GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

**Einführung in die Numerik**
**WS 2011/2012**
**Prof. Dr. Thomas Gerstner**

# Klausur

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

Die Klausur ist bestanden, wenn die Summe aus Bonuspunkten und erreichten Punkten mindestens 50% der erreichbaren Punkte betragen.

| | |
|---|---|
| Name: | |
| Vorname: | |
| Matrikelnr.: | |

| Aufgabe | 1a | 1b | 2a | 2b | 3 | 4 | 5a | 5b | 6a | 6b | 7 | 8a | 8b | 8c | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| max. Pkt. | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 5 | 2 | 5 | 3 | 4 | 5 | 3 | 1 | 1 | 45 |
| err. Pkt. | | | | | | | | | | | | | | | |

**Aufgabe 1:** [Festkommazahlen]

(a) Stellen sie die Zahl $-22,2$ als Binärzahl im Festkommaformat mit $N = 10$ Bits (inklusive Vorzeichenbit) und $K = 3$ Nachkommastellen bei korrekter Rundung dar. Was ist der absolute Fehler der Darstellung dieser Zahl?

(b) Sei $[x_{|min|}, x_{max}]$ der darstellbare Bereich der positiven Festkommazahlen aus (a). Geben sie $x_{|min|}$ und $x_{max}$ jeweils als Binärzahl und Dezimalzahl an.

**Aufgabe 2:** [Polynominterpolation]

Gegeben sei die Wertetabelle:

| $x_i$ | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | -1 | 3 | 3 |

(a) Bestimmen sie das Interpolationspolynom vom Grad 2 durch diese drei Punkte mit Hilfe des Newton-Algorithmus.

(b) Erläutern sie eine Methode, die für die Auswertung des Interpolationspolynoms in Newton-Darstellung an einer beliebigen Stelle $\xi$ linearen Aufwand in $n$ besitzt und begründen sie diesen Aufwand.

**Aufgabe 3:** [Trigonometrische Interpolation]

Gegeben sei die reelle Funktion $f(x) = |x - \pi|$ im Intervall $[-\pi, \pi)$. Bestimmen sie die Koeffizienten $a_0, a_1, b_1$ und $a_2$ des trigonometrischen Interpolationspolynoms

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \frac{a_2}{2} \cos(2x),$$

das die Funktion $f$ an den Stellen $x_k = -\pi + 2\pi k/4$, $k = 0, 1, 2, 3$, interpoliert.

**Aufgabe 4:** [Splines]

Gegeben sei die Wertetabelle:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f(x_i)$ | -1 | 0 | 2 |

Ermitteln sie den **quadratischen** (nicht kubischen) Spline, bestehend aus den beiden quadratischen Polynomstücken $P_1 : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ und $P_2 : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, der die Punkte $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$, interpoliert sowie die Bedingungen $P_1''(x_0) = 0$ und $P_1'(x_1) = P_2'(x_1)$ erfüllt.

**Aufgabe 5:** [Matrixzerlegung]

(a) Welche beiden Voraussetzungen an eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ müssen erfüllt sein, damit ihre Cholesky-Zerlegung $A = CC^T$ existiert?

(b) Bestimmen sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 6:** [Quadratur]

(a) Leiten sie die Stützstellen und Gewichte der Simpsonregel zur Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ her.

(b) Sei nun $f \in C^4[a,b]$. Die Simpsonregel besitzt den Fehler

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a,b].$$

Ermitteln sie den Fehler der iterierten Simpsonregel für $N$ äquidistante Teilintervalle von $[a,b]$ in Abhängigkeit von $N$.

**Hinweis:**

$$\min_{0 \le i \le N-1} f^{(4)}(\xi_i) \le \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f^{(4)}(\xi_i) \le \max_{0 \le i \le N-1} f^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

**Aufgabe 7:** [Programmieraufgabe]

Schreiben sie eine Matlab- oder Scilabfunktion `matmult(A,n,m)`, die eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,m}$ sowie die Größen $n$ und $m$ als Inputparameter besitzt und einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ als Output, wobei für $B$ gelten soll:

$$B = A^T A.$$

In ihrer Routine dürfen keine vordefinierten Matrixfunktionen (wie *transpose* oder Matrixmultiplikationen) verwendet werden, sondern nur For-Schleifen und Zuweisungen.

**Aufgabe 8:** [Programmieraufgabe]

Gegeben sei der folgende Programmcode, wobei $f$ eine vordefinierte stetige Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, die mit dem Aufruf $f(x)$ an der Stelle $x$ ausgewertet wird:

```
function [z] = iterationsverfahren(f,a,b,n)
  for i=1:n
    c=a-(b-a)*f(a)/(f(b)-f(a))
    if sign(f(a))==sign(f(c))
        a=c
    elseif sign(f(b))==sign(f(c))
        b=c
    end
  end
 z=c
end
```

(a) Machen sie die Funktionsweise des Codes für zwei Iterationen ($n = 2$) an einer Grafik (mit einer geeigneten Funktion $f$) deutlich.

(b) Wie heißt das Verfahren, das das Programm implementiert?

(c) Welche Bedingung ist an $a$ und $b$ geknüpft, damit das Verfahren sicher funktioniert?