

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass zwei einfache Wurzeln im Dynkin-Diagramm, die durch eine einfache Kante verbunden sind, im selben Orbit der Weyl-Gruppe liegen.
- (b) Wir betrachten ein irreduzibles Wurzelsystem. Zeigen Sie, dass alle Wurzeln der gleichen Länge eine einzige Bahn unter der Weil-Gruppe bilden.

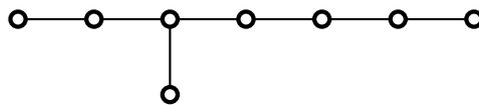
Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien α und β zwei verschiedene einfache Wurzeln in einem reduzierten Wurzelsystem, die durch n ($0 \leq n \leq 3$) Kanten im Dynkin-Diagramm verbunden sind. Des Weiteren seien s_α und s_β die dazugehörigen Reflexionen. Zeigen Sie, dass

$$(s_\alpha s_\beta)^k = 1, \quad \text{wobei } k = \begin{cases} 2, & \text{falls } n = 0 \\ 3, & \text{falls } n = 1 \\ 4, & \text{falls } n = 2 \\ 6, & \text{falls } n = 3 \end{cases}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Das Dynkin-Diagramm E_8 ist gegeben durch



Die einfachen Wurzeln von E_8 sind gegeben durch

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_8 - e_7 - e_6 - e_5 - e_4 - e_3 - e_2 + e_1)$$

$$\alpha_2 = e_2 + e_1$$

$$\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2} \text{ für } i = 3, 4, 5, 6, 7, 8.$$

- a) Finden Sie das reduzierte Wurzelsystem zu E_8 .
- b) Was ist die Dimension der komplexen halbeinfachen Liealgebra von Typ E_8 .