GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 4

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

08. - 12. April 2024, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H8

Tagesablauf Vorkurs

10:15-11:45 Uhr	Vorlesung in H8.
11:45-13:15 Uhr	Mittagessen, zum Beispiel in der Mensa nebenan.
13:15-14:15 Uhr	Übungszeit: Bearbeitung der Aufgabenblätter in Kleingruppen in H4 und H8.
14:15-14:45 Uhr	Besprechung der Übungsaufgaben

Hinweis zu Vorlesungszeiten

Oft werden an deutschen Universitäten die Vorlesungszeiten „cum tempore"(lat. mit Zeit) oder kurz **c.t.** angegeben: Unsere Vorlesungszeit ist 10-12 Uhr c.t.

Einführung in die Mengenlehre

Seien M, N Mengen.

$N \subset M$	Teilmenge	$M \cap N$	Schnitt
$M \cup N$	Vereinigung	$\varnothing = \{\}$	leere Menge
N^c	Komplement	$M \setminus N$	Differenz
$\lvert M \rvert$	Kardinalität		

Plan für heute

- Abbildungen

Abbildungen

Definition 33 (Abbildung/Funktion)

Seien M, N Mengen. Eine **Abbildung** oder Funktion f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $m \in M$ genau ein Element $f(m) \in N$ zuordnet. Wir schreiben

$$f : M \to N, \quad m \mapsto f(m).$$

Wir bezeichnen

i) M als **Definitionsmenge** oder Definitionsbereich von f,
ii) N als **Zielmenge** oder Zielbereich von f,
iii) $m \mapsto f(m)$ als **Abbildungsvorschrift**,
iv) $f(m)$ als **Bild** oder Funktionswert von $m \in M$ unter f.

Abbildungen
Beispiele

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|$ ist eine Abbildung.

ii) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \frac{n}{2}$ ist keine Abbildung, da zum Beispiel 1 kein Funktionswert in $\mathbb{N}$ zugeordnet wird.

iii) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, n \mapsto \frac{n}{2}$ ist eine Abbildung.

iv) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (y$, sodass $x = 3y)$ ist eine Abbildung, da die Gleichung eindeutig lösbar ist.

v) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (y$, sodass $y^2 = x)$ ist keine Abbildung, da die Gleichung für $x > 0$ zwei Lösungen hat, für $x < 0$ keine.

vi) $f_6 : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$, $a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3$ definiert eine Abbildung.

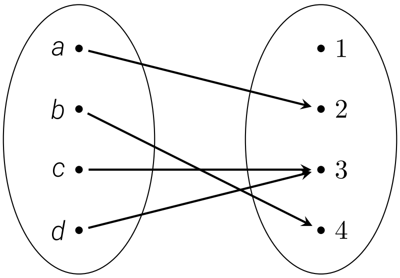

Abbildung: Pfeildiagramm der Abbildung f_6

Definition 34

Zwei Abbildungen $f : M_1 \to N_1, g : M_2 \to N_2$ sind gleich, wenn

- sie die gleiche Definitionsmenge haben, in Zeichen $M_1 = M_2$
- sie die gleiche Zielmenge haben, in Zeichen $N_1 = N_2$, und
- die Abbildungsvorschrift übereinstimmt, in Zeichen $\forall m \in M_1 = M_2 : f(m) = g(m)$.

Beispiel:

i) Die Abbildungen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|$ und $g_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|$ sind nicht gleich.

ii) Die Abbildungen $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (y$, sodass $x = 3y)$ und die Abbildung $g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{3}$ sind gleich.

Bild und Urbild

Definition 35

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Seien $T \subset M, S \subset N$ Teilmengen, dann ist

- das Bild $f(T)$ von T unter f definiert als die Menge

$$f(T) = \{n \in N \mid \text{es existiert } t \in T : f(t) = n\} \subset N.$$

- das Urbild $f^{-1}(S)$ von S unter f definiert als die Menge

$$f^{-1}(S) = \{m \in M \mid f(m) \in S\} \subset M.$$

- das Bild der Abbildung f die Menge $f(M) \subset N$.

Vorsicht: Bild und Urbild sind für Mengen definiert.
Sei $m \in M$, dann ist $f(m) \in M$ der Funktionswert, aber $f(\{m\}) = \{f(m)\}$ das Bild von $\{m\}$ unter f.

Bild und Urbild

$$f_6 : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\},$$
$$a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 3$$

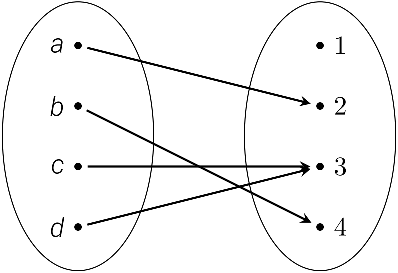

Abbildung: Pfeildiagramm der Abbildung f_6

Bilder:

$f_6(\{c, d\}) = \{3\}$.

$f_6(\{a, b\}) = \{2, 4\}$.

Das Bild von f_6 ist $\{2, 3, 4\}$.

Urbilder:

$f_6^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.

$f_6^{-1}(\{1, 2, 4\}) = \{a, b\}$.

$f_6^{-1}(\{3\}) = \{c, d\}$.

Definition 36

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **injektiv**, wenn für alle $n, m \in M$ gilt, falls $n \neq m$ dann $f(n) \neq f(m)$.

- Obige Abbildung f_6 ist nicht injektiv, da $f(c) = f(d)$, aber $c \neq d$.
- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|$ ist nicht injektiv, da $f(1) = f(-1)$.
- $g_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|$ ist injektiv.

Um die Injektivität zu beweisen, zeigt man die Kontraposition. Das heißt wir zeigen

„Sei $m, n \in M$ mit $f(m) = f(n)$, dann folgt $m = n$.“

Beweis der Injektivität von g_1.

Sei $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass $2|x| = 2|y|$. Da $x, y \geq 0$ folgt $2x = 2y$, also $x = y$. Damit ist g_1 injektiv. $\square$

Definition 37

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **surjektiv**, wenn für alle $n \in N$ ein $m \in M$ existiert, sodass $f(m) = n$.

- Obige Abbildung f_6 ist nicht surjektiv, da für kein $m \in \{a, b, c, d\}$ gilt $f(m) = 1$.
- $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2|x|$ ist nicht surjektiv, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2|x| \geq 0$.
- $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto 2|x|$ ist surjektiv.

Für den Beweis der Surjektivität müssen wir für jedes $n \in N$ ein Urbild $m \in f^{-1}(n)$ finden.

Beweis der Surjektivität von h_1.

Sei $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann ist $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$, sodass $h_1(x) = 2|\frac{y}{2}| = y$. Damit ist h_1 surjektiv. $\square$

Definition 38

Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Charakterisierung in Form der Urbilder:

injektiv	Alle $n \in N$ haben höchstens ein Urbild unter f.
surjektiv	Alle $n \in N$ haben mindestens ein Urbild unter f.
bijektiv	Alle $n \in N$ haben genau ein Urbild unter f.

Beispiel: $F_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto 2|x| = 2x$ ist bijektiv.

Definition 39

Sei $f : M \to N$ eine bijektive Abbildung, dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : N \to M$ definiert durch

$$n \mapsto (m, \quad \text{sodass} \quad f(m) = n).$$

Mehr Beispiele

- $F_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto 2x$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion von F_1 ist $F_1^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto \frac{1}{2}x$.
- $G : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $G^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n - 1$.
- $H : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ mit

  $$a \mapsto 2, b \mapsto 4, c \mapsto 3, d \mapsto 1$$

  ist bijektiv. Die Umkehrabbildung $H^{-1} : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d\}$ ist gegeben durch

  $$1 \mapsto d, 2 \mapsto a, 3 \mapsto c, 4 \mapsto b.$$