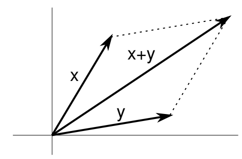
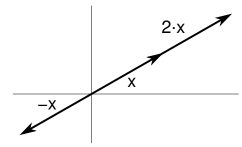
Vektoren

Vektoren





Ein (reeller) Koordinatenvektor ist ein n-Tupel $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit Einträgen $x_i \in \mathbb{R}$. Für Koordiatenvektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und Zahlen $a \in \mathbb{R}$ definiert man nun folgende Operationen

- Vektoraddition: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- Skalarmultiplikation: $a \cdot \vec{x} = (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)$

Die Menge der Koordinatenvektoren bildet mit diesen Operationen einen Vektorraum, den Koordinatenraum.

Eigenschaften

Die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation erfüllen für $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Gesetze:

- Assoziativgesetz: $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$
- Kommutativgesetz: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Gemischtes Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot \vec{x}) = (a \cdot b) \cdot \vec{x}$
- Distributivgesetze: $a \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = a \cdot \vec{x} + a \cdot \vec{y}$ und $(a + b) \cdot \vec{x} = a \cdot \vec{x} + b \cdot \vec{x}$
- Existenz eines neutralen Elements: $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ mit $\vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
- Existenz eines inversen Elements: $-\vec{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$ mit $\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = 0$
- Neutralität der Eins: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Skalarprodukt und Kreuzprodukt

Weitere wichtige Operationen sind:

- Skalarprodukt: $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_n \cdot y_n$
- Kreuzprodukt: $\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2,\ x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3,\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$ (nur in 3D)

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann 0, wenn die Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren ergibt einen neuen Vektor, der senkrecht auf beiden steht.

Länge und Abstand

Die Länge (der Betrag) eines Vektors und der Abstand zweier Vektoren sind dann:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \quad \text{und} \quad |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$$

Geraden

Eine Gerade ist die Menge der Punkte

$$g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{r} + a \cdot \vec{v} \text{ mit } a \in \mathbb{R}\} \quad \text{bzw.} \quad g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (\vec{r} - \vec{x}) \cdot \vec{n} = 0\} \quad \text{(nur in 2D)}$$

wobei $\vec{r}$ der Koordinatenvektor eines Geradenpunkts, $\vec{v}$ ein Richtungsvektor der Gerade und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Gerade sind.

Ebenen

Eine Ebene ist die Menge der Punkte

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} = \vec{r} + a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{w} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{bzw.} \quad E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{r} - \vec{x}) \cdot \vec{n} = 0\} \quad \text{(nur in 3D)}$$

wobei $\vec{r}$ der Koordinatenvektor eines Punkts in der Ebene ist, $\vec{v}, \vec{w}$ zwei Richtungsvektoren in der Ebene sind, die nicht skalare Vielfache voneinander sind, und $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene ist.