Vorlesung Numerische Mathematik
Wintersemester 2021/22
Prof. Dr. Bastian von Harrach
M.Sc. Johannes Wagner

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

3. Übungsblatt (erschienen am 31.10.2023)

Aufgabe 3.1 (schriftliche Aufgabe)[2 Punkte]
Bestimmen Sie zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ die vier Gewichte w_1, w_2, w_3, w_4 der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formel mit $m = 4$ äquidistanten Knoten.

Aufgabe 3.2 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Zur näherungsweisen Berechnung des Integrals $I[f] = \int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ werden die abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln mit einer ungeraden Anzahl $m = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, äquidistanter Knoten betrachtet.

(a) Vergewissern Sie sich, dass $x_{m+1-i} = -x_i$ für $i = 1, \ldots, m$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Gewichte symmetrisch sind, dass also $w_{m+1-i} = w_i$, für $i = 1, \ldots, m$, gilt.

(c) Man zeige für diesen Spezialfall, dass die Newton-Cotes Formeln mit ungerader Anzahl Knoten $m = 2l + 1$ sogar Exaktheitsgrad $q = m$ haben.

Aufgabe 3.3 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
Basierend auf der zusammengesetzten Trapezformel und der Simpsonformel soll ein adaptives Quadraturverfahren zur Berechnung von

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

implementiert werden.

Die Idee eines adaptiven Verfahren ist es, die Schrittweite nur in solchen Bereichen zu verfeinern, in denen sich die Funktionswerte schnell ändern.

Der Algorithmus soll rekursiv arbeiten: Zunächst wird für $h = (b - a)/2$ das Integral nach der zusammengesetzten Trapezregel

$$T_2[f] = \frac{h}{2} f(a) + h f\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{h}{2} f(b)$$

und der Simpsonformel $S[f]$ berechnet. Wird die Genauigkeit $|T_2[f] - S[f]| \leq \texttt{tol}$ erreicht, wobei `tol` vorgegeben ist, so soll $S[f]$ als Näherung für $I[f]$ verwendet werden und der Algorithmus soll abbrechen. Wird diese Genauigkeit nicht erreicht, so soll das Integrationsintervall und die Genauigkeit `tol` halbiert werden, und die oben beschriebene Methode zur Berechnung der Integrale

$$I_1[f] = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2[f] = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

wiederholt werden.

Implementieren Sie den Algorithmus mit einer sich selbst rekursiv aufrufenden Funktion

```
[Q, AnzF] = QuadAdapt(funkt,tol,a,m,b,fa,fm,fb),
```

wobei `a,b` die Integrationsgrenzen bezeichnen, $m = \frac{1}{2}(a+b)$ den Mittelpunkt des Intervalls und `fa, fb, fm` jeweils die Funktionswerte $f(a), f(b)$ und $f(m)$ enthalten. In `Q` wird der Näherungswert für $I[f]$ und in `AnzF` die Anzahl der Funktionsauswertungen von f zurückgegeben.

Die Funktion `visualisiere_QuadAdapt` zeigt das Konvergenzverhalten dieser adaptiven Quadraturmethode im Vergleich zur zusammengesetzten Trapezformel. Hierzu werden für das Integral $I[f] = \int_{0.1}^{3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ die Fehler der numerischen Integration gegen die Anzahl der Funktionsauswertungen beider Methoden dargestellt (Funktionsaufruf: `visualisiere_QuadAdapt(@QuadAdapt)`. Was beobachten Sie?

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 07.11.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.

- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 07.11.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.