Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2023/24
Prof. Dr. Bastian von Harrach-Sammet
M. Sc. Andrej Brojatsch
M. Sc. Johannes Wagner

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

1. Übungsblatt (erschienen am 17.10.2023)

Aufgabe 1.1 (Votieraufgabe)
Es sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge und x_0 ein Häufungspunkt von X ($x_0 = \infty$ und $x_0 = -\infty$ seien zugelassen). Weiterhin seien $f,\ g\colon X \to \mathbb{R}$ Funktionen. Die *Landauschen Symbole* $\mathrm{O}(\cdot)$ und $\mathrm{o}(\cdot)$ seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} f \in \mathrm{O}(g) \quad & \text{falls} \quad \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty, \\ & \text{d.h. } \exists\, C > 0 : \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq C, \text{für alle } x \in X \text{ hinreichend nahe bei } x_0, \\ f \in \mathrm{o}(g) \quad & \text{falls} \quad \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass in der Literatur auch die Schreibweise „$f = \mathrm{O}(g)$“ bzw. „$f = \mathrm{o}(g)$“ üblich ist, obwohl dies keine Äquivalenzrelation ist.

(a) Es seien $h_1 \in \mathrm{O}(f)$, $h_2 \in \mathrm{O}(g)$, $h_3 \in \mathrm{o}(f)$, jeweils für $x \to x_0$, und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Regeln:

   (i) $h_1 + h_2 \in \mathrm{O}(|f| + |g|)$.

   (ii) $c \cdot h_1 + h_3 \in \mathrm{O}(f)$.

   (iii) $h_2 \cdot h_3 \in \mathrm{o}(f \cdot g)$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f \in \mathrm{O}(x^{k+1}) \iff f \in \mathrm{o}(x^k)$, für $x \to 0$.

   (ii) $f \in \mathrm{O}(n^n) \iff f \in \mathrm{O}(n!)$, für $n \to \infty$.

   (iii) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in e + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, für $n \to \infty$.

Aufgabe 1.2 (schriftliche Aufgabe)[3+3 Punkte]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar.

(a) Zeigen Sie, dass die Trapezformel eine obere Schranke für $\int_a^b f(x)dx$ liefert.

(b) Zeigen Sie, dass die Mittelpunktsformel eine untere Schranke für $\int_a^b f(x)dx$ liefert.

Aufgabe 1.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Betrachte die aus der Vorlesung bekannte Trapezformel zur näherungsweisen Berechnung von Integralen:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b) =: T[f]$$

Unterteilt man das Intervall $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ der Länge h, und wendet die Trapezformel auf jedes Teilintervall an, so erhält man die zusammengesetzte Trapezformel (vgl. Skript)

$$T_n[f] = \frac{h}{2}f(a) + h\sum_{i=2}^{n} f(x_i) + \frac{h}{2}f(b) \approx \int_a^b f(x)dx$$

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Funktion `trapez(a, b, f, n)` mit den Argumenten:

- a linke Intervallgrenze
- b rechte Intervallgrenze
- f die zu integrierende Funktion
- n die Anzahl der Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$

die die zusammengesetzte Trapezformel berechnet. Nutzen Sie einen function-handle, um f als Argument zu übergeben und versuchen Sie wenn möglich ohne `for`-Schleife auszukommen.

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu **schriftlichen Aufgaben** soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 24.10.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.
- Zu **Programmieraufgaben** ist bis zum 24.10.2023 um 10:00 Uhr ein `MATLAB`-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Um den Zugang zu dem `MATLAB`-Grader zu erhalten, tragen Sie sich bis Donnerstag den 19.10.2023 um 13 Uhr in den Olat Kurs der Veranstaltung ein. Der Code ist nicht mehr per Mail einzureichen.
- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.