4. Übungsblatt (erschienen am 07.11.2023)

Aufgabe 4.1 (Votieraufgabe)
Es sei $w \in C([a,b])$ eine Gewichtsfunktion, $w(x) > 0$ für $x \in (a,b)$, und $\omega \in \Pi_m \setminus \Pi_{m-1}$ ein Polynom m-ten Grades für das die Gleichung

$$\int_a^b \omega(x)p(x)w(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

für alle Polynome $p \in \Pi_{m-1}$ gelte. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass ω dann ausschließlich reelle Nullstellen hat. Zeigen Sie, dass die Nullstellen überdies paarweise verschieden sind und in (a,b) liegen.

Aufgabe 4.2 (Votieraufgabe)
Es seien $f, g \in C([-1,1])$ und $w \in C([-1,1])$ eine Gewichtsfunktion, das heißt, $w(x) > 0$ für alle $x \in (-1,1)$.

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^1 w(x)f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $C([-1,1])$ definiert wird. Weisen Sie dies auch für die Funktion $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ nach.

(b) Durch $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ wird eine Norm auf $C([-1,1])$ definiert. Seien $h_1, h_2, \ldots, h_n$ paarweise orthogonal, es sei also $\langle h_i, h_j\rangle = 0$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, dass der Satz des Pythagoras

$$\|h_1 + \cdots + h_n\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + \cdots + \|h_n\|^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4.3 (schriftliche Aufgabe)[4 Punkte]
Das n-te *Tschebyscheff-Polynom*, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$ ist gegeben durch

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(a) Weisen Sie nach, dass für $n \geq 1$ die Drei-Term-Rekursion $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ gilt mit $T_0(x) = 1$ und $T_1(x) = x$, und es sich bei T_n tatsächlich um ein Polynom vom Grad n handelt.

(b) Zeigen Sie, dass die $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich des Skalarproduktes $\langle p, q\rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x)w(x)\,\mathrm{d}x$ mit der Gewichtsfunktion $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ paarweise orthogonal sind. Wie lautet die entsprechende Orthonormalbasis?

Aufgabe 4.4 (Votieraufgabe)
Die *Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformel*

$$G_m[f] = \sum_{j=1}^{m} w_j f(x_j) \approx \int_{-1}^{1} f(x) w(x)\,\mathrm{d}x =: I[f;w]$$

ist die eindeutig bestimmte Quadraturformel zur Gewichtsfunktion $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ mit maximalem Exaktheitsgrad $q = 2m-1$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Knoten $x_j = \cos(\pi \frac{2j-1}{2m})$, $j = 1, \ldots, m$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für die Gewichte gilt $w_j = \frac{\pi}{m}$, für $j = 1, \ldots, m$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Aus der Exaktheitsforderung

$$G_m[T_k] = I[T_k; w] \quad \text{für } k = 0, \ldots, 2m-1$$

ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, wobei T_k das k-te Tschebyscheff-Polynom aus Aufgabe 3 bezeichnet.

2. Benutzen Sie die geometrische Summenformel, um zu zeigen, dass für $k \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{m} e^{\mathrm{i}k\pi\frac{2j-1}{2m}} = \begin{cases} \frac{\mathrm{i}}{\sin\left(\frac{k}{2m}\pi\right)}, & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{für } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

gilt (i bezeichne die imaginäre Einheit) und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem.

Aufgabe 4.5 (Programmieraufgabe)[6 Punkte]
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass eine Quadraturformel Q_m auf m Knoten genau dann Exaktheitsgrad $q \geq m-1$ besitzt, wenn ihre Gewichte die Form

$$w_i = \int_a^b l_i(x)dx, \qquad i = 1, \ldots, m$$

haben (Satz 1.9). Im Fall äquidistanter Knoten $a < x_1 < \cdots < x_m < b$ (Beachte: Die Randpunkte sind nicht enthalten) und konstanter Gewichtsfunktion $w = 1$, heißen diese Quadraturformeln *offene Newton-Cotes Formeln.*

1. Implementieren Sie die Funktion `[Qm,w] = NewtonCotes(f,a,b,m)`, um das Integral

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx$$

anzunähern.
Gehen Sie hierzu wie folgt vor: Da Q_m Exaktheitsgrad $m-1$ hat, werden insbesondere die Monome $1, x, x^2, \ldots x^{m-1}$ exakt integriert. Das heißt die Gewichte genügen dem Gleichungssystem

$$Q_m[x^k] = \sum_{j=1}^{m} w_j x_j^k = \int_a^b x^k dx, \qquad k = 0, \ldots, m-1.$$

Schreiben Sie dieses lineare Gleichungssystem in Matrixform, bestimmen Sie die Gewichte mittels des \-Operators in `MATLAB` und berechnen Sie anschließend Q_m. Geben Sie den Wert Q_m in `Qm` und den Gewichtsvektor $(w_1, \ldots, w_m)$ in `w` zurück.

2. Nutzen Sie Aufgabe 4.4 um die `MATLAB`-Funktion `Qm = GaussTscheby(f,m)` zu implementieren, welche mittels der Gauß-Tschebyscheff-Quadratur auf m Knoten das Integral

$$I[f,w] = \int_{-1}^{1} f(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

approximiert.

Die Funktion `vergleiche_NewtonCotes_GaussTscheby` nutzt Ihre Implementationen von `GaussTscheby` und `NewtonCotes`, um für verschiedene Werte von m das Integral

$$\int_{-1}^{1} \log_{10}(1-x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\pi \log_{10}(2)$$

zu berechnen. Anschließend wird der Integrationsfehler beider Methoden gegen die Anzahl an Stützstellen dargestellt, was beobachten Sie?
(Funktionsaufruf `vergleiche_NewtonCotes_GaussTscheby(@NewtonCotes,@GaussTscheby)`)

Hinweise zur Übungsblattbearbeitung:

- Zu schriftlichen Aufgaben soll eine Ausarbeitung/Lösung angefertigt werden, die bis zum 14.11.2023 um 10:00 Uhr in Fach 17 abzugeben ist. Die Abgabe und Bearbeitung der schriftlichen Aufgaben darf in Zweiergruppen erfolgen.

- Zu Programmieraufgaben ist bis zum 14.11.2023 um 10:00 Uhr ein MATLAB-Quellcode zu schreiben, welcher in den `MATLAB`-Grader einzugegeben ist und dort automatisiert korrigiert wird. Die Abgabe wird gewertet und kann nicht mehr geändert werden, sobald Sie den Senden-Button klicken.

- Zu **Votieraufgaben** wird keine schriftliche Abgabe verlangt. Die Lösung wird in der Übung besprochen.