

Aufgabenblatt 2

1 Kontraposition

Identifizieren Sie die einzelnen Aussagen, aus denen die folgenden Implikationen zusammengesetzt sind. Bilden Sie die Kontraposition. Seien n, m ganze Zahlen und r eine reelle Zahl.

- i) Wenn r irrational ist, dann auch \sqrt{r} .
- ii) Wenn $n + m$ gerade ist, dann sind n und m beide gerade oder beide ungerade.

2 Indirekte Beweismethoden

- i) Zeigen Sie mit einem Widerspruchsbeweis, dass keine ganzen Zahlen n, m existieren, sodass $18m + 6n = 1$.
- ii) Sei n eine ganze Zahl. Zeigen Sie die Äquivalenz: $11n - 7$ ist gerade genau dann, wenn n ungerade ist. Welche Beweismethode verwenden Sie für die jeweilige Richtung?

3 Induktion - Summe

Zeigen Sie: Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist die Summe der ungeraden Zahlen

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

4 Induktion - Teilbarkeit

Zeigen Sie: Für alle natürlichen Zahlen n ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar.

5 *Euklidzahlen

Sei n eine natürliche Zahl. Definiere die n -te Euklidzahl als das Produkt der ersten n aufeinanderfolgenden Primzahlen plus 1, d.h.

$$e_n = p_1 \cdots p_n + 1.$$

Die Zahlenfolge startet wie folgt: $e_1 = 3, e_2 = 7, e_3 = 31$.

- i) Was sagt der Beweis von Satz 16 über e_n ?
- ii) Was ist die letzte Ziffer von e_n für $n \geq 3$ in der Dezimaldarstellung?
- iii) Sind alle Euklidzahlen Primzahlen?

Es ist ein offenes Problem, ob es unendlich viele Euklidzahlen gibt, die Primzahlen sind.
