Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Wintersemester 2023/2024
19. Oktober 2023

Lie-Gruppen und Algebraische Gruppen
Prof. Dr. Martin Möller
Dr. Johannes Horn
Johannes Schwab

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Lie-Algebra der Gruppe

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & z \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \,:\, a > 0,\, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ist surjektiv.

(b) Die Abbildung $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist nicht surjektiv.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien G_1 und G_2 separable topologische Gruppen deren Topologie lokal kompakt ist, und sei $\pi : G_1 \to G_2$ ein stetiger bijektiver Homomorphismus. Ziel ist es zu zeigen, dass π ein Homöomorphismus ist. Zeigen Sie dazu zunächst die folgenden Hilfsaussagen:

(a) Die topologische Gruppe G_1 ist σ-kompakt (d.h. sie lässt sich als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen schreiben).

(b) Es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subseteq G_1$ so dass $\pi(K)$ nicht-leeres Inneres $\pi(K)^\circ$ hat und $1 \in \pi(K)^\circ$.
Hinweis: Sie dürfen verwenden dass der Satz von Baire für lokal kompakte Hausdorffräume gilt: Jede Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen ohne innere Punkte hat keine inneren Punkte.

(c) Die Abbilding π ist eigentlich (d.h. das Urbild jeder kompakten Menge ist kompakt), insbesondere ist π abgeschlossen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten den Torus

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \,:\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

und für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Untergruppe

$$S_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{it\alpha} \end{pmatrix} \,:\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Aufgabe, dass der Abschluss $\overline{S_{\sqrt{2}}}$ nicht 1-dimensional sein kann.

(b) Folgern Sie, dass $S_{\sqrt{2}}$ dicht in T ist.

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist S_α dicht in T?

Abgabe in der Vorlesung am **Montag, den 30. Oktober**.