal wieder bei $w(4\pi) = 1$.

Ausblick: Riemmansche Flächen

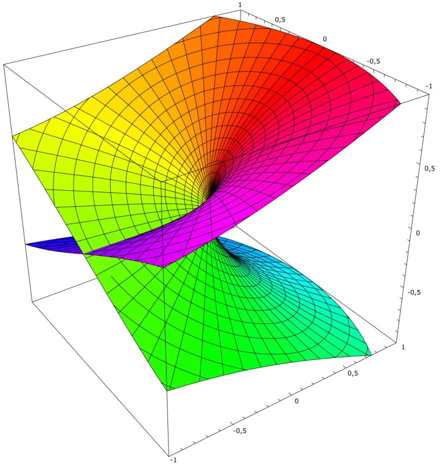


Abbildung: Riemannsche Fläche zur Quadratwurzel

Solche Phänomene führten Bernhard Riemann zur Entdeckung der Riemannschen Flächen.

Mehr darüber in:
Funktionentheorie,
Riemmansche Flächen,
Komplexe Geometrie,
Algebraische Geometrie.

Ende

Danke fürs Mitmachen und viel Erfolg im Studium!

Ich freue mich über weiteres Feedback:

horn@math.uni-frankfurt.de oder Discord