

Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 3

Tagesablauf Vorkurs

- 10:15-11:45 Uhr Vorlesung in H11.
- 11:45-13:15 Uhr Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
- 13:15-14:15 Uhr Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H11 und H13.
- 14:15-14:45 Uhr Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore“ (lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Beweisverfahren für $A \Rightarrow B$

Direkter Beweis

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_l \Rightarrow B$$

Kontraposition

$$\text{Zeige: } \neg B \Rightarrow \neg A$$

Widerspruchsbeweise

Zeige: Aus der Annahme $A \wedge \neg B$ folgt ein Widerspruch.

Induktionsprinzip

Sei $A(\cdot)$ eine Aussageform mit Variable in den natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

Angenommen

- i) es gilt $A(1)$ und
- ii) für alle natürliche Zahlen n gilt:
Aus $A(n)$ folgt $A(n + 1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle natürliche Zahlen n .

Plan für heute

- Einführung in die Mengenlehre
- Modulo Rechnen

Definition 21

Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Für ein Element m von M schreiben wir $m \in M$.

Beispiele:

Zahlmengen: \mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen

i) \mathbb{Z} Menge der ganzen Zahlen

\mathbb{Q} Menge der rationalen Zahlen

\mathbb{R} Menge der reellen Zahlen

ii) $\{5, \sqrt{2}, 30031, \star\}$ $\{\}$ heißen Mengenklammern.

iii) Menge der Geraden in der Ebene.

iv) Menge der Studierenden in diesem Hörsaal.

Definition 22

Sei M eine Menge. Eine Menge N heißt Teilmenge von M , in Zeichen $N \subset M$, wenn für alle $n \in N$ gilt $n \in M$.

Insbesondere sind zwei Mengen N und M gleich, $N = M$, wenn $N \subset M$ und $M \subset N$.

Beispiel:

- i) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- ii) Sei P die Menge der Primzahlen, dann ist $P \subset \mathbb{N}$.
- iii) $\{5, \star\} \subset \{5, \sqrt{2}, 30031, \star\}$.

Definition 23

Die Menge, die kein Element enthält, nennen wir leere Menge, in Zeichen \emptyset .

Beschreibung von Menge

- i) Durch Aufzählung ihrer Elemente. Zum Beispiel: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- ii) Als Teilmenge einer bekannten Menge durch Angabe einer Auswahleigenschaft: Sei M eine Menge und $A(m)$ eine Aussageform mit Variable $m \in M$. Dann existiert eine Menge

$$\{m \in M \mid A(m)\} \subset M$$

In Worten ist dies die Menge der $m \in M$, sodass $A(m)$ gilt. Nach dem vertikalen Strich folgt also eine Bedingung, die die Elemente dieser Teilmenge erfüllen müssen.

Definition 24

Aussageform auf einer Menge Sei M eine Menge. Eine Aussageform $A(m)$ auf M ist ein sprachliches Gebilde, das von einer freien Variable m abhängt und nach Einsetzen eines Wertes für $m \in M$ zu einer Aussage wird.

Beschreibung von Mengen

Beispiele

i) Sei $M = \mathbb{Z}$ und $A(n) = „n \text{ ist gerade}“$. Dann ist

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid A(n)\} = \text{Menge der geraden Zahlen.}$$

ii) Sei $M = \mathbb{N}$ und $A(n) = „n > 1 \text{ und } n \text{ hat nur die Teiler } \pm 1 \text{ und } \pm n“$.
Dann ist

$$\{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\} = \text{Menge der Primzahlen.}$$

iii) Sei $M = \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $A(x) = „x \geq a \text{ und } x \leq b“$. Dann ist

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid A(x)\} = \text{Das abgeschlossene Intervall von } a \text{ bis } b.$$

Analog definieren wir

1 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall,

2 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall,

3 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall.

Definition 25

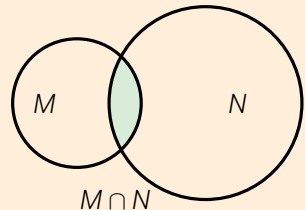
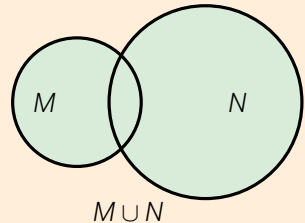
Seien M und N Mengen.
Die Vereinigung von M und N , in Zeichen $M \cup N$, ist definiert als

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}.$$

Der Schnitt von M und N , in Zeichen $M \cap N$, ist definiert als

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

Falls $M \cap N = \emptyset$, bezeichnen wir M und N als disjunkt.



Mengenoperationen

Beispiele

- i) $M = \{1, 2\}, N = \{2, 3\}$. Dann $M \cup N = \{1, 2, 3\}$ und $M \cap N = \{2\}$.
- ii) Sei M eine Menge. Dann $M \cup \emptyset = M$ und $M \cap \emptyset = \emptyset$. Verhält sich wie 0 in \mathbb{Z} .
- iii) Sei M eine Menge. Seien $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ Aussageformen mit Variable in M und sei

$$M_A = \{m \in M \mid A(m)\} \quad \text{ sowie } \quad M_B = \{m \in M \mid B(m)\}.$$

Dann ist

$$M_A \cup M_B = \{m \in M \mid A(m) \vee B(m)\}, \quad M_A \cap M_B = \{m \in M \mid A(m) \wedge B(m)\}.$$

- iv) $\mathbb{Z} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = \mathbb{N}$
 $\mathbb{N} \cup \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq 0\} = \mathbb{Z}$.

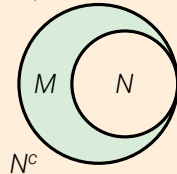
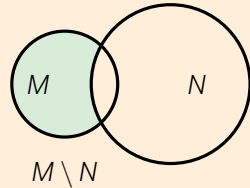
Definition 26

Seien M und N Mengen.

Die Differenz $M \setminus N$, gesprochen „ M ohne N “, ist definiert als

$$M \setminus N = \{m \in M \mid m \notin N\} \subset M.$$

Falls $N \subset M$, bezeichnen wir $M \setminus N$ als das Komplement von N in M und schreiben kurz N^c .



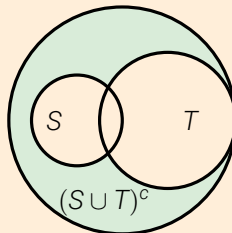
Beispiele:

- i) Sei $M = \{1, 2\}, N = \{2, 3\}$. Dann $M \setminus N = \{1\}$ und $N \setminus M = \{3\}$.
- ii) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ and $\mathbb{Q}^c =$ Menge der irrationalen Zahlen.
- iii) Sei $G = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ gerade}\} \Rightarrow G^c =$ Menge der ungeraden Zahlen.

Lemma 27

Sei M eine Menge und $S, T \subset M$
Teilmengen, dann gilt

- i) $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$.
- ii) $(S \cap T)^c = S^c \cup T^c$.



Beweis.

- i) Sei $x \in M$. Dann gilt $x \in S \cup T$ genau dann, wenn $x \in S$ oder $x \in T$. Bezeichne mit $A(x)$ die Aussageform auf M „ $x \in S$ “ und mit $B(x)$ die Aussageform auf M „ $x \in T$ “. Dann ist $x \in S \cup T$ genau dann wenn $A(x) \vee B(x)$. Also ist $x \in (S \cup T)^c$ genau dann wenn

$$\begin{aligned}\neg(A(x) \vee B(x)) &\stackrel{\text{deMorgan}}{\iff} \neg A(x) \wedge \neg B(x) \iff x \notin S \wedge x \notin T \\ &\iff x \in S^c \wedge x \in T^c \stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in S^c \cap T^c.\end{aligned}$$

- ii) Sei $x \in M$. Dann gilt $x \in S \cap T$ genau dann, wenn $A(x)$ und $B(x)$ mit den Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ wie zuvor. Also ist $x \in (S \cap T)^c$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}\neg(A(x) \wedge B(x)) &\stackrel{\text{deMorgan}}{\iff} \neg A(x) \vee \neg B(x) \iff x \notin S \vee x \notin T \\ &\iff x \in S^c \vee x \in T^c \stackrel{\text{Def}}{\iff} x \in S^c \cup T^c.\end{aligned}$$



Lemma 28 (Teilen mit Rest)

Sei $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m > 1$, dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \{0, \dots, m - 1\}$, sodass

$$n = km + r.$$

Beweis.

Definiere $k \in \mathbb{Z}$ als die größte ganze Zahl, sodass $mk \leq n$. Existiert da n eine obere Schranke. Dann ist $r := n - mk \in \{0, \dots, m - 1\}$. \square

Definition 29

In der Situation des obigen Lemmas bezeichnen wir r als den Rest von n beim Teilen durch m und schreiben kurz $r = n \bmod m$ ("n modulo m").

Beispiel: $10 \bmod 3 = 1$, $10 \bmod 11 = 10$, $10 \bmod 5 = 0$.

Nach Definition gilt: $n = 0 \bmod m$ genau, dann wenn $m|n$.

Lemma 30

Seien $n_1, \dots, n_4 \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass

$$n_1 = n_2 \bmod m \quad \text{und} \quad n_3 = n_4 \bmod m,$$

dann ist

- i) $n_1 + n_3 \bmod m = n_2 + n_4 \bmod m$.
- ii) $n_1 n_3 \bmod m = n_2 n_4 \bmod m$.

Beispiel: $37 + 65 \bmod 3 = 1 + 2 \bmod 3 = 0 \bmod 3 \Rightarrow 3 \mid 37 + 65$.

Beweis von Lemma 29.

Seien $k_i \in \mathbb{Z}$ und $r_i \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $n_i = k_i m + r_i$. Nach Voraussetzung ist $r_1 = r_2$ und $r_3 = r_4$.

- i) Es ist $n_1 + n_3 = (k_1 + k_3)m + r_1 + r_3$ und $n_2 + n_4 = (k_2 + k_4)m + r_1 + r_3$. Dann existiert $k \in \{0, 1\}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $r_1 + r_2 = km + r$. Also ist $n_1 + n_3 = (k_1 + k_2 + k)m + r$ und $n_2 + n_4 = (k_2 + k_4 + k)m + r$. Insbesondere stimmen die Reste beim Teilen durch m überein.
- ii) Es ist $n_1 n_3 = k_1 k_3 m^2 + (k_1 r_3 + r_1 k_3)m + r_1 r_3$ und $n_2 n_3 = k_2 k_4 m^2 + (k_2 r_4 + r_2 k_4)m + r_2 r_4$. Dann existiert $k \in \{0, \dots, m-1\}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $r_1 r_2 = km + r$. Dann ist $n_1 n_3 = k_1 k_3 m^2 + (k_1 r_3 + r_1 k_3 + k)m + r$ und $n_2 n_3 = k_2 k_4 m^2 + (k_2 r_4 + r_2 k_4 + k)m + r$. Damit stimmen die Reste beim Teilen durch m überein.



Dezimaldarstellung ganzer Zahlen. Es ist eine Konvention in unserer Gesellschaft Zahlen aufzuschreiben. So ist

$$657 = 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Allgemeiner meint eine Dezimaldarstellung

$$n_k \dots n_0 = n_k \cdot 10^k + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$$

Definition 31

Die Quersumme einer ganzen Zahl n mit Dezimaldarstellung $n_k \dots n_0$ ist

$$n_k + \dots + n_0.$$

Satz 32

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Die Quersumme von n ist durch 3 teilbar genau dann, wenn n durch 3 teilbar ist.

Beweis.

Sei $n = n_k \dots n_0$ in Dezimaldarstellung. Wir verwenden Lemma 29 und dass $10 = 1 \pmod{3}$. Dann ist

$$n \pmod{3} = n_k \cdot 10^k + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0 \pmod{3} = n_k \cdot 1 + \dots + n_1 \cdot 1 \pmod{3}.$$

Der letzte Ausdruck ist die Quersumme. Also gilt

$$\begin{aligned} 3 \mid n &\Leftrightarrow n = 0 \pmod{3} \Leftrightarrow \text{Quersumme} = 0 \pmod{3} \\ &\Leftrightarrow 3 \mid \text{Quersumme}. \end{aligned}$$

