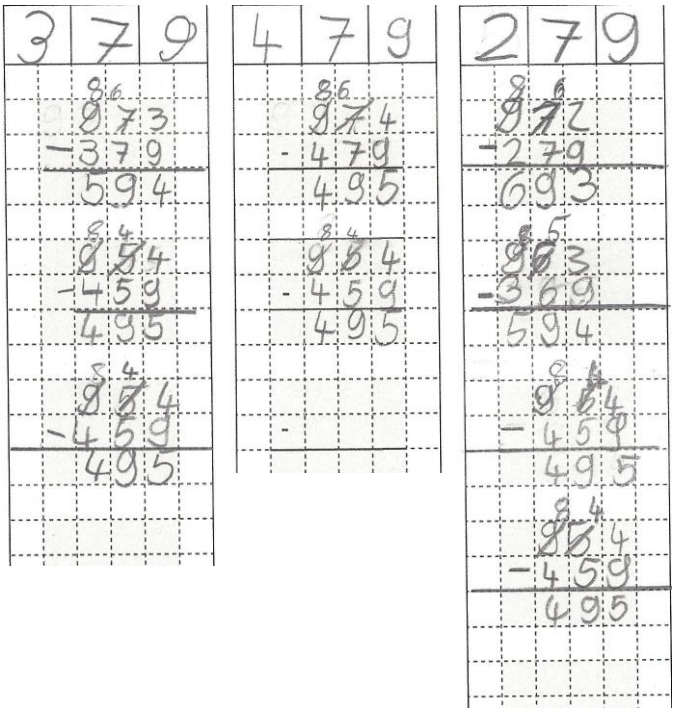
Minustürme als Grundlage für kollektive Entdeckungen in den Klassen 3 und 4

Kollektive Entdeckungen im Mathematikunterricht – Lernchancen für alle



Birgit Brandt & Gyde Höck

Kollektive Lernumgebungen bieten im Fach Mathematik auch für Lernende mit Schwierigkeiten die Möglichkeit, an Entdeckungen teilzuhaben und so zu neuen mathematischen Einsichten zu gelangen. Dies wollen wir im Folgenden am Beispiel des substantiellen Aufgabenformats Minustürme (Wittmann & Müller 1992) vorstellen.

Belen[1] lehnt sich über den Tisch und ruft gestikulierend: *„Das muss man nach Größe ordnen, groß, groß, groß, dann immer kleiner, immer kleiner, dann wird´s immer kleiner!“* Das Mädchen ihr gegenüber erwidert an eine dritte Partnerin gewand: *„Warte – die hat Recht!“* und Belen beginnt zu singen *„Jajajajaja...“.* Ein Junge gehört ebenfalls zur Gruppe und schaut auf das große blaue Plakat, das vor ihnen auf dem Tisch liegt und auf dem Ergebnisse ihrer individuell errechneten Minustürme strukturiert gesammelt werden sollen. Es handelt sich bei dieser kleinen Situationsbeschreibung um die dritte Mathematikstunde einer Unterrichtseinheit zur kollektiven Auseinandersetzung mit dem Aufgabenformat „Minustürme“ nach dem Muster „Think – Pair –Square“ (s. unten). Im Anschluss an diese kurze Gesprächssequenz sortieren die Kinder ihre Ergebnisse auf dem gemeinsamen Plakat.

Die Einsicht in Muster und Strukturen als wichtiges übergeordnetes Ziel der Bildungsstandards Mathematik birgt zahlreiche Möglichkeiten zur kollektiven Erkundung und Erschließung bereits im Grundschulalter. Das zu Beginn beschriebene Mädchen Belen fällt in Einzelarbeiten häufig durch geringes Konzentrationsvermögen, hohen Bewegungsdrang und großes Bedürfnis nach Unterstützung durch die Lehrkraft auf. Das selbstständige Bearbeiten von Aufgaben gelingt ihr selten und jede Ab-

[1] Zur Anonymisierung sind die Namen geändert.

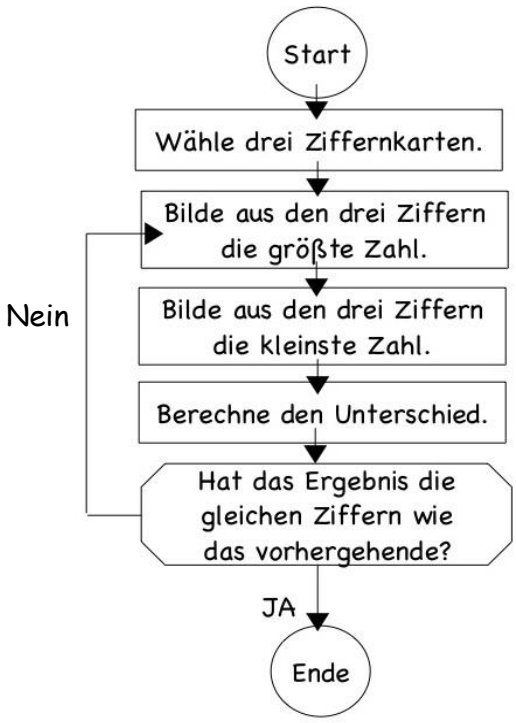
lenkung ist willkommen. Belen nahm im Rahmen des Forschungsprojektes *„Kollektive Problemlösestile“* (Brandt & Hoeck 2011) mit zusammen mit ihrer Klasse und ihrem Lernpartner Amin über ein Jahr an mehreren Unterrichtsangeboten teil, die jeweils kollektive Arbeitsformen für die Erarbeitung unterschiedlicher mathematischer Themen zu Grunde legten. Auffällig war hier, dass Belen wiederholt Entdeckungen mathematischer Art machen konnte, die von ihren jeweiligen Partnerinnen und Partnern gewürdigt wurden (s. Eingangsbeispiel), sie aber auch häufig erst durch das strukturierte Vorgehen ihrer Teampartner/innen die Möglichkeit erhielt, mathematische Besonderheiten als Muster zu erkennen und mit ihnen lernförderlich zu arbeiten.

Mary	*396*
Belen	*Aber, 396, ja!*
Mary	*396. Was kommt dann? (...) jetzt kommt 200*
Belen	*297.*
Mary	*297. Ey, fällt euch was auf? Hier ist immer 9 oder 8.*
Belen	*Ja, ge-*
Tina	*9 oder 8*
Belen	*Guck mal. [tippt auf das Plakat] 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 9, 9. Ja immer in der Mitte ist fast (immer) 9!*

Diese Entdeckung führte im Anschluss zur Kontrolle der Rechnungen, die von dem entdeckten Muster abweichen – und schließlich zur Korrektur der Ergebnisliste auf dem Poster (siehe Foto).

Durch entsprechende Aufgabenstellungen (s. Aufgabenmaterial) wurden die Schülerinnen und Schüler eines dritten Schuljahres sensibilisiert, gemeinsam mathematische Phänomene zu untersuchen und ihre Entdeckungen anderen zugänglich zu machen. Ein zentrales Anliegen war jeweils zu klären, ob alle Beteiligten das Erarbeitete verstanden haben und man sich über die Darstellung der Ergebnisse einig ist. Kinder mit Lernschwierigkeiten dürfen in solch einem Unterrichtsgefüge nicht als „Bremse“ in der Gruppenphase empfunden werden – und sie dürfen nicht bereits zu Beginn den Anschluss an die inhaltlichen Aushandlungen verlieren und in eine passive und unaufmerksame Rolle verfallen. Die Aufgabenformate für kollektive Entdeckungen müssen daher so viele neue Elemente enthalten, dass es für jeden oder jede etwas zu entdecken gibt und nicht die Leistungsstärkeren von vornherein die Tutor-Rolle innehaben und den anderen erklären, wie eine Aufgabe zu lösen ist.

Das Aufgabenformat der Minustürme eignet sich gut für ein solches Vorhaben, da es eine Vielzahl an strukturellen Besonderheiten aufweist, die bereits Grundschulkinder mathematisch herausarbeiten können (s. Kasten).



Strukturiertes Vorgehen von in diesem Sinne

kompeteren Kindern hilft hierbei gerade auch Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten, die dadurch die Chance erhalten, eigene Entdeckungen einfließen zu lassen.

Was gibt es an Minustürmen zu entdecken?

- Die Zehnerziffer jeder Differenz ist immer 9.
- Die Summe aus der Hunderterziffer und der Einerziffer ist immer 9.
- Es sind nur folgende Ergebnisse möglich: 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891[2]. (Vielfache von 99!)
- Die Hunderterziffern sind absteigend, die Einerziffer aufsteigend. (ab 2. Stockwerk)
- Das „Endergebnis“ ist 495, dann wiederholt sich die letzte Rechnung 954-459=495.
- Es gibt höchstens 5 verschiedene Stockwerke. (Spätestens im 6. Stockwerk wiederholt sich die 495.)[3]
- Die Stockwerke treten immer in der gleichen Reihenfolge auf.

Ohne ein gewachsenes Lernklima, in dem gegenseitige Wertschätzung und Verantwortlichkeit für sich selbst und seine Lernpartner/innen selbstverständlich sind, kann solch eine Kooperation allerdings nicht gelingen. Um das entsprechende Lernklima zu stärken, kann es zum Beispiel sinnvoll sein, leistungsmäßig heterogene Forscherteams zu bilden, die mit einem gemeinsam gewählten Namen zur Identifikation mit der Gruppe und der Aufgabe beitragen. Ebenso sollten immer wieder Kommunikations- und Kooperationsregeln gezielt angesprochen und nach der Partner- und Gruppenarbeit reflektiert werden, indem ein Aspekt im gemeinsamen Arbeitsauftrag mit fokussiert wird, etwa „Wir hören uns gegenseitig gut zu“ oder „Achtet darauf, dass jeder zu Wort kommt“ (siehe Arbeitsaufträge). Durch einen entsprechenden Teamvertrag, in dem die aktive Beteiligung aller besonders unterstrichen wird, kann die Integration von leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern weiter gefördert werden. Zudem ist es sinnvoll, auf Sympathien in der Partner- und Gruppenzusammensetzung zu achten – gerade auch, um Kindern mit Schwierigkeiten emotionale Sicherheit und Unterstützung zu bieten. Der Prozess der gegenseitigen Wertschätzung und Verantwortlichkeit lässt sich dabei durch längerfristige Lernpartnerschaften unterstützen.[4]

Ein klarer organisatorischer Rahmen, der das Wechselspiel zwischen eigenen Erkundigungen und den Austausch mit anderen strukturiert, kann den Kindern bei kollektiven Entdeckungen eine wertvolle Hilfe sein. Eine von Kindern im 3. und 4. Schuljahr gut zu bewältigende Kooperationsform ist „Think – Pair – Square“, in der jedes Kind zunächst alleine erste Erkundigungen machen kann, die in einer (bewährten) Partnerschaft in einem ersten Austausch zusammengeführt werden.

Think – Pair – Square

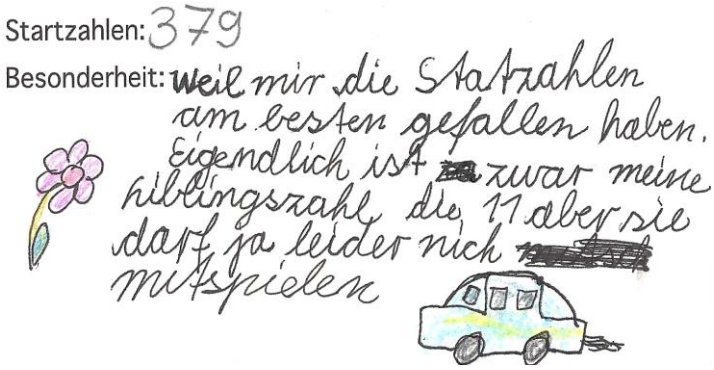
Erst allein...	...dann als Paar...	...und in der Gruppe!

[2] Die 891 tritt nur auf, wenn die 0 als Startziffer zugelassen ist.

[3] Will man auch hier Zusammenhänge erkunden, ist dieser Unterschied zu beachten und sollte sprachlich klar geregelt werden. Oft notieren die Kinder in ihren Minustürmen auch die erste Wiederholung, denn erst wenn das Ergebnis 495 nochmals auftritt, sind sie sich sicher, dass es sich wiederholt.

[4] Viele praxisnahe Anregungen und Hinweise zur gezielten Förderung kollektiver Lernprozesse gibt das Projekt „Talking and Thinking Together“. http://thinkingtogether.educ.cam.ac.uk/resources/

Abschluss bildet dann eine Vierergruppe, in der sich zwei *Paare* treffen – gerade auch leistungsschwächeren Kindern kann diese gestaffelte Kooperation zusätzlich Sicherheit geben. In der oben beschriebenen Unterrichtseinheit wurde zunächst mit einer individuellen Phase des Rechnens begonnen, indem jedes Kind eigene Minustürme nach folgendem Prinzip entwarf: Eine strukturierte Turmvorlage (Anhang) kann dabei insbesondere Kindern mit entsprechenden Schwierigkeiten behilflich sein, sich hier zunächst auf das geordnete Sammeln von Minustürmen als Datengrundlage für weitere Überlegungen zu konzentrieren.



In Partnerarbeit werden die entstandenen individuellen Produkte anschließend gemeinsam gesichtet – dabei sollte jeder Partner etwas über seine Arbeit zu *berichten* haben. Als Grundlage dient ein erster kleiner Erkundungsauftrag zur individuellen Auseinandersetzung mit den eigenen Rechnungen. Als Angebot zur natürlichen Differenzierung ist dieser nicht auf eine bestimmte strukturelle Beziehung ausgerichtet. Besonders am Minusturm kann auch eine emotionale Beziehung zu den gewählten Startzahlen sein – ein über das gesamte Leistungsspektrum beliebter Zugang.

Die systematische Veränderung der Startzahlen im Eingangsbeispiel ist wohl eher diesem emotionalen Moment geschuldet, ermöglicht aber in späteren Phasen Entdeckungen auf struktureller Ebene – etwa Zusammenhänge zwischen Startzahl und Turmhöhe.

Das gemeinsame Sichten und Sortieren der Türme kann auch Anlass sein zur gegenseitigen Kontrolle der Türme. Hier hat es sich aber gezeigt, dass die Kontrolle durch die Lehrkraft zusätzlich wichtig ist, da sich bei einschleichenden Rechenfehlern später keine Regelmäßigkeiten feststellen lassen (vgl. auch PIK AS[5]). Dies ist gerade für die Kinder mit Lernschwierigkeiten von großer Bedeutung, da sonst Irritationen überhand nehmen und Misserfolge vorprogrammiert sind. Wenn, wie im oben stehenden Beispiel, sich eine „8“ zwischen die Neunen schiebt, ist dies als Fehler schnell festzustellen und verhindert nicht die Entdeckung, dass sich auf der Zehnerstelle jeweils die „9“ befindet. So hält dies die Gruppe um Belen – nach dem obigen Gesprächsausschnitt – auf ihrem Plakat fest.

In der Vierergruppe steht den Kindern ausreichend Material für vielfältige Erkundung zur Verfügung – dabei sind sie mit einem Teil durch die Partnerarbeit schon recht gut vertraut und können sich so leichter einen Gesamtüberblick verschaffen. Der Gruppenauftrag zielt nun genauer auf eine strukturelle Besonderheit der Minustürme: die Ergebniszahlen. Nach der ersten Rechnung mit frei gewählten Startzahlen treten die „Stockwerke“ der Minustürme

[5] http://www.pikas.tu-dortmund.de/upload/Material/Haus_7_-_Gute_-_Aufgaben/IM/Informationstexte/Haus_7_IM_Minustuerme.pdf

immer in einer festen Reihenfolge auf, dabei kann natürlich bereits die erste Rechnung das „Endergebnis“ (495) ergeben – die fett gedruckten Ergebnisse treten, wenn überhaupt, nur im ersten Rechenschritt auf:

198 **891**	**297** 792	**396** 693	594	495

Durch die dritte Phase des „Square“, in der die kontrollierten Ergebnisse aller Gruppenmitglieder in das Gesamtergebnis einfließen, erfahren gerade auch die leistungsschwächeren Kinder eine konkrete Teilhabe am gemeinsamen Arbeitsprozess und am Gruppenprodukt. Allein das Einbringen eines eigenen Turms kann als individuelles Involviertsein bereits eine günstige Ausgangsbasis für nachhaltige Lernerfolge schaffen – so findet sich auf dem Plakat der oben erwähnten Gruppe auch die Bemerkung: *„uns ist aufgefallen das Amin und Belen jeweils 3 Türme haben.“* Welche der möglichen Besonderheiten dieser sich wiederholenden Ergebniszahlen dann von den Gruppen betrachtet wird, ist hingegen nicht festgelegt. Durch das Auflisten der Ergebniszahlen der Größe nach und untereinander ist die sich wiederholende „Mitte“ besonders auffällig. Sogar die mathematische Begründung für das Auftauchen der „9“ konnte somit zusammen erschlossen werden (siehe Bild). Nachdem also in der individuellen Arbeitsphase dieser Übertrag immer wieder – auch von Belen – „geübt“ wurde, wird nun in der Gruppenphase dieser Übertrag begründend in den Blick genommen und so Einsicht in den Algorithmus gewonnen.

Im anschließenden Klassenplenum, in dem die verschiedenen Gruppenergebnisse vorgestellt und gewürdigt werden, zeigt sich zunächst die Vielfalt der Entdeckungen. Hier können und sollten nun auch die Beziehungen der verschiedenen Entdeckungen angesprochen werden – dabei ist die Lehrperson besonders gefordert, da sie dafür verantwortlich ist, die gesammelten Entdeckungen fachlich richtig und kindgemäß im Gespräch zusammenzuführen und Klarheit über die besonderen Strukturen der Minustürme für alle zu schaffen. Die intensive Auseinandersetzung im Vorfeld mit mathematischen Gesprächen in vertrauten Partnerschaften und Kleingruppen kann gerade leistungsschwächeren Kindern eine Stütze sein, in diesen Gesprächen länger „am Ball“ zu bleiben und verschiedene Ideen mit der eigenen Einsicht zu verknüpfen.

Im Forschungsprojekt *„Kollektive Problemlösestile“* wurden die Kinder im Anschluss an den letzten Unterrichtsbaustein jeweils zusammen mit der jeweiligen Lernpartnerin / dem jeweiligen Lernpartner über ihre Erfahrungen interviewt. Alle Kinder haben sich positiv geäußert – und würden ihre Partnerschaften gerne im Mathematikunterricht weiter führen. Auch Belen ist in diesem abschließenden Interview überzeugt davon, dass man zusammen besser rechnen kann als allein und als ihr Partner Amin meint, er rechnet am liebsten mit Mädchen, wie ihr, weil: *„Ja weil die so schlauer sind als ich und so ja“,* bleibt ihr der Mund offen stehen.

Literatur:

Brandt, B. und Höck, G. (2011): Ko-Konstruktion in mathematischen Problemlöseprozessen - partizipationstheoretische Überlegungen. In: Brandt, B., Vogel, R. und Krummheuer, G. (Hrsg.) (2011): Die Projekte erStMaL und MaKreKi. Mathematikdidaktische Forschung am „Center for Individual Development and Adaptive Education“ (IDeA) (S. 245-284). Münster: Waxmann.

Wittmann, E. & Müller, G. (1992): Handbuch produktiver Rechenübungen. Leipzig: Klett.

Minustürme bauen

Wähle drei verschiedene Ziffern zwischen 0 und 9, z.B. 3, 0 und 7. Bilde die größte und die kleinste Zahl mit den drei Ziffern und berechne die Differenz, also 730-37=693. Aus den Ziffern des Ergebnisses bildest du wieder die größte und die kleinste Zahl. Rechne so lange, bis sich das Ergebnis wiederholt.

Wähle verschiedene Startzahlen und baue verschiede Minustürme. Benutze die Turmvorlage!

- Suche dir den Turm aus, der dir am besten gefällt. Was findest du besonders an ihm. Erkläre!
- Hast du noch andere Ideen, Entdeckungen oder Fragen zu Minustürmen? Schreibe sie auf eine Entdeckerkarte!

Minustürme vergleichen und sortieren

Stellt euch gegenseitig eure besonderen Minustürme vor – erklärt genau, was das Besondere daran ist.

Vergleicht und ordnet alle Türme sinnvoll. Erklärt, wie ihr sortiert habt.

- Was ist euer höchster Turm, was euer niedrigster? Welche Startzahlen habt ihr für die besonders hohen und besonders niedrigen Türme gewählt?
- Habt ihr noch andere Ideen, Entdeckungen oder Fragen? Schreibt sie zusammen auf eine Entdeckerkarte!

Ergebniszahlen von Minustürmen

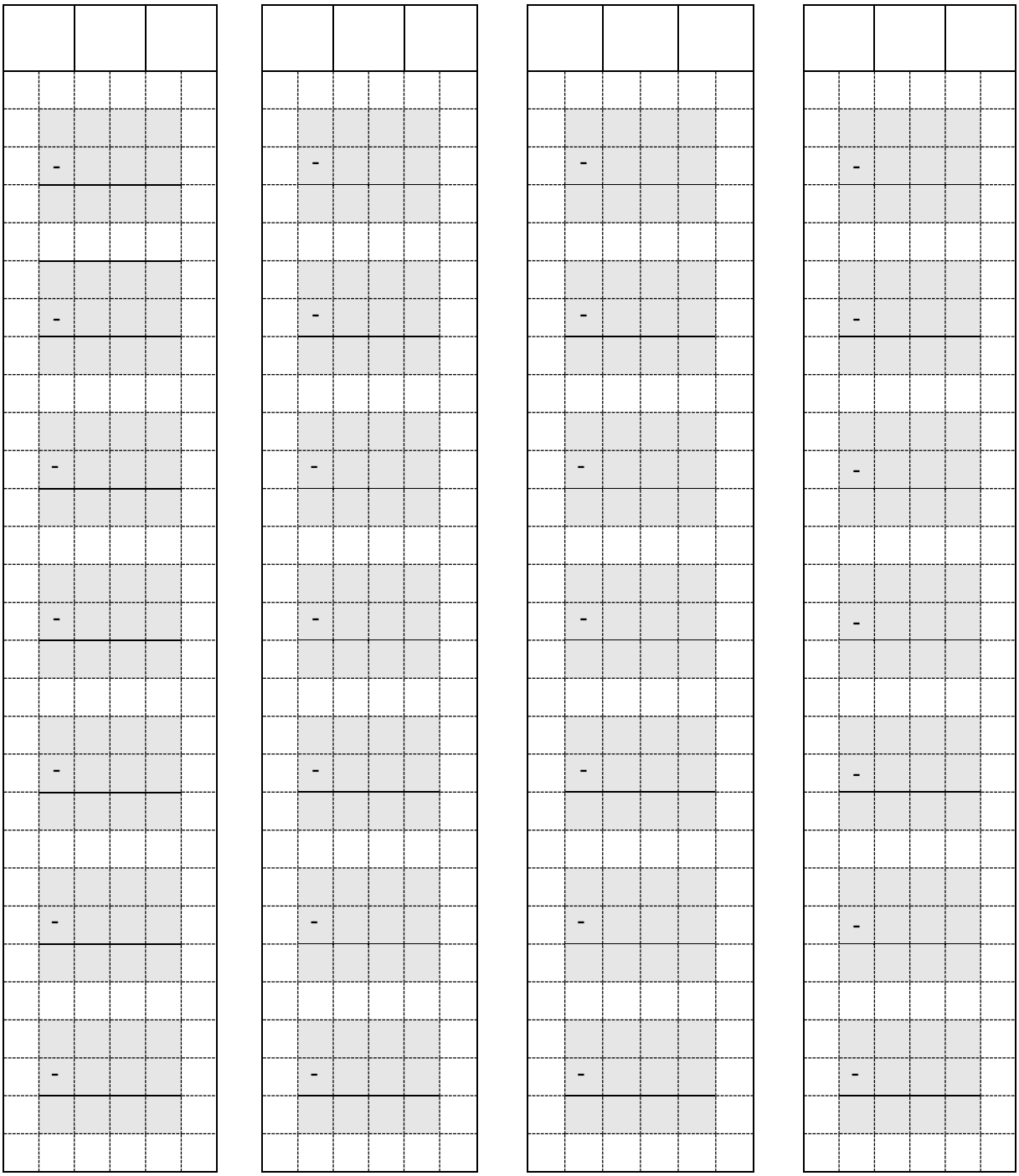
Ihr sollt zusammen ein Plakat zu Minustürmen erstellen. Sammelt und vergleicht dazu von euren Minustürmen die Ergebnisse aus allen Stockwerken.

Sortiert die Ergebnisszahlen sinnvoll und schreibt sie für eure Präsentation auf das Plakat. Erklärt, wie ihr sortiert habt. Schaut euch die Zahlen gut an. Was fällt euch auf?

- Sammelt zunächst möglichst viele verschiedene Gedanken auf einer Ideenliste. Achtet darauf, dass jeder zu Wort kommt!
- Einigt euch auf eine besondere gemeinsame Entdeckung. Schreibt sie auf euer Plakat, so dass andere sie gut verstehen können. Findet ihr eine Erklärung für diese Entdeckung?

So haben wir sortiert:

Turmvorlage



Mein besonderer Turm:

Startzahlen: