Vorkurs Mathematik für Mathematikstudierende

Tag 5

Dr. Johannes Horn
horn@math.uni-frankfurt.de

08. - 12. April 2024, 10.15 - 11.45 Uhr,
Hörsaal H8

Eigenschaften von Abbildungen

Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann ist f

injektiv	$\Leftrightarrow$	Alle $n \in N$ haben höchstens ein Urbild unter f.
surjektiv	$\Leftrightarrow$	Alle $n \in N$ haben mindestens ein Urbild unter f.
bijektiv	$\Leftrightarrow$	Alle $n \in N$ haben genau ein Urbild unter f.

Plan für heute

i) Mächtigkeit von Mengen und Abbildungen
ii) Modulo Rechnen
iii) Anwendung des Modulo rechnen: Fehlerkorrektur.

Satz 40

Seien M, N endliche Mengen und $f : M \to N$ eine Abbildung.

i) *Wenn f injektiv ist, dann gilt $|M| \leq |N|$.*
ii) *Wenn f surjektiv ist, dann gilt $|M| \geq |N|$.*
iii) *Wenn f bijektiv ist, dann gilt $|M| = |N|$.*

Beweis.

Zu i): Sei $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$. Dann definiert

$$\{f(m_1), f(m_2), \ldots, f(m_k)\} \subset N$$

eine Teilmenge von N. Da f injektiv ist, gilt $f(m_i) \neq f(m_j)$ für $i \neq j$. Also ist

$$|N| \geq |\{f(m_1), f(m_2), \ldots, f(m_k)\}| = k = |M|.$$

Beweis.

Zu ii): Sei $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_l\}$. Da f surjektiv ist, existiert für jedes n_i eine $m_i \in M$ mit $f(n_i) = m_i$. Da f eine Abbildung ist, gilt $m_i \neq m_j$ für $i \neq j$. Also ist

$$|M| \geq |\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}| = l = |N|.$$

Zu iii): Falls f bijektiv ist, dann ist f injektiv und surjektiv. Also gilt $|M| \leq |N|$ und $|M| \geq |N|$. Folglich ist $|M| = |N|$. □

Modulo Rechnen

Lemma 41 (Teilen mit Rest)

Sei $n, m \in \mathbb{Z}$ und $m > 1$, dann existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $r \in \{0, \ldots, m-1\}$, sodass

$$n = km + r.$$

Beweis.

Definiere $k \in \mathbb{Z}$ als die größte ganze Zahl, sodass $mk \leq n$. Existiert da n eine obere Schranke. Dann ist $r := n - mk \in \{0, \ldots, m-1\}$. $\square$

Definition 42

In der Situation des obigen Lemmas bezeichnen wir r als den Rest von n beim Teilen durch m und schreiben kurz $r = n \mod m$ ("n modulo m").

Modulo Rechnen

Beispiel: $10 \mod 3 = 1, \quad 10 \mod 11 = 10, \quad 10 \mod 5 = 0.$

Nach Definition gilt: $n = 0 \mod m$ genau, dann wenn $m|n$.

Lemma 43

Seien $n_1, \dots, n_4 \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sodass

$$n_1 = n_2 \mod m \quad \textit{und} \quad n_3 = n_4 \mod m,$$

dann ist

- i) $n_1 + n_3 \mod m = n_2 + n_4 \mod m$.
- ii) $n_1 n_3 \mod m = n_2 n_4 \mod m$.

Beispiel: $37 + 65 \mod 3 = 1 + 2 \mod 3 = 0 \mod 3 \quad \Rightarrow 3 \mid 37 + 65.$

Beweis von Lemma 43.

Seien $k_i \in \mathbb{Z}$ und $r_i \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $n_i = k_i m + r_i$. Nach Voraussetzung ist $r_1 = r_2$ und $r_3 = r_4$.

i) Es ist $n_1 + n_3 = (k_1 + k_3)m + r_1 + r_3$ und $n_2 + n_4 = (k_2 + k_4)m + r_1 + r_3$. Dann existiert $k \in \{0, 1\}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $r_1 + r_2 = km + r$. Also ist $n_1 + n_3 = (k_1 + k_2 + k)m + r$ und $n_2 + n_4 = (k_2 + k_4 + k)m + r$. Insbesondere stimmen die Reste beim Teilen durch m überein.

ii) Es ist $n_1 n_3 = k_1 k_3 m^2 + (k_1 r_3 + r_1 k_3)m + r_1 r_3$ und $n_2 n_3 = k_2 k_4 m^2 + (k_2 r_4 + r_2 k_4)m + r_2 r_4$. Dann existiert $k \in \{0, \dots, m-1\}$ und $r \in \{0, \dots, m-1\}$, sodass $r_1 r_2 = km + r$. Dann ist $n_1 n_3 = k_1 k_3 m^2 + (k_1 r_3 + r_1 k_3 + k)m + r$ und $n_2 n_3 = k_2 k_4 m^2 + (k_2 r_4 + r_2 k_4 + k)m + r$. Damit stimmen die Reste beim Teilen durch m überein.

$\square$

Wochentage berechnen

An welchem Wochentag habe ich 2050 Geburtstag?

Angenommen dieses Jahr haben Sie an einem Sonntag nach dem 29.02.24 Geburtstag. Identifizieren wir die Wochentage mit

$$0 = \text{Sonntag}, \quad 1 = \text{Montag}, \quad \ldots, \quad 6 = \text{Samstag}$$

Das heißt wir rechnen modulo 7. Das Jahr hat 365 Tage bzw. 366 in einem Schaltjahr.

$$365 = 1 \mod 7, \quad 366 = 2 \mod 7.$$

Bis 2050 sind es 26 Jahre und davon sind 6 Schaltjahre: 2028, 2032, 2036, 2040, 2044, 2048.

$$20 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 6 + 5 = 4 \mod 7.$$

Das heißt 2050 haben Sie an einem Donnerstag.

Dezimaldarstellung und Quersumme

Die Dezimaldarstellung ganzer Zahlen ist eine Konvention in unserer Gesellschaft Zahlen aufzuschreiben. So ist

$$657 = 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Allgemeiner meint eine Dezimaldarstellung

$$n_k \dots n_0 = n_k \cdot 10^k + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$$

Definition 44

Die Quersumme einer ganzen Zahl n mit Dezimaldarstellung $n_k \dots n_0$ ist

$$n_k + \dots + n_0.$$

Teilbarkeitskriterium

Satz 45

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Die Quersumme von n ist durch 3 teilbar genau dann, wenn n durch 3 teilbar ist.

Beweis.

Sei $n = n_k \dots n_0$ in Dezimaldarstellung. Wir verwenden Lemma 43 und dass $10 = 1 \mod 3$. Dann ist

$$n \mod 3 = n_k \cdot 10^k + \cdots + n_1 \cdot 10 + n_0 \mod 3 = n_k \cdot 1 + \cdots + n_1 \cdot 1 \mod 3.$$

Der letzte Ausdruck ist die Quersumme. Also gilt

$$\begin{aligned} 3 \mid n \quad &\Leftrightarrow n = 0 \mod 3 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Quersumme} = 0 \mod 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 3 \mid \text{Quersumme}. \end{aligned}$$

□

Fehlerprüfung durch Modulo Rechnen

Problem:

i) Bei der Übermittlung von Zahlencodes werden einzelne Ziffern falsch übergeben oder gehen verloren.
ii) Menschen neigen zu Tippfehlern oder Zahlendreher bei Zahlencodes.

. Diese Fehler kann man durch das Hinzufügen von Prüfziffern zum Zahlencode feststellen. Hierbei wird oft das Modulo Rechnen verwendet.

Beispiel 46 (ISBN-10)

ISBN-10 (International Standard Book Number) wurde bis 2007 für die Identifizerung von Bücher verwendet. Eine ISBN-10 besteht aus 10 Ziffern

$$a_0\text{-}a_1a_2a_3\text{-}a_5a_6a_7a_8a_9\text{-}a_{10}$$

Hierbei sind $a_1, \ldots, a_9 \in \{0, \ldots, 9\}$ und die letzte Ziffer a_{10} kann zusätzlich den Wert X für 10 annehmen.

Fehlerprüfung bei der ISBN-10

Für eine gültige ISBN-10 gilt die Gleichung

$$10a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 7a_4 + 6a_5 + 5a_6 + 4a_7 + 3a_8 + 2a_9 + a_{10} = 0 \mod 11. \tag{1}$$

Angenommen ein Nutzer tippt eine Zahl falsch ein, dann kann diese Gleichung nicht mehr gelten.

Satz 47

Sei $a_1 \dots a_{10}$ eine gültige ISBN-10. Wenn wir genau eine Ziffer a_i ändern, ist Gleichung (1) *falsch.*

Beweis.

Angenommen der Fehler passiert an der Stelle i. D.h. wir ersetzen a_i durch $b_i \neq a_i$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&10a_1 + 9a_2 + \cdots + +(11-i)b_i + \cdots + a_{10} \\
=&a_1 + 2a_2 + \cdots + (11-i)b_i - (11-i)a_i + (11-i)a_i + \cdots + a_{10} \\
=&i(b_i - a_i) \mod 11.
\end{aligned}$$

Da $i < 11$ und 11 eine Primzahl, ist dies nur gleich 0 modulo 11 teilbar, wenn $b_i - a_i$ durch 11 teilbar ist. Da aber

$$b_i - a_i \in \{-10, -9, \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots, 9, 10\}$$

ist dies nie der Fall. Also ist die Gleichung nicht erfüllt, wenn ein Tippfehler vorliegt. □

Auch Zahlendreher werden mit diesem Prüfverfahren zuverlässig erkannt. Seit 2007 wird die 13stellige Ziffernfolge ISBN-13 verwendet. Diese hat einen ähnlichen Prüfalgorithmus, der Tippfehler erkennt. Allerdings nicht alle Zahlendreher.

Fehlerprüfung bei der IBAN

Die IBAN (International Bank Account Number) besitzt einen sehr guten Prüfalgorithmus. Hier wird modulo 97 gerechnet und es werden Einzelfehler, Zahlendreher und Verschiebungen in der Ziffernfolge erkannt.
Für ein fiktives Bankkonto mit der IBAN

$$\text{DE}68210501700012345678$$

bei einer deutschen Bank funktioniert die Prüfung wie folgt:

i) Ersetze DE durch die Zahlen 1314:
131468210501700012345678

ii) Setze die ersten 6 Ziffern an das Ende der Nummer:
210501700012345678131468

iii) Berechne diese Zahl minus Eins modulo 97:
$210501700012345678131467 \mod 97 = 0$

Wenn das Ergebnis 0 ist, ist die Prüfung bestanden.

Tipps für das kommende Semester

1. **Suchen Sie sich eine Lerngruppe.**
2. **Reden Sie mit Ihren Kommoliton*innen über Mathematik.**
3. **Arbeiten Sie die Vorlesungen nach.**

Lernzentrum	Hier können Studierende der Mathematik die aktuellen Übungsaufgaben unter Anleitung bearbeiten, Fragen zu den Vorlesungen des Grundstudiums stellen und alleine oder in Gruppen arbeiten.
Wo	Robert-Mayer-Str. 10, Raum 405.
Wann	Mo-Fr 13-16 Uhr.

Ende

Danke fürs Mitmachen und viel Erfolg im Studium!

Ich freue mich über weiteres Feedback:

horn@math.uni-frankfurt.de