

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Berechnen und zeichnen Sie die Wurzelsysteme der folgenden Lie-Algebren:

- (a) $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$
- (b) $\mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$
- (c) $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$

Hinweise:

- Verwenden Sie für (a) und (c) die Aussage von Blatt 3 Aufgabe 2.
- Für (b) können Sie annehmen, dass die Killing-Form für $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ die folgende Gestalt hat: $B(X, Y) = (2n + 2) \cdot \text{Tr}(XY)$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Wir betrachten die Lie-Algebra \mathfrak{g}_2 . Diese ist gegeben durch das Wurzelsystem $\mathfrak{G}_2 = (V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Delta)$. Hierbei ist $V = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, e_1 + e_2 + e_3 \rangle = 0\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das vom Standardskalarprodukt auf \mathbb{R}^3 erzeugte Skalarprodukt und $\Delta = \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_2 - e_3), \pm(e_1 - e_3)\} \cup \{\pm(2e_1 - e_2 - e_3), \pm(2e_2 - e_1 - e_3), \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\}$.

- (a) Zeichnen Sie das Wurzelsystem.
- (b) Zeigen Sie zusätzlich, dass es sich bei \mathfrak{G}_2 um ein Wurzelsystem handelt.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ eine Wurzelraumzerlegung für eine komplexe halbeinfache Lie-Algebra \mathfrak{g} . Sei des Weiteren Δ' eine Teilmenge von Δ , die ein Wurzelsystem in \mathfrak{h}_0^* bildet. Zeigen Sie an einem Beispiel, dass $\mathfrak{s} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta'} \mathfrak{g}_\alpha$ nicht eine Unter algebra von \mathfrak{g} sein muss.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zusatzaufgabe: „ \mathfrak{sl}_2 -Darstellungen sind immer und überall“

Wir betrachten QM den Vektorraum der Quasi-Modulformen. Gegeben seien die folgenden Operatoren:

$$D(\phi) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\phi}{d\tau} \quad \text{für } \phi \in QM, \quad W(\phi) = k\phi \quad \text{für } \phi \in QM \text{ vom Gewicht } k$$
$$\text{und } \mathfrak{d}(\phi) = 12F'(P) \quad \text{für } \phi = F(P) \in QM,$$

wobei F ein Polynom mit Koeffizienten in Modulformen ist und $P = -24G_2$.

(a) Zeigen Sie, dass D , W und \mathfrak{d} Derivationen auf dem Vektorraum der Quasi-Modulformen sind.

(b) Beweisen Sie außerdem die folgenden Relationen bezüglich des Kommutators:

$$[W, D] = 2D, \quad [W, \mathfrak{d}] = -2\mathfrak{d}, \quad [\mathfrak{d}, D] = W$$

(c) Weisen Sie nach, dass QM somit zu einer \mathfrak{sl}_2 -Darstellung wird.