Skript zur Vorlesung

Einführung in die Algebraische Geometrie

Sommersemester 2011
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Faserprodukte 1

2 Eigenschaften von Schemata und ihren Morphismen 19

3 Separierte und eigentliche Morphismen 30

4 Dimension 36

5 Reguläre Schemata und der Tangentialraum 40

1 Faserprodukte

Wir wollen nun das richtige Produkt in der Kategorie der Schemata kennenlernen. Dazu müssen wir erst einige Tatsachen über das Tensorprodukte wiederholen.

Proposition 1.1 Es seien M und N Moduln über dem Ring A. Dann gibt es ein Paar $(T,\, g)$ bestehend aus einem A-Modul T und einer A-bilinearen Abbildung

$$g : M \times N \to T,$$

so dass gilt:
Für jeden A-Modul P und jede A-bilineare Abbildung $f : M \times N \to P$ gibt es genau einen A-Modulhomomorphismus (also eine lineare Abbildung) $\varphi : T \to P$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dd, "\varphi"] \\
M \times N \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \\
 & P
\end{tikzcd}$$

Sind $(T,\, g)$ und $(T',\, g')$ zwei Paare mit dieser Eigenschaft, so existiert genau ein Isomorphismus $j : T \to T'$ mit $j \circ g = g'$.

Beweis : Die Eindeutigkeitsaussage folgt leicht aus der universellen Eigenschaft.
Um die Existenz zu zeigen, betrachten wir den freien A-Modul

$$C = \bigoplus_{(x,y)\in M\times N} A.$$

Die Elemente von C sind Linearkombinationen der Form $\sum\limits_{(x,y)\in M\times N} a_{xy}\, e_{(x,y)}$, wobei $e_{(x,y)}$ die kanonische Basis des freien A-Moduls $\bigoplus\limits_{(x,\,y)\in M\times N} A$ ist.
Es sei D der Untermodul von C, der von allen Elementen der folgenden Form für $(x, y) \in M$ und $a \in A$ erzeugt wird:

$$\begin{aligned}
e_{(x+x',y)} \quad &- \quad e_{(x,y)} - e_{(x',y)} \\
e_{(x,y+y')} \quad &- \quad e_{(x,y)} - e_{(x,y')} \\
e_{(ax,y)} \quad &- \quad a\, e_{(x,y)} \\
e_{(x,ay)} \quad &- \quad a\, e_{(x,y)}
\end{aligned}$$

Wir setzen $T = C/D$ und bezeichnen mit $x \otimes y$ das Bild von $e_{(x,y)} \in C$ im Quotienten T. Dann wird T als A-Modul von den Elementen der Form $x \otimes y$ für $x \in M$ und $y \in N$ erzeugt. Es gilt ferner in T

$$\begin{aligned}(x + x') \otimes y &= x \otimes y + x' \otimes y,\\ x \otimes (y + y') &= x \otimes y + x \otimes y',\\ (a\,x) \otimes y &= a(x \otimes y) = x \otimes (a\,y).\end{aligned}$$

Daher ist die Abbildung

$$g : M \times N \to T,$$

definiert durch $g(x, y) = x \otimes y$, bilinear. Ist $f : M \times N \to P$ eine beliebige bilineare Abbildung in einen A-Modul P, so können wir durch $e_{(x,y)} \mapsto f(x, y)$ einen A-Modulhomomorphismus $\tilde{\varphi} : C \to P$ definieren. Da f bilinear ist, verschwindet $\tilde{\varphi}$ auf D. Also erhalten wir einen A-Modulhomomorphismus $\varphi : T \to P$. Es ist $\varphi(x \otimes y) = \tilde{\varphi}(e_{(x,y)}) = f(x, y)$. Also gilt $\varphi \circ g = f$. Da T durch die Elemente der Form $x \otimes y$ erzeugt ist, ist φ durch diese Bedingung eindeutig bestimmt. $\square$

Wir nennen T das **Tensorprodukt** von M und N und bezeichnen es als $T = M \otimes_A N$ oder $M \otimes N$. Als A-Modul ist $M \otimes_A N$ von allen Elementen der Form $x \otimes y$ (mit $x \in M$ und $y \in N$) erzeugt. Diese werden auch als **reine Tensoren** bezeichnet. Ein beliebiges Element in $M \otimes_A N$ hat also die Form $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \otimes y_i$ mit $a_i \in A$, $x_i \in M$ und $y_i \in N$.

Proposition 1.2 i) Sind $M_1, ..., M_r$ A-Moduln, so gibt es ein Paar (T, g) bestehend aus einem A-Modul T und einer multilinearen Abbildung $g : M_1 \times ... \times M_r \to T$, so dass gilt:
Für jeden A-Modul P und jede multilineare Abbildung $f : M_1 \times ... \times M_r \to P$ existiert genau ein A-Modulhomomorphismus $\varphi : T \to P$ mit $\varphi \circ g = f$.

ii) Sind M, N und P drei A-Moduln, so gibt es eindeutig bestimmte Isomorphismen

a) $M \otimes_A N \to N \otimes_A M$

b) $(M \otimes_A N) \otimes_A P \to M \otimes_A (N \otimes_A P) \to M \otimes_A N \otimes_A P$

c) $(M \oplus N) \otimes_A P \to (M \otimes_A P) \oplus (N \otimes_A P)$

d) $A \otimes_A M \to M$,

so dass jeweils folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $x \otimes y \mapsto y \otimes x$

b) $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z) \mapsto x \otimes y \otimes z$

c) $(x,\, y) \otimes z \mapsto (x \otimes z,\, y \otimes z)$

d) $a \otimes x \mapsto a\, x$

Beweis : Man definiert die gewünschten Isomorphismen und ihre Umkehrabbildungen durch die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts. $\square$

Nun betrachten wir einen Ring A und zwei A-Algebren B und C. Dann sind B und C insbesondere A-Moduln, also existiert das Tensorprodukt $B \otimes_A C =: D$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} B \times C \times B \times C & \to & B \otimes_A C = D \\ (b,\, c,\, b',\, c') & \mapsto & bb' \otimes cc' \end{array}$$

Diese ist A-linear in jedem Faktor und induziert daher nach Proposition 1.1 einen A-Modulhomomorphismus

$$B \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A C \to D.$$

Nach 1.2 ist $B \otimes_A C \otimes_A B \otimes_A C \simeq (B \otimes_A C) \otimes_A (B \otimes_A C) = D \otimes_A D$. Also erhalten wir einen A-Modulhomomorphismus $\mu : D \otimes_A D \to D$ mit der Eigenschaft $\mu(b \otimes c,\, b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$. Damit haben wir auf dem Tensorprodukt $D = B \otimes_A C$ eine Multiplikation definiert, die D zu einem kommutativen Ring mit Einselement $1_B \otimes 1_C$ macht. Über den Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} A & \to & D = B \otimes_A C \\ a & \mapsto & a\, 1_B \otimes 1_C = 1_B \otimes a 1_C \end{array}$$

wird D zu einer A-Algebra.
Ferner haben wir A-Algebrenhomomorphismen

$$\begin{array}{rcl} B & \to & D = B \otimes_A C \\ b & \mapsto & b \otimes 1_C \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} C & \to & D = B \otimes_A C \\ c & \mapsto & 1_B \otimes c. \end{array}$$

Proposition 1.3 Die A-Algebra $B \otimes_A C$ hat folgende universelle Eigenschaft. Ist E eine beliebige A-Algebra zusammen mit A-Algebrenhomomorphismen

$$\beta : B \to E \quad \text{und} \quad \gamma : C \to E,$$

so existiert genau ein A-Algebrenhomomorphismus $\varphi : B \otimes_A C \to E$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl] \arrow[dr, "\beta"] & \\
B \otimes_A C \arrow[rr, "\varphi"] & & E \\
 & C \arrow[ul] \arrow[ur, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis : Wir betrachten die bilineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} B \otimes_A C & \to & E \\ (b, c) & \mapsto & \beta(b)\gamma(c). \end{array}$$

Man rechnet nach, dass der A-Modulhomomorphismus $\varphi : B \otimes_A C \to E$ zu (β, γ), der nach der universellen Eigenschaft 1.1 existiert, mit den Ringstrukturen verträglich ist. $\square$

Nun wollen wir Faserprodukte von Schemata definieren. Für affine Schemata werden wir diese später mit Hilfe des Tensorprodukts konstruieren.

Definition 1.4 Es sei S ein Basisschema. Sind X und Y S-Schemata, so heißt ein S-Schema Z zusammen mit zwei S-Morphismen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ **Faserprodukt** von X und Y über S, falls gilt:
Für jedes S-Schema T zusammen mit S-Morphismen $T \to X$ und $T \to Y$ gibt es genau einen S-Morphismus $T \to Z$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z. \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "q"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

Falls das Faserprodukt Z von X und Y über S existiert, so ist es durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen es mit $Z = X \times_S Y$ und nennen die Abbildungen $p : X \times_S Y \to X$ und $q : X \times_S Y \to Y$ die **Projektionen**.

Zur Erinnerung: Ein S-Schema ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $f : X \to S$. Sind $(X, f : X \to S)$ und $(Y, g : Y \to S)$ zwei S-Schemata, so ist ein S-Morphismus von X nach Y ein Morphismus $h : X \to Y$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Proposition 1.5 Ist $S = \operatorname{Spec} A$ affin und sind $X = \operatorname{Spec} B$ und $Y = \operatorname{Spec} C$ affine S-Schemata, so ist $Z = \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$ zusammen mit den Morphismen $Z \to X$ und $Z \to Y$, die von den Ringhomomorphismen $B \to B \otimes_A C$ und $C \to B \otimes_A C$ induziert werden, das Faserprodukt von X und Y über S.

Beweis : Zu den Schemamorphismen $X \to S$ und $Y \to S$ gehören Ringhomomorphismen $A \to B$ und $A \to C$. Diese machen B und C zu A-Algebren. Wir prüfen die universelle Eigenschaft von $Z = \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$ nach. Es sei T ein S-Schema zusammen mit S-Morphismen $T \to X = \operatorname{Spec} B$ und $T \to Y = \operatorname{Spec} C$. Nach [KA], Proposition 7.19 ist für jedes affine Schema $\operatorname{Spec} D$ die Abbildung

$$\operatorname{Mor}(T, \operatorname{Spec} D) \to \operatorname{Hom}_{\text{Ringe}}(D, \mathcal{O}_T(T))$$

bijektiv. Also gibt es Ringhomomorphismen $A \to \mathcal{O}_T(T)$, $B \to \mathcal{O}_T(T)$ und $C \to \mathcal{O}_T(T)$, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_T(T) \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & C \arrow[d] \\ & \mathcal{O}_T(T) \end{tikzcd}$$

kommutativ sind. Also sind $B \to \mathcal{O}_T(T)$ und $C \to \mathcal{O}_T(T)$ A-Algebrenhomomorphismen. Nach Proposition 1.3 existiert genau ein A-Algebrahomomorphismus

$$\varphi : B \otimes_A C \to \mathcal{O}_T(T),$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
B \otimes_A C \arrow[rr] & & \mathcal{O}_T(T) \\
 & C \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Also gibt es genau einen S-Schemamorphismus $T \to Z = \operatorname{Spec}(B \otimes_A C)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec} B & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & Z \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & \operatorname{Spec} C &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. $\square$

Lemma 1.6 Es seien X und Y S-Schemata, so dass das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert. Mit $p : X \times_S Y \to X$ bezeichnen wir die Projektion nach X. Für jedes offene Unterschema U von X ist dann das offene Unterschema $p^{-1}(U) \subset X \times_S Y$ das Faserprodukt von U und Y über S.

Beweis : Wir prüfen nach, dass $p^{-1}(U)$ zusammen mit den auf $p^{-1}(U)$ eingeschränkte Projektionen die universelle Eigenschaft des Faserproduktes $U \times_S Y$ erfüllt. Sei T ein S-Schema zusammen mit S-Morphismen $T \to U$ und $T \to Y$. Dann betrachten wir $T \to U \hookrightarrow X$ und erhalten aufgrund der universellen Eigenschaft des Faserprodukts genau einen Morphismus

$$f : T \to X \times_S Y,$$

der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & X & \\
 & U \arrow[ur, hook] & & \\
T \arrow[ur] \arrow[rrr, "f"] \arrow[drr] & & & X \times_S Y \arrow[uul, "p"'] \arrow[dl] \\
 & & Y &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.
Also liegt $p \circ f(T)$ in der offenen Teilmenge U von X. Somit ist $f(T) \subset p^{-1}(U)$. Daher gibt es genau einen S-Morphismus $f : T \to p^{-1}(U)$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & U & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & p^{-1}(U) \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht. □

Lemma 1.7 Es seien X und Y S-Schemata und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Existieren dann alle Faserprodukte $X_i \times_S Y$, so existiert auch das Faserprodukt $X \times_S Y$. Analog gilt für eine offene Überdeckung $\{Y_i\}_{i \in I}$ von Y: Existieren alle Faserprodukte $X \times_S Y_i$, so existiert auch $X \times_S Y$.

Beweis : Es sei $p_i : X_i \times_S Y \to X_i$ die Projektion nach X_i. Wir setzen für alle $i, j \in I$

$$U_{ij} = p_i^{-1}(X_i \cap X_j) \subset X_i \times_S Y.$$

Dann ist U_{ij} nach Lemma 1.6 das Faserprodukt von $X_i \cap X_j$ mit Y über S. Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Definition 1.4 existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus

$$\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}.$$

Wir definieren nun ein neues Schema Z wie folgt: Der topologische Raum ist $Z = \dot{\bigcup_{i\in I}}(X_i \times_S Y)/\sim$, wobei $a \sim b$ genau dann gilt, wenn es i, j mit $a \in U_{ij}, b \in U_{ji}$ und $\varphi_{ij}(a) = b$ gibt.
Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Den Raum Z aller Äquivalenzklassen statten wir mit der Quotiententopologie aus. Wir haben kanonische stetige Projektionen

$$p_i : X_i \times_S Y \to Z.$$

Mit $Z_i = p_i(X_i \times_S Y)$ bezeichnen wir das Bild in Z.Es ist offen und $p_i : X_i \times_S Y \to Z_i$ ist ein Homöomorphismus. Ferner gilt $p_i(U_{ij}) = Z_i \cap Z_j = p_j(U_{ji})$. Wir setzen

$$\mathcal{O}_{Z_i} := p_{i_*}\mathcal{O}_{X_i \times_S Y}$$

Der Isomorphismus $\varphi_{ij}^\sharp : \mathcal{O}_{U_{ji}} \simeq (\varphi_{ij})_*\mathcal{O}_{U_{ij}}$ liefert Isomorphismen

$$\alpha_{ij} : \mathcal{O}_{Z_j|_{Z_i\cap Z_j}} = p_{j_*}(\mathcal{O}_{X_j \times_S Y|U_{ji}}) = p_{j_*}(\mathcal{O}_{U_{ji}})$$

$$\simeq p_{j_*}(\varphi_{ij*})\mathcal{O}_{U_{ij}} = p_{i_*}(\mathcal{O}_{U_{ij}}) = p_{i_*}(\mathcal{O}_{X_i \times_S Y|U_{ij}}) = \mathcal{O}_{Z_i|_{Z_i\cap Z_j}}.$$

Mit Hilfe dieser Isomorphismen definieren wir wie folgt eine Garbe $\mathcal{O}_Z$ auf Z. Für $U \subset Z$ sei

$$\mathcal{O}_Z(U) = \{(s_i)_{i\in I} : s_i \in \mathcal{O}_{Z_i}(U \cap Z_i) : \alpha_{ij}(s_j\mid_{U\cap Z_i\cap Z_j}) = s_i\mid_{U\cap Z_i\cap Z_j} \text{ für alle } i, j\}$$

Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein Schema (ÜA). Wir nennen dieses Schema „die Verklebung der $X_i \times_S Y$ entlang der Isomorphismen φ_{ij}“. Wir behaupten, dass $(Z, \mathcal{O}_Z)$ die universelle Eigenschaft des Faserprodukts von X und Y über S hat.

Die Projektionen

$$p_i : X_i \times_S Y \to X_i$$

und

$$q_i : X_i \times_S Y \to Y$$

erfüllen $p_j \circ \varphi_{ij} = p_i$ und $q_j \circ \varphi_{ij} = q_i$. Also können wir sie zu Projektionen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ zusammenkleben.
Sei nun T ein S-Schema mit S-Morphismen $T \xrightarrow{a} X$ und $T \xrightarrow{b} Y$. Wir setzen $T_i = a^{-1}(X_i) \subset T$. Dann existiert für jedes $i \in I$ genau ein S-Morphismus

$f_i : T_i \to X_i \times_S Y$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X_i & \\
T_i \arrow[ur, "a"] \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "b"'] & & X_i \times_S Y \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[dl, "q"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

kommutativ macht.
Aufgrund der Eindeutigkeit ist $\varphi_{ij} \circ f_i = f_j$ auf $T_i \cap T_j$. Also verkleben sich die f_i zu einem S-Morphismus $f : T \to Z$. Dieser ist eindeutig bestimmt, da seine Einschränkung auf alle T_i eindeutig bestimmt ist. Die analoge Aussage für Y zeigt man genauso. $\square$

Lemma 1.8 Es sei $U \subset S$ ein offenes Unterschema. Es seien $u : X \to S$ und $v : Y \to S$ zwei S-Schemata, so dass $u : X \to S$ als

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\tilde{u}"] \arrow[dr, "u"'] & & U \arrow[dl, hook] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

faktorisiert.
Falls das Faserprodukt $X \times_U v^{-1}(U)$ existiert, so ist $X \times_U v^{-1}(U)$ auch das Faserprodukt von X und Y über S, d.h. es gilt

$$X \times_U v^{-1}(U) \simeq X \times_S Y.$$

Beweis : Es sei T ein S-Schema mit S-Morphismen $a : T \to X$ und $b : T \to Y$. Da

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "a"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, faktorisiert der Strukturmorphismus $T \to S$ über U. Nun kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "b"] \arrow[dr] & Y \arrow[dd, "v"] \\ & U \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

also gilt $b(T) \subset v^{-1}(U)$. Es existiert also genau ein Morphismus

$$T \to X \times_U v^{-1}(U),$$

so dass

$$\begin{tikzcd} & X & \\ T \arrow[ur, "a"] \arrow[rr] \arrow[dd, "b"'] & & X \times_U v^{-1}(U) \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & v^{-1}(U) \arrow[dl] & \\ Y & & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 1.9 Es sei S ein beliebiges Schema und X und Y seien zwei S-Schemata. Dann existiert das Faserprodukt $X \times_S Y$.

Beweis : Es seien $u : X \to S$ und $v : Y \to S$ die Strukturmorphismen. Wir wählen eine offene affine Überdeckung $(S_i)_{i \in I}$ von S und betrachten die offenen affinen Unterschemata $X_i = u^{-1}(S_i) \subset X$ und $Y_i = v^{-1}(S_i) \subset Y$. Jetzt wählen wir offene affine Überdeckungen $(U_{i_j})_{j \in J}$ und $(V_{i_k})_{k \in K}$ von X_i bzw. von Y_i. Dann existieren nach Proposition 1.3 alle Faserprodukte $U_{i_j} \times_{S_i} U_{i_k}$. Wir halten $i \in I$ und $k \in K$ fest. Dann können wir die $(U_{i_j} \times_{S_i} V_{i_k})_{j \in J}$ nach Lemma 1.7 zu dem Faserprodukt $X_i \times_{S_i} V_{i_k}$ verkleben. Wir wenden Lemma 1.7 erneut an und verkleben die $(X_i \times_{S_i} V_{i_k})_{k \in K}$ zu dem Faserprodukt $X_i \times_{S_i} Y_i$. Nach Lemma 1.8 gilt $X_i \times_{S_i} Y_i = X_i \times_S Y$. Jetzt wenden wir wieder Lemma 1.7 auf die offene Überdeckung $\{X_i\}_{i \in I}$ von X an und verkleben die $X_i \times_S Y$ zu $X \times_S Y$. □

Proposition 1.10 Es seien X, Y und Z S-Schemata für ein beliebiges Basisschema S. Dann gilt:

i) Es gibt kanonische Isomorphismen

$$\begin{aligned} X \times_S S &\simeq X \\ X \times_S Y &\simeq Y \times_S X \text{ und} \\ (X \times_S Y) \times_S Z &\simeq X \times_S (Y \times_S Z) \end{aligned}$$

ii) Es sei $a : Z \to Y$ ein Y-Schema, das wir via $Z \to Y \to S$ als S-Schema betrachten. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus von S-Schemata $(X \times_S Y) \times_Y Z \simeq X \times_S Z$, wobei wir $X \times_S Y$ über die Projektion $X \times_S Y \to Y$ als Y-Schema auffassen.

iii) Sind $f : X \to X'$ und $g : Y \to Y'$ Morphismen von S-Schemata, so existiert genau ein Morphismus

$$f \times g : X \times_S Y \to X' \times_S Y',$$

der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & X' \\ X \times_S Y \arrow[u, "p"] \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "q"'] & X' \times_S Y' \arrow[u, "p'"'] \arrow[d, "q'"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y' \end{tikzcd}$$

iv) Es seien $i : U \hookrightarrow X$ und $j : V \hookrightarrow Y$ offene Unterschemata. Dann induziert der Morphismus

$$i \times j : U \times_S V \to X \times_S Y$$

einen Isomorphismus von $U \times_S V$ auf das offene Unterschema $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ von $X \times_S Y$.

Beweis :

i) Ist $a : T \to S$ ein beliebiges S-Schema, so gibt es nur einen S-Morphismus $T \to S$, also einen Morphismus, der

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr] \arrow[dr] & & S \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, nämlich den Strukturmorphismus a selbst.
Sind somit S-Morphismen $f : T \to X$ und $g : T \to S$ vorgegeben, so ist $g = a$, und es existiert genau ein Morphismus $T \to X$, nämlich f, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr] & \\ T \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "a"'] & & X \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. X erfüllt also die universelle Eigenschaft des Faserprodukts von X mit S über S. Daher gibt es wegen der Eindeutigkeit des Faserproduktes genau einen Isomorphismus

$$X \times_S S \to X,$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dr] & \\ X \times_S S \arrow[ur, "p"] \arrow[rr] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diesen nennt man **kanonisch**.
Analog zeigt man die anderen beiden Isomorphismen.

ii) Wir zeigen, dass das S-Schema $(X \times_S Y) \times_Y Z$ zusammen mit den Projektionen $(X \times_S Y) \times_Y Z \xrightarrow{\text{proj}} X \times_S Y \xrightarrow{\text{proj}} X$ und $(X \times_S Y) \times_Y Z \xrightarrow{\text{proj}} Z$ die universelle Eigenschaft des Faserproduktes $X \times_S Z$ erfüllt. Sei T ein S-Schema mit S-Morphismen $T \to X$ und $T \to Z$. Dann definieren wir einen S-Morphismus $T \to Y$ als Komposition

$$T \to Z \xrightarrow{a} Y.$$

Nach der universellen Eigenschaft von $X \times_S Y$ gibt es einen eindeutig bestimmten S-Morphismus $T \to X \times_S Y$, der das folgende Diagramm kommutativ macht

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & X \times_S Y \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & Z \arrow[dr] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

Betrachten wir $X \times_S Y$ über die Projektion als Y-Schema, so ist $T \to X \times_S Y$ ein Morphismus von Y-Schemata. Nach Konstruktion ist auch $T \to Z$ ein Morphismus von Y-Schemata. Also gibt es genau einen Y-Morphismus $T \to (X \times_S Y) \times_Y Z$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S Y & \\
T \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & (X \times_S Y) \times_Y Z \arrow[ul] \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Dann kommutiert auch das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & & X \times_S Y \arrow[ul] \\
T \arrow[uur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & (X \times_S Y) \times_Y Z \arrow[uul] \arrow[dl] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

Also erfüllt $(X \times_S Y) \times_Y Z$ in der Tat die universelle Eigenschaft von $X \times_S Z$. Daher gibt es einen eindeutig bestimmten (kanonischen) Isomorphismus

$$(X \times_S Y) \times_Y Z \xrightarrow{\sim} X \times_S Z,$$

der mit den Projektionen verträglich ist.

iii) Wir haben Morphismen

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & X' \arrow[dr] & \\
X x_S Y \arrow[u, "p"] \arrow[d, "q"'] & & S \\
Y \arrow[r, "g"'] \arrow[urr] & Y' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

also mit der universellen Eigenschaft des Faserproduktes die gewünschte Abbildung.

iv) Man zeigt, dass $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ die universelle Eigenschaft des Faserproduktes $U \times_S V$ erfüllt.

□

Definition 1.11 Es sei S ein Basisschema und $a : X \to S$ ein Morphismus, der X zu einem S-Schema macht. Für jedes S-Schema S' nennen wir das Faserprodukt $X \times_S S'$ zusammen mit der Projektion

$$a' : X \times_S S' \to S'$$

den **Basiswechsel** von a vermöge $S' \to S$. Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von S-Schemata, so heißt der S-Morphismus

$$f_{S'} = f \times_{\mathrm{id}_{S'}} : X \times_S S' \to Y \times_S S'$$

der **Basiswechsel von** f.

Beispiel: Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec} A[x_1, ..., x_n]/(P_1, ..., P_m)$ für Polynome $P_1, ..., P_m \in A[x_1, ..., x_n]$. Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ der zugehörige Schemamorphismus. Dann ist

$$X \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} B[x_1, ..., x_n]/(\varphi(P_1), ..., \varphi(P_m))$$

der Basiswechsel des A-Schemas X mit $\operatorname{Spec} B$. Hier ist $\varphi(P_i)$ das Bild von P_i unter der Fortsetzung von φ zu einem Ringhomomorphismus $A[x_1, ..., x_n] \to B[x_1, ..., x_n]$.

Definition 1.12 Es sei $f : X \to Y$ ein beliebiger Morphismus von Schemata. Für jedes $y \in Y$ betrachten wir den Restklassenkörper $\kappa(y)$. Es existiert ein natürlicher Morphismus

$$\operatorname{Spec} \kappa(y) \to Y,$$

der den einzigen Punkt in $\operatorname{Spec} \kappa(y)$ auf y abbildet. Der Basiswechsel von f mit dem Y-Schema $\kappa(y)$

$$f_y : X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$$

heißt **Faser** von f im Punkt y.

Beispiel: Sei $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ und $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x, y]/(xy - m)$ mit dem natürlichen Morphismus $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Dann ist die Faser von X über $(0) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ das $\mathbb{Q}$-Schema

$$X_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, y]/(xy - m) \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x, 1/x].$$

Für jede Primzahl p ist die Faser von X über $(p) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ das $\mathbb{F}_p$-Schema $X_{\mathbb{F}_p} = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x, y]/(xy - m)$. Es ist $X_{\mathbb{F}_p} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x, 1/x]$, falls $p \nmid m$, und $X_{\mathbb{F}_p} \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x, y]/(xy)$, falls $p|m$. Im zweiten Fall zerfällt $X_{\mathbb{F}_p}$ in zwei irreduzible Komponenten.

Bemerkung 1.13 Es sei $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus. Für jedes $y \in Y$ induziert dann die erste Projektion

$$p : X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \to X$$

einen Homöomorphismus des Schemas X_y auf die Faser $f^{-1}(y) \subset X$, ausgestattet mit der Relativtopologie.

Beweis : Wir können nach Übergang zu einer offenen affinen Umgebung $U \simeq \operatorname{Spec} A$ um y annehmen, dass Y affin ist. Sei $\mathfrak{p}$ das Primideal in A zu y.
Ferner sei $V \subset X$ eine offene affine Teilmenge. Nach Lemma 1.6 ist $p^{-1}(V) \simeq V \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y)$. Also genügt es, die Behauptung für alle offenen affinen Teilmengen von X zu zeigen. Wir können daher $X \simeq \operatorname{Spec} B$ affin annehmen. Sei $\varphi : A \to B$ der Ringhomomorphismus zu $f : X \to Y$. Nach Proposition 1.5 ist

$X_y \simeq \operatorname{Spec}(B \otimes_A \kappa(y))$ und $p : X_y \to X$ gehört zu dem natürlichen Ringhomomorphismus $B \to B \otimes_A \kappa(y) = B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Wir zerlegen diesen Homomorphismus in zwei Teile:

$$B \xrightarrow{f} B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{g} B \otimes_A (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}).$$

Es sei $S = \varphi(A \setminus \mathfrak{p})$. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}B & \to & B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \\ b/\varphi(a) & \mapsto & b \otimes 1/a \end{array}$$

ein Isomorphismus. (Das Tensorprodukt vertauscht nämlich mit Lokalisierungen, siehe Übungen.)
Also vermittelt f eine Bijektion von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A A_{\mathfrak{p}})$ auf die Menge der Primideale in B, die disjunkt zu $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ sind.
Ferner prüft man nach, dass g einen Isomorphismus $S^{-1}B/\varphi(\mathfrak{p})S^{-1}B \xrightarrow{\sim} B \otimes_A (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ induziert, denn die linke Seite besitzt die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes rechts. Also vermittelt g eine Bijektion von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}))$ auf die Menge der Primideale in $S^{-1}B$, die über $\varphi(\mathfrak{p})S^{-1}B$ liegen.
Daher induziert die Komposition $g \circ f$ eine Bijektion von $\operatorname{Spec}(B \otimes_A (A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}))$ auf die Menge aller Primideale in B, die über $\varphi(\mathfrak{p})B$ liegen und disjunkt zu $\varphi(A \setminus \mathfrak{p})$ sind. Das sind genau die Primideale $\mathfrak{q} \subset B$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Definition 1.14 Es sei P eine Eigenschaft eines Morphismus von Schemata. Wir sagen, P ist **stabil unter Basiswechsel**, falls gilt:
Erfüllt $f : X \to Y$ die Eigenschaft P, so erfüllt für jeden Morphismus $Y' \to Y$ auch der Basiswechsel

$$f_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$$

die Eigenschaft P.

Proposition 1.15 Offene Immersionen sind stabil unter Basiswechsel.

Beweis : Sei $i : X \to Y$ eine offene Immersion, also ein Isomorphismus auf eine offene Teilmenge $V \subset Y$. Wir betrachten für $Y' \to Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

Aus $X \simeq V$ folgt $X \times_Y Y' \overset{1.8}{\simeq} X \times_V g^{-1}(V) \overset{X \simeq V}{\simeq} g^{-1}(V) \subset Y'$, also folgt die Behauptung. □

Proposition 1.16 Sei P eine Eigenschaft von Schemamorphismen, die stabil unter Basiswechsel ist. Sind X und Y S-Schemata und $f : X \to Y$ ein S-Morphismus, der P erfüllt, so erfüllt für jedes S-Schema Z auch

$$f \times \mathrm{id}_Z : X \times_S Z \to Y \times_S Z$$

die Eigenschaft P.

Beweis : Da P stabil unter Basiswechsel ist, erfüllt auch der Basiswechsel $X \times_Y (Y \times_S Z) \to Y \times_S Z$ von f die Eigenschaft P. Nun ist $X \times_S Z \simeq X \times_Y (Y \times_S Z)$ nach Proposition 1.10, und die Abbildung $X \times_S Z \simeq X \times_Y (Y \times_S Z) \to Y \times_S Z$ macht das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X \times_S Z \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_S Z \arrow[u] \arrow[d] \\ Z \arrow[r, "\mathrm{id}_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

kommutativ. Sie stimmt also mit $f \times \mathrm{id}_Z$ überein. □

Proposition 1.17 Es sei P eine Eigenschaft von Schemamorphismen, die stabil unter Basiswechsel und Komposition ist. Erfüllen $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ die Eigenschaft P, so erfüllt auch

$$f \times g : X \times_S Y \to S \times_S S \simeq S$$

die Eigenschaft P.

Beweis : Wir können $f \times g$ als Komposition

$$X \times_S Y \xrightarrow{f \times_{\mathrm{id}} Y} S \times_S Y \simeq Y \xrightarrow{g} S$$

schreiben. Der Morphismus $X \times_S Y \xrightarrow{f \times_{\mathrm{id}} Y} S \times_S Y \simeq Y$ ist die Projektion auf Y, also der Basiswechsel von f mit $Y \to S$. $\square$

Definition 1.18 Es sei S ein beliebiges Schema. Dann gibt es einen eindeutigen Morphismus $S \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Das Schema $\mathbb{A}^n_S = \mathbb{A}^n_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S$ heißt **n-dimensionaler affiner Raum über S**.
Das Schema $\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S = \operatorname{Proj} \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n] \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} S$ heißt **n-dimensionaler projektiver Raum über S**.

Da $\mathbb{A}^n_{\operatorname{Spec} A} \simeq \operatorname{Spec} A[x_1, \ldots, x_n]$ und $\mathbb{P}^n_{\operatorname{Spec} A} \simeq \operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]$ (siehe Übungen) ist, passt dies mit unseren früheren Definitionen zusammen.

Definition 1.19 Ein Morphismus $f : X \to S$ heißt **projektiv**, falls es eine abgeschlossene Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$ für ein $n \geqq 0$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^n_S \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutiert, d.h. so dass i ein S-Morphismus ist.

Beispiele:

i) Für jedes S ist die Projektion
$$p : \mathbb{P}^n_S \to S$$
projektiv.

ii) Jede abgeschlossene Immersion $f : X \to S$ ist projektiv, die Bedingung ist dann für $\mathbb{P}^0_S = S$ erfüllt.

iii) Für jeses homogene Ideal $\mathfrak{a} \subset A[x_0, \ldots, x_n]$ ist der Morphismus
$$\operatorname{Proj} A[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$$
projektiv.

2 Eigenschaften von Schemata und ihren Morphismen

Definition 2.1 Ein Schema X heißt **reduziert**, falls für alle $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist.

Lemma 2.2 i) Ein affines Schema $X \simeq \operatorname{Spec} A$ ist genau dann reduziert, wenn A reduziert ist.

ii) Ein Schema X ist genau dann reduziert, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist.

Beweis : Ein Ring A ist genau dann reduziert, wenn das Nilradikal

$$\operatorname{Nil} A = \sqrt{0} = \{f \in A : f^n = 0 \text{ für ein } n \geqq 0\}$$

gleich Null ist.

i) Für jede multiplikative Teilmenge $S \subset A$ gilt $\operatorname{Nil}(S^{-1}A) = S^{-1}\operatorname{Nil}(A)$ (Übungsaufgabe). Ist A ein reduzierter Ring, so ist somit für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ auch $A_{\mathfrak{p}}$ reduziert. Also ist definitionsgemäß $\operatorname{Spec} A$ reduziert. Umgekehrt nehmen wir an, dass $X \simeq \operatorname{Spec} A$ reduziert ist, d.h. alle Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ sind reduziert. Ist $s \in A \simeq \mathcal{O}_X(X)$ ein nilpotentes Element, so ist also für alle $x \in X$ der Keim $s_x = 0$. Daraus folgt $s = 0$, d.h. A ist reduziert.

ii) Dasselbe Argument wie in i) zeigt, dass in einem reduzierten Schema X alle Ringe $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert sind. Wir nehmen umgekehrt an, alle $\mathcal{O}_X(U)$ sind reduziert. Es sei $X = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$ eine offene affine Überdeckung von X. Dann ist $A_i \simeq \mathcal{O}_X(U_i)$ reduziert, also ist nach i) U_i ein reduziertes Schema. Da für alle $x \in U_i$ gilt $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U_i,x}$, ist X ein reduziertes Schema.

□

Satz 2.3 i) Ist X ein beliebiges Schema, so gibt es ein eindeutig bestimmtes abgeschlossenes Unterschema

$$i : X^{\text{red}} \to X$$

von X, das denselben unterliegenden topologischen Raum hat.
Ist $f : Y \to X$ ein Morphismus von einem reduzierten Schema Y nach X, so gibt es genau einen Morphismus

$$g : Y \to X^{\text{red}},$$

so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & X \\ & X^{\text{red}} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

ii) Für jede abgeschlossene Teilmenge Z von X gibt es genau eine Strukturgarbe, die Z zu einem reduzierten abgeschlossenen Unterschema von X macht.

Beweis :

i) Wir definieren für alle $U \subset X$ offen

$$N(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) : s_x \in \text{Nil}\,(\mathcal{O}_{X,\,x}) \text{ für alle } x \in U\}.$$

$N(U)$ ist ein Ideal in $\mathcal{O}_X(U)$. Man prüft leicht nach, dass N eine Untergarbe von $\mathcal{O}_X$ ist. Die Quotientengarbe $\mathcal{O}_X/N$ ist eine Garbe von Ringen auf X. Es sei X^{red} der lokal geringte Raum $(X, \mathcal{O}_X/N)$. Ist $U \simeq \text{Spec}\, A \subset X$ eine offene affine Teilmenge, so sei $i : \text{Spec}\, A/\text{Nil}\,(A) \to \text{Spec}\, A$ die abgeschlossene Immersion zur Quotientenabbildung $A \to A/\text{Nil}\,(A)$ (siehe [KA], Lemma 7.15). Für jedes $g \in A$ ist

$$\text{Kern}\, i^\sharp(D(g)) = \text{Nil}\,(A)_g = N(D(g)),$$

wie man leicht nachprüft (Übungsaufgabe). Daraus folgt $\text{Kern}\, i^\sharp = N|_U$. Also ist $(U, \mathcal{O}_U/(N|_U)) \simeq \text{Spec}\,(A/\text{Nil}\,(A))$ ein affines Schema. Somit hat X^{red} eine offene Überdeckung aus reduzierten affinen Schemata, es ist also ein reduziertes Schema.
Wir definieren $i : X^{\text{red}} \to X$ durch die Identität auf dem topologischen Raum X und die kanonische Garbenabbildung

$$i^\sharp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/N.$$

Die universelle Eigenschaft von X^{red} prüft man nun auf einer offenen affinen Überdeckung nach (Übungsaufgabe).

ii) Es sei $Z \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wir prüfen zunächst die Eindeutigkeit einer reduzierten abgeschlossenen Unterschemastruktur $(Z, \mathcal{O}_Z)$ auf Z nach. Ist $U \simeq \operatorname{Spec} A \subset X$ offen affin, so ist $(U \cap Z, \mathcal{O}|_{U \cap Z})$ ein abgeschlossenes Unterschema von $U = \operatorname{Spec} A$. Nach Proposition 2.4 ist dieses isomorph zu $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$, und es gilt $V(\mathfrak{a}) = U \cap Z$. Da $(Z, \mathcal{O}_Z)$ reduziert ist, ist

$$\mathcal{O}_Z(U \cap Z) = A/\mathfrak{a}$$

ein reduzierter Ring. Also folgt $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Somit ist $\mathfrak{a}$ durch $V(\mathfrak{a}) = U \cap Z$ eindeutig bestimmt nach [KA], Satz 4.7. Also ist auch $(Z, \mathcal{O}_Z)$ eindeutig bestimmt.

Nun zeigen wir für $Z \subset X$ abgeschlossen noch die Existenz einer reduzierten abgeschlossenen Unterschemastruktur. Es sei $\bigcup_i U_i = X$ eine offene affine Überdeckung. Für alle i ist $Z \cap U_i$ eine abgeschlosssene Teilmenge von $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$, also von der Form $Z \cap U_i \simeq V(\mathfrak{a}_i)$ für ein Ideal $\mathfrak{a}_i \subset A_i$. Das reduzierte affine Schema $\operatorname{Spec} A/\sqrt{\mathfrak{a}_i}$ hat als unterliegenden topologischen Raum gerade $V(\sqrt{\mathfrak{a}_i}) = V(\mathfrak{a}_i) \simeq Z \cap U_i$. Also liefert $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\sqrt{\mathfrak{a}_i}}$ eine Garbe $\mathcal{O}_{Z \cap U_i}$ auf $Z \cap U_i$, die $Z \cap U_i$ zu einem reduzierten abgeschlossenen Unterschema von U_i macht. Aufgrund der gerade gezeigten Eindeutigkeit gilt $\mathcal{O}_{Z \cap U_i}|_{Z \cap U_i \cap U_j} = \mathcal{O}_{Z \cap U_j}|_{Z \cap U_i \cap U_j}$. Also können wir die Garbe $\mathcal{O}_{Z \cap U_i}$ zu einer Garbe $\mathcal{O}_Z$ verkleben, die Z zu einem reduzierten abgeschlossenen Unterschema von X macht.

□

Nun müssen wir noch das folgende Resultat nachtragen:

Proposition 2.4 Es sei $X = \operatorname{Spec} A$ ein affines Schema und $i : Z \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema. Dann gibt es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ und einen Isomorphismus $Z \simeq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "i"'] & & \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \arrow[dl, "\tilde{i}"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Hier ist $\tilde{i}$ die natürliche Abbildung aus [KA], Lemma 7.15. Insbesondere ist jedes abgeschlossene Unterschema eines affinen Schemas selbst affin.

Beweis von Prop. 2.4 :
Definitionsgemäß ist i ein Homöomorphismus

$$i : Z \to i(Z),$$

und $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z$ ist surjektiv.
Die Idealgarbe J sei der Kern dieser Garbenabbildung. Außerdem sei $\mathfrak{a} = J(X) = \mathrm{Kern}\big(\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Z(Z)\big)$ und $\tilde{i} : \mathrm{Spec}A/\mathfrak{a} \to X = \mathrm{Spec}A$ die zugehörige abgeschlossene Immersion ([KA], Lemma 7.15). Nun kann man zeigen, dass für alle $g \in \mathrm{Spec}A$ das Ideal $\mathfrak{a}A_g \subset A_g$ gerade $J\big(D(g)\big)$ ist. (Das ist technisch etwas aufwändig.)
Daraus folgt für alle $x \in \mathrm{Spec}A : \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X,x} = J_x$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} i(Z) &= \{x \in X : (i_*\mathcal{O}_Z)_x \neq 0\} \\ &= \{x \in X : J_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X : \mathfrak{a}\mathcal{O}_{X,x} \neq \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X : (\tilde{i}_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}A/\mathfrak{a}})_x \neq 0\} \\ &= \tilde{i}(\mathrm{Spec}A/\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

Also ist $\tilde{i}^{-1} \circ i : Z \to \mathrm{Spec}A/\mathfrak{a}$ ein Homöomorphismus.
Mit Hilfe der Verträglichkeit von J und $\mathfrak{a}$ kann man nachprüfen, dass dies auch einen Isomorphismus auf den Strukturgarben vermittelt. □

Korollar 2.5 Abgeschlossene Immersionen sind stabil unter Basiswechsel.

Beweis : Sei $i : X \to Y$ eine beliebige abgeschlossene Immersion und $f : Y' \to Y$ ein Morphismus. Sei $\mathrm{Spec}A \simeq U \subset Y$ eine offene affine Teilmenge und setze $V = i^{-1}(U)$. Dann ist auch

$$i\big|_V : V \to U$$

eine abgeschlossene Immersion (ÜA). Nach Proposition 2.4 ist also $V \simeq \mathrm{Spec}A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$.
Nun sei $\mathrm{Spec}B \simeq U' \subset Y'$ eine offene affine Teilmenge mit $f(U') \subset U$. Wir betrachten den Basiswechsel

$$\begin{tikzcd} i_{Y'} : X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\text{Nun ist } i_{Y'}^{-1}(U') &\simeq X \times_Y U' && (1.6)\\
&\simeq i^{-1}(U) \times_U U' && (1.8)\\
&\simeq \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a} \otimes_A B) && (1.5)\\
&\simeq \operatorname{Spec}(B/\mathfrak{a}B), && (\text{ÜA}),
\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{a}B$ das via $A \to B$ erzeugte Ideal von B ist.
Ferner ist $i_{Y'}\big|_{i_{Y'}^{-1}(U')} : i_{Y'}^{-1}(U') \to U'$ gerade der Morphismus zur Quotientenabbildung $B \to B/\mathfrak{a}B$ (ÜA), also ist $i_{Y'}\big|_{i_{Y'}^{-1}(U')}$ eine abgeschlossene Immersion. Indem wir Y' durch solche offenen affinen Teilmengen U' überdecken, folgt die Behauptung. □

Definition 2.6 Ein Schema X heißt **integer**, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei ist.

Lemma 2.7 Ein affines Schema $X \simeq \operatorname{Spec} A$ ist genau dann integer, wenn A ein Integritätsring ist.

Beweis : Ist $X \simeq \operatorname{Spec} A$ integer, so ist $A \simeq \mathcal{O}_X(X)$ nullteilerfrei, d.h. ein Integritätsring. Ist umgekehrt A ein Integritätsring, so sei $U \neq \emptyset$ eine beliebige offene Teilmenge von $X = \operatorname{Spec} A$. Ferner seien $s, t \in \mathcal{O}_X(U)$ gegeben mit

$$st = 0$$

in $\mathcal{O}(U)$. Da A ein Integritätsring ist, ist (0) ein Primideal in A. Es sei $\eta \in \operatorname{Spec} A$ der zugehörige Punkt. Dann ist $\eta \in U$. Wir betrachten die Keime s_η und t_η in $\mathcal{O}_{X,\eta} \simeq A_{(0)} = \operatorname{Quot} A$. Es ist $s_\eta t_\eta = 0$, also $s_\eta = 0$ oder $t_\eta = 0$. Nach [KA], Lemma 7.4 ist $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\eta}$ injektiv, woraus $s = 0$ oder $t = 0$ folgt. Daher ist $\mathcal{O}_X(U)$ nullteilerfrei. □

<u>**Vorsicht:**</u> Ist X ein integres Schema, dann sind alle $\mathcal{O}_{X,x}$ Integritätsringe. Die Umkehrung gilt aber nicht. (Übungsaufgabe)

Proposition 2.8 Ein Schema X ist genau dann integer, wenn X reduziert und irreduzibel ist.

Beweis : Falls X integer ist, so sind alle $\mathcal{O}_X(U)$ Integritätsringe, also insbesondere reduziert. Daher ist X reduziert.

Angenommen $X = X_1 \cup X_2$ für abgeschlossene Teilmengen X_1 und X_2 von X. Dann sind die offenen Teilmengen $U_1 = X \setminus X_1$ und $U_2 = X \setminus X_2$ disjunkt. Also ist nach den Garbenaxiomen die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) & \to & \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2) \\ f & \mapsto & (f|_{U_1}, f|_{U_2}) \end{array}$$

ein Isomorphismus. Da $\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2)$ keine Nullteiler besitzt, folgt $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$, also $X_1 = X$ oder $X_2 = X$. Daher ist X irreduzibel.
Wir nehmen nun an, X ist irreduzibel und reduziert. Es sei $U \subset X$ offen und $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $fg = 0$. Wir betrachten $Y_f = \{x \in U : f_x \in \mathfrak{m}_x\}$ und $Y_g = \{x \in U : g_x \in \mathfrak{m}_x\}$. Diese Teilmengen sind abgeschlossen in U (Übungsaufgabe). Da für alle $x \in U$ gilt $f_x g_x = 0 \in \mathfrak{m}_x$, folgt $U = Y_f \cup Y_g$. Da X irreduzibel ist, ist nach [KA], Lemma 4.9 auch U irreduzibel. Also ist $U = Y_f$ oder $U = Y_g$. Wir können ohne Einschränkung $U = Y_f$ annehmen. Es sei $V \subset U$ eine beliebige offene affine Teilmenge. Aus $D(f|_V) = V \cap (U \setminus Y_f) = \emptyset$ folgt, dass $f|_V$ nilpotent ist. Nun ist $\mathcal{O}_X(V)$ reduziert, also ist $f|V = 0$. Also ist die Einschränkung von f auf alle offenen affinen Teilmengen von U trivial. Daraus folgt $f = 0$. □

Lemma 2.9 Sei X ein irreduzibles Schema. Dann gibt es einen Punkt $\eta \in X$, der in jeder nicht-leeren offenen Teilmenge $U \subset X$ enthalten ist. Es gilt $X = \overline{\{\eta\}}$, wobei $\overline{\{\eta\}}$ der Abschluss der Einpunktmenge $\{\eta\}$ ist. Der Punkt η heißt **generischer Punkt von** X.

Beweis : Sei $\emptyset \neq U = \operatorname{Spec} A \subset X$ eine offene affine Teilmenge. Dann ist U nach [KA], Lemma 4.9 irreduzibel. Nach [KA], Proposition 4.10 gilt also $\operatorname{Spec} A = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A. Sei η der zugehörige Punkt in X. Es ist $X = \overline{\{\eta\}} \cup (X/U)$, also folgt $\overline{\{\eta\}} = X$ aus der Irreduzibilität von X. Aus $\overline{\{\eta\}} = \overline{\{\xi\}} = X$ folgt $\eta = \xi$ (Übungsaufgabe), also ist η unabhänging von der Wahl von U. Da jede nicht-leere offene Teilmenge von X eine offene affine Teilmenge von X enthält, folgt die Behauptung. □

Definition 2.10 i) Ein Schema X heißt **noethersch**, falls X eine endliche offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ besitzt, so dass $\mathcal{O}_X(U_i)$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$ ein noetherscher Ring ist.

ii) Ein Schema X heißt **lokal noethersch**, wenn jeder Punkt eine offene affine Umgebung U besitzt, so dass $\mathcal{O}_X(U)$ noethersch ist.

Beispiel:

i) Ist A ein noetherscher Ring, so ist Spec A ein noethersches Schema.

ii) Für jeden noetherschen Ring A ist der projektive Raum $\mathbb{P}^n_A$ ein noethersches Schema.

Wir haben hier die Eigenschaft noethersch jeweils nur für eine spezielle offene affine Überdeckung gefordert. Mit dieser Definition ist nicht a priori klar, dass für ein noethersches affines Schema Spec A der Ring A noethersch sein muss. Dies folgt aber aus dem nächsten Lemma.

Lemma 2.11 Ein Schema X ist genau dann lokal noethersch, wenn für jede offene affine Teilmenge $U \subset X$ der Ring $\mathcal{O}_X(U)$ noethersch ist.

Beweis : Sei $U \simeq$ Spec A eine offene affine Teilmenge von X. Da X eine Überdeckung durch Spektren noetherscher Ringe besitzt und Lokalisierungen noetherscher Ringe noethersch sind, besitzt X eine Basis der Topologie bestehend aus Spektren noetherscher Ringe. Somit ist $U = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \simeq$ Spec B_i für geeignete noethersche Ringe B_i. Wir wählen $f_i \in A \simeq \mathcal{O}_X(U)$ mit $D(f_i) \subset U_i$. Wir betrachten die Restriktionsabbildungen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_X(U_i) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathcal{O}_X(D(f_i)) \arrow[d, "\wr"] \\
A \arrow[r] & B_i \arrow[r] & A_{f_i}
\end{tikzcd}$$

Es sei $g_i = f_i|_{B_i}$. Da das Bild von g_i unter $\mathrm{res}_{U_i\, D(f_i)} : B_i \to A_{f_i}$ eine Einheit ist, können wir diesen Homomorphismus nach [KA], Lemma 5.2 zu einem Homomorphismus $(B_i)_{g_i} \to A_{f_i}$ fortsetzen. Dieser ist surjektiv, wie man sich anhand des obigen Diagramms leicht überlegt. Also ist auch A_{f_i} ein noetherscher Ring.
Wir können daher annehmen, dass die Überdeckung $(U_i)_i$ von der Form $U_i = D(f_i)$ ist. Da $U \simeq$ Spec A quasi-kompakt ist, können wir nach Übergang zu einer endlichen Teilüberdeckung sogar $U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$ mit noetherschen Ringen A_{f_i} annehmen.
Es sei $\mathfrak{a} \subset A \simeq \mathcal{O}_X(U)$ ein Ideal. Dann ist für alle i das zugehörige Ideal $\mathfrak{a}A_{f_i}$ in der

Lokalisierung A_{f_i} endlich erzeugt. Gilt

$$\mathfrak{a}A_{f_i} = \left(\frac{a_{i_1}}{f_i^{n_1}}, \ldots, \frac{a_{i_r}}{f_i^{n_r}} \right)$$

für $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r} \in \mathfrak{a}$ und $r = r(i)$, so betrachten wir das Ideal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, das von allen a_{i_j} $(i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, r(i))$ erzeugt wird. Da nur endlich viele Indizes im Spiel sind, ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt. Ferner gilt

$$\mathfrak{b}A_{f_i} = \mathfrak{a}A_{f_i} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Sei g ein beliebiges Element von $\mathfrak{a}$. Es gibt ein $m \geqq 0$ mit $f_i^m g \in \mathfrak{b}$ für alle i. Aus $U = \bigcup_{i=1}^{n} D(f_i)$ folgt $(f_1, \ldots, f_n) = A$. Daher ist $1 = c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n$ für geeignete $c_1, \ldots, c_n \in A$.
Für $N \geqq nm$ kommt in jedem Summanden der ausmultiplizierten Summe $(c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)^N$ ein f_i^m vor. Also ist $g = 1\,g = (c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n)^N g \in \mathfrak{b}$, woraus $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ folgt. Also ist $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt, und A ist noethersch. □

Definition 2.12 Es sei A ein Ring und B eine A-Algebra, d.h. wir haben einen Ringhomomorphismus $A \to B$ gegeben. Dann heißt B **von endlichem Typ über A**, falls B als A-Algebra endlich erzeugt ist, d.h. falls es einen surjektiven Homomorphismus von A-Algebren

$$\psi : A[x_1, \ldots, x_n] \to B$$

gibt. Ist zusätzlich der Kern von ψ ein endlich erzeugtes Ideal in $A[x_1, \ldots, x_n]$, so heißt B **von endlicher Präsentation über A**.

Ist A noethersch, so ist nach dem Hilbertschen Basissatz auch $A[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch. In diesem Fall sind die beiden Begriffe von endlichem Typ und von endlicher Präsentation also äquivalent.

Lemma 2.13

i) Sind $A \to B \to C$ Ringhomomorphismen und ist B als A-Algebra von endlichem Typ sowie C als B-Algebra von endlichem Typ, so ist auch C als A-Algebra von endlichem Typ.

ii) Eine analoge Aussage wie in i) gilt für „von endlicher Präsentation“.

iii) Ist A ein Ring und $g \in A$, so ist die Lokalisierung A_g eine A-Algebra von endlichem Typ.

iv) Ist $A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so ist B eine A-Algebra von endlichem Typ.

Beweis : In den Übungen. $\square$

Definition 2.14 i) Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **lokal von endlichem Typ**, falls es eine Überdeckung von Y durch offene affine Teilmengen $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$ gibt, so dass für alle i das Urbild $f^{-1}(U_i) \subset X$ eine offene affine Überdeckung $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j \operatorname{Spec} B_{i_j}$ besitzt, für die für alle i und j der zugehörige Ringhomomorphismus $A_i \to B_{i_j}$ den Ring B_{i_j} zu einer A_i-Algebra von endlichem Typ macht.

ii) $f : X \to Y$ heißt **von endlichem Typ**, falls Y eine offene affine Überdeckung durch $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$ hat, so dass für alle i das Urbild $f^{-1}(U_i) \subset X$ eine endliche offene affine Überdeckung $f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^{r} \operatorname{Spec} B_{i_j}$ besitzt, für die für alle i und j der Ringhomomorphismus $A_i \to B_{i_j}$ den Ring B_{i_j} zu einer A_i-Algebra von endlichem Typ macht.

Definition 2.15 i) ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt **lokal von endlicher Präsentation**, wenn die Bedingung aus Definition 2.14 i) mit „von endlicher Präsentation“ statt „von endlichem Typ“ erfüllt ist.

Proposition 2.16 Ein Morphismus $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ist genau dann von endlichem Typ, wenn der zugehörige Ringhomomorphismus $A \to B$ aus B eine A-Algebra von endlichem Typ macht.

Ein analoges Resultat gilt für „von endlicher Präsentation“ statt für von endlichem Typ.

Beweis : Ist $A \to B$ von endlichem Typ, so ist definitionsgemäß auch $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ von endlichem Typ.
Wir nehmen umgekehrt an, der Schemamorphismus $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ist von endlichem Typ. Nach Voraussetzung existiert eine offene affine Überdeckung $\operatorname{Spec} A = \bigcup_i U_i$ mit $U_i \simeq \operatorname{Spec} A_i$, so dass $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$ mit $V_{ij} \simeq \operatorname{Spec} B_{ij}$ für A_i-Algebren B_{ij} von endlichem Typ gilt. Jedes U_i ist affin, also quasi-kompakt. Daher lässt es sich durch endlich viele offene Standardmengen $D(h_{i_k})$ für $h_{i_k} \in A$

überdecken. Die Inklusion $\alpha : U_i \hookrightarrow U$ entspricht einem Ringhomomorphismus $\varphi = \mathrm{res}_{U\,U_i} : A \to A_i$. Es gilt $D(h_{i_k}) = \alpha^{-1}(D(h_{i_k})) = D(\varphi(h_{i_k}))$, woraus $A_{h_{i_k}} \simeq (A_i)_{\varphi(h_{i_k})}$ folgt.
Ferner gilt $f^{-1}(D(h_{i_k})) \cap V_{ij} = f^{-1}D(\varphi(h_{i_k})) \cap V_{ij} = (f|_{V_{ij}})^{-1}(D(\varphi(h_{i_k}))) = D(\psi \circ \varphi(h_{i_k})) \simeq \mathrm{Spec}\,(B_{ij})_{\psi\circ\varphi(h_{i_k})}$. Nun ist $(B_{ij})_{\psi\circ\varphi(h_{i_k})}$ von endlichem Typ über $(A_i)_{\varphi(h_{i_k})} \simeq A_{h_{i_k}}$, also nach Lemma 2.13 auch von endlichem Typ über A.
Es gilt $\mathrm{Spec}\, B_g \simeq D(g) = i^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g)) \simeq \mathrm{Spec}\,(B_j)_{\varphi(g)}$, also $B_g \simeq (B_j)_{\varphi(g)}$. Daher ist B_g nach Lemma 2.13 eine B_j-Algebra von endlichem Typ, also auch eine A-Algebra von endlichem Typ. Wir können somit nach Verfeinern der Überdeckung annehmen, dass alle V_j offene Standardmengen der Form $V_j = D(g_j)$ für $g_j \in B$ sind. Da $\mathrm{Spec}\, B$ quasi-kompakt ist, reichen endlich viele V_j aus, um $\mathrm{Spec}\, B$ zu überdecken. Für alle j aus der endlichen Indexmenge J wählen wir Erzeuger $b_1^{(j)}/g_j^{n_1(j)}$, ..., $b_r^{(j)}/g_j^{n_r(j)}$ der A-Algebra B_{g_j} aus (mit $r = r(j)$).
Für $b \in B$ und ein j betrachten wir nun $b/1 \in B_{g_j}$. Nach Voraussetzung lässt sich dieses Element als Polynom in $b_1^{(j)}/g_j^{n_1(j)}$, ..., $b_r^{(j)}/g_j^{n_r(j)}$ mit Koeffizienten in A schreiben. Daher gibt es nach Multiplikation mit einem geeignetem g_j^n ein Polynom in $b_1^{(j)}$, ..., $b_r^{(j)}, g_j$ mit Koeffizienten in A, das gleich $g_j^n b$ ist. Da nur endlich viele j auftauchen, können wir n unabhängig von j wählen. Nun ist $D(g_j) = D(g_j^n)$. Aus $\mathrm{Spec}\, B = \bigcup\limits_{j\in J} D(g_j^n)$ folgt $\sum\limits_{j\in J}(g_j^n) = B$. Also existieren Elemente $h_j \in B$ mit $\sum\limits_{j\in J} h_j g_j^n = 1$.
Somit ist $b = \sum\limits_{j\in J} h_j g_j^n b$ ein Polynom in allen $b_i^{(j)}$, g_j und h_j mit Koeffizienten in A. Da dies insgesamt endlich viele Elemente sind, ist B als A-Algebra endlich erzeugt. □

Korollar 2.17 Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata ist genau dann lokal von endlichem Typ, wenn für jede offene affine Teilmenge $U \simeq \mathrm{Spec} A \subset Y$ und jede offene affine Teilmenge $V \simeq \mathrm{Spec} B \subset f^{-1}(U)$ der Ringhomomorphismus $A \to B$ zu $f|_V : V \to U$ den Ring B zu einer $A-$Algebra von endlichem Typ macht.

Beweis : Das folgt aus Proposition 2.16. □

Lemma 2.18 i) Offene Immersionen sind lokal von endlichem Typ.

ii) Abgeschlossene Immersionen sind von endlichem Typ.

iii) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen lokal von endlichem Typ bzw. von endlichem Typ, so ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ lokal von endlichem Typ bzw. von endlichem Typ.

Beweis : In den Übungen. $\square$

Definition 2.19 Es sei k ein Körper. Ein k-Schema X heißt **algebraisch**, falls der Strukturmorphismus $X \to \operatorname{Spec} k$ von endlichem Typ ist.

Beispiel:

i) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset k[x_1, ..., x_n]$ ist $X = \operatorname{Spec} k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{a}$ ein (affines) algebraisches k-Schema.

ii) Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{b} \subset k[x_0, ..., x_n]$ ist $\operatorname{Proj}(k[x_0, ..., x_n]/\mathfrak{b})$ als abgeschlossenes Unterschema des $\mathbb{P}^n_k$ ein algebraisches k-Schema.

Proposition 2.20 Es sei X ein algebraisches k-Schema. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen (d.h. $\{x\}$ ist abgeschlossen), wenn der Restklassenkörper $\kappa(x)$ eine endliche Körpererweiterung von k ist.

Beweis : Nach Voraussetzung hat X eine endliche offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{j=1}^{n} V_j$ mit $V_j \simeq \operatorname{Spec} B_j$, so dass die B_j als k-Algebren von endlichem Typ sind. Falls alle V_j die Behauptung erfüllen, so auch X. Wir können also annehmen, dass $X \simeq \operatorname{Spec} B$ affin ist. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn das zugehörige Ideal in B maximal ist. Ist x abgeschlossen mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_x \subset B$, so gilt

$$\kappa(x) \simeq B_{\mathfrak{m}_x}/\mathfrak{m}_x B_{\mathfrak{m}_x} = B/\mathfrak{m}_x.$$

Nach Lemma 2.13 ist mit B auch der Quotient $\kappa(x) \simeq B/\mathfrak{m}_x$ eine k-Algebra von endlichem Typ. Nach [KA], Satz 3.12 ist $\kappa(x)/k$ eine endliche Körpererweiterung.
Ist umgekehrt $\kappa(x)/k$ eine endliche Körpererweiterung, so sei $\mathfrak{p}_x \subset B$ das Primideal zu x. Da

$$k \subset B/\mathfrak{p}_x \subset \operatorname{Quot}(B/\mathfrak{p}_x) = B_{\mathfrak{p}_x}/\mathfrak{p}_x B_{\mathfrak{p}_x} \simeq \kappa(x)$$

gilt, ist dann $\kappa(x)$ erst recht als $B/\mathfrak{p}_x$-Modul endlich erzeugt. Nach Lemma [KA], 3.9 ist $B/\mathfrak{p}_x$ also ein Körper, d.h. $\mathfrak{p}_x$ ist ein maximales Ideal. $\square$

Lemma 2.21 Die Eigenschaften von endlichem Typ, lokal von endlichem Typ, von endlicher Präsentation und lokal von endlicher Präsentation sind stabil unter Basiswechsel.

Beweis : Nach Wahl geeigneter offener affiner Überdeckungen führt man die Behauptung auf folgendes Problem zurück: Ist B eine $A-$Algebra mit einer der vier Eigenschaften aus der Behauptung und ist C eine beliebige $A-$Algebra, so hat auch $B \otimes_A C$ als $C-$Algebra die entsprechende Eigenschaft. Dies folgt aus der Tatsache, dass ein surjektiver $A-$Algebren-Homomorphismus

$$(*) \quad A[x_1, \ldots, x_n] \to B$$

nach Tensorieren mit C einen surjektiven $C-$Algebren-Homomorphismus

$$C[x_1, \ldots, x_n] \simeq A[x_1, \ldots, x_n] \otimes_A C \to B \otimes_A C$$

ergibt, dessen Kern als Ideal in $C[x_1 \ldots x_n]$ von denselben Erzeugern erzeugt wird wie der Kern von $(*)$. $\square$

3 Separierte und eigentliche Morphismen

Wir betrachten zunächst einen topologischen Raum T. Der Raum T ist genau dann Hausdorffsch, wenn das Bild der Diagonalabbildung

$$\begin{aligned} \triangle : T &\to T \times T \\ x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $T \times T$ ist. Eine ähnliche Bedingung kann man für Schemata formulieren.

Definition 3.1 Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata.

i) Die **Diagonalabbildung** zu f ist definiert als der eindeutige Morphismus

$$\triangle_f : X \to X \times_Y X,$$

der folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\triangle_f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & X \times_Y X \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Die Existenz von $\triangle_f$ folgt natürlich aus der universellen Eigenschaft des Faserproduktes.

ii) Der Morphismus f heißt **separiert**, falls $\triangle_f$ eine abgeschlossene Immersion ist. In diesem Fall sagen wir auch einfach, X ist separiert über Y.

iii) Ein Schema X heißt **separiert**, falls der eindeutig bestimmte Morphismus $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separiert ist.

Nun sind Schemata nur in trivialen Fällen Hausdorffsch als topologische Räume. Trotzdem ist separiert eine sinnvolle Eigenschaft. Ein separiertes Schema muss nämlich nicht Hausdorffsch als topologischer Raum sein. Das liegt daran, dass der topologische Raum des Schemas $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} X$ im allgemeinen nicht das Produkt des topologischen Raumes zu X mit sich selbst ist (siehe Übungen).

Proposition 3.2 Ist $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ein Morphismus zwischen affinen Schemata, so ist f separiert. Insbesondere ist jedes affine Schema separiert.

Beweis : f entspricht einem Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$. Die Diagonalabbildung $\triangle_f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} B \simeq \operatorname{Spec} B \otimes_A B$ wird von dem Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \psi : B \otimes_A B &\to B, \\ \sum_i a_i(b_i \otimes c_i) &\mapsto \sum_i \varphi(a_i) b_i c_i \end{aligned}$$

induziert. Dieser Ringhomomorphismus ψ definiert nämlich einen Schemamorphismus $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec}(B \otimes_A B)$, der das definierende Diagramm zu $\triangle_f$ kommutativ macht. Da ψ surjektiv ist, ist $\triangle_f$ eine abgeschlossene Immersion. $\square$

Beispiel: Es sei k ein Körper und $X_1 = \mathbb{A}^1_k$ sowie $X_2 = \mathbb{A}^1_k$. Wir betrachten die offenen Teilmengen $U_1 = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\} \subset X_1$ und $U_2 = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\} \subset X_2$. Sei $\varphi = \mathrm{id} : U_1 \to U_2$. Entlang dieser Abbildung verkleben wir X_1 und X_2 zu einem Schema X. Wir erhalten eine affine Gerade $\mathbb{A}^1_k$ mit doppeltem Nullpunkt:

Das Faserprodukt $X \times_{\operatorname{Spec} k} X$ ist dann die affine Ebene $\mathbb{A}^2_k$ mit verdoppelten Koordinatenachsen und vierfachem Nullpunkt. Das Bild der Diagonalabbildung enthält aber nur zwei dieser Nullpunkte. Es ist also nicht abgeschlossen (Übungsaufgabe).

Lemma 3.3 i) Offene und abgeschlossene Immersionen sind separiert.

ii) Separiertheit ist stabil unter Komposition.

iii) Separiertheit ist stabil unter Basiswechsel.

Beweis :

i) Ist $i : U \hookrightarrow X$ eine offene Immersion, so ist $U \times_X U \simeq U \times_U U \xrightarrow[p_1]{\sim} U$ nach Proposition 1.8 und Proposition 1.10. Die Diagonalabbildung $\triangle_i : U \to U \times_X U$ ist also ein Isomorphismus. Ist $i : Y \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion, so sei $\operatorname{Spec} A \simeq U \subset X$ eine offene affine Teilmenge. Dann ist

$$i|_{i^{-1}(U)} : i^{-1}(U) \to U \simeq \operatorname{Spec} A$$

eine abgeschlossene Immersion. Nach Proposition 2.4 ist $i^{-1}(U) \simeq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Nun ist $i^{-1}(U) \times_Y X \simeq i^{-1}(U) \times_U i^{-1}(U)$ eine offene Teilmenge von $X \times_Y X$. Ferner ist $\triangle_i|_{i^{-1}(U)}$ gerade die Diagonalabbildung $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \simeq i^{-1}(U) \to i^{-1}(U) \times_U i^{-1}(U) \simeq \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a})$, und $p_1 : \operatorname{Spec}(A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a}) \to \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ ist ein Isomorphismus, denn

$$\begin{array}{rcl} A/\mathfrak{a} & \to & A/\mathfrak{a} \otimes_A A/\mathfrak{a} \\ a + \mathfrak{a} & \mapsto & (a + \mathfrak{a}) \otimes 1 \end{array}$$

ist ein Isomorphismus. Also ist $\triangle_i$ auf $i^{-1}(U) \simeq \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ ein Isomorphismus. Daher ist $\triangle_i$ ein Isomorphismus und insbesondere eine abgeschlossene Immersion.

ii) Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ separiert, das heißt $\triangle_f : X \to X \times_Y X$ und $\triangle_g : Y \to Y \times_Z Y$ sind abgeschlossene Immersionen.
Die Diagonalabbildung $\triangle_{g \circ f} : X \to X \times_Z X$ ist die Komposition von $\triangle_f : X \to X \times_Y X \simeq X \times_Y Y \times_Y X$ mit dem Morphismus $\mathrm{id}_X \times \triangle_g \times \mathrm{id}_X : X \times_Y Y \times_Y X \to X \times_Y (Y \times_Z Y) \times_Y X \simeq X \times_Z X$, denn diese Komposition macht das verlangte Diagramm kommutativ. (Wir benutzen hier Proposition 1.10.)
Nun sind abgeschlossene Immersionen nach Korollar 2.5 stabil unter Basiswechsel, also ist nach Proposition 1.16 auch $\mathrm{id}_X \times \triangle_g \times \mathrm{id}_X$ eine abgeschlossene Immersion. Da abgeschlossene Immersionen stabil unter Komposition sind (Übungsaufgabe), folgt die Behauptung.

iii) Es sei $f : X \to Y$ separiert und $g : Y' \to Y$ ein beliebiger Morphismus. Es sei $X' = X \times_Y Y'$. Wir wollen zeigen, dass die Projektion $f' : X' = X \times_Y Y' \to Y'$

separiert ist. Der Morphismus

$$\begin{aligned} \triangle_f \times \mathrm{id}_{Y'} : X' = X \times_Y Y' &\to X \times_Y X \times_Y Y' \\ &\simeq (X \times_Y Y') \times_{Y'} (X \times_Y Y') \\ &\simeq X' \times_{Y'} X' \end{aligned}$$

macht das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X' & \\ X' \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & X' \times_{Y'} X' \arrow[ul] \arrow[dl] \\ & X' & \end{tikzcd}$$

kommutativ, er stimmt also mit $\triangle_{f'}$ überein. Da abgeschlossene Immersionen stabil unter Basiswechsel sind, ist nach Korollar 2.5 mit $\triangle_f$ auch $\triangle_f \times \mathrm{id}_{Y'}$ eine abgeschlossene Immersion. Also ist $\triangle_{f'}$ eine abgeschlossene Immersion, d.h. f' ist separiert.

□

Definition 3.4 i) Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **abgeschlossen**, wenn das Bild jeder abgeschlossenen Teilmenge von X abgeschlossen in Y ist.

ii) $f : X \to Y$ heißt **universell abgeschlossen**, falls für jedes Y-Schema Y' der Basiswechsel $f_{Y'} : X \times_Y Y' \to Y'$ abgeschlossen ist.

Analog definiert man die Eigenschaften offen und universell offen für Morphismen von Schemata.

Definition 3.5 Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Schemata heißt **eigentlich**, falls f von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen ist.

Proposition 3.6 i) Abgeschlossene Immersionen sind eigentlich.

ii) Eigentliche Morphismen sind stabil unter Komposition und Basiswechsel.

Beweis :

i) Nach Lemma 2.18 und Lemma 3.3 sind abgeschlossene Immersionen von endlichem Typ und separiert. Da abgeschlossene Immersionen abgeschlossen sind und der Basiswechsel einer abgeschlossenen Immersion nach Korollar 2.5 wieder eine abgeschlossene Immersion ist, sind abgeschlossene Immersionen auch universell abgeschlossen.

ii) Die Eigenschaften von endlichem Typ, separiert und universell abgeschlossen sind stabil unter Komposition (Lemma 2.18, Lemma 3.3 und Übungsaufgabe). Nach Lemma 2.21 und Lemma 3.3 sind die Eigenschaften von endlichem Typ und separiert stabil unter Basiswechsel. Die Eigenschaft universell abgeschlossen ist definitiongemäß stabil unter Basiswechsel.

□

Beispiel: Sei k ein Körper. Das Schema $\mathbb{A}^1_k$ ist nicht eigentlich über $\operatorname{Spec} k$. $\mathbb{A}^1_k$ ist zwar von endlichem Typ über k und als affines Schema auch separiert über k, aber nicht universell abgeschlossen. Um das einzusehen, betrachten wir den Basiswechsel

$$p_2 : \mathbb{A}^2_k \simeq \mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$$

von

$$\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k.$$

Der zugehörige Ringhomomorphismus ist die Einbettung

$$\varphi : k[y] \to k[x, y].$$

Wir betrachten die Zariski-abgeschlossene Teilmenge $V((xy-1))$ in $\mathbb{A}^2_k$. Dann ist für jedes $b \neq 0$ in k das Ideal $(x - b^{-1}, y - b) \in V((xy-1))$, und es gilt $(y - b) = \varphi^{-1}((x - b^{-1}, y - b))$. Also ist das Primideal $(y - b) \subset k[y]$ im Bild $p_2(V((xy-1)))$. Andererseits gibt es kein Primideal $\mathfrak{p} \subset k[x, y]$ mit $(xy-1) \subset \mathfrak{p}$ und $y \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, denn ein solches Primideal würde y und $xy - 1$, also 1 enthalten. Daher ist das Primideal (y) nicht in $p_2(V((xy-1)))$. Nun sind die Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1_k$ gerade die endlichen Mengen abgeschlossener Punkte sowie $\emptyset$ und $\mathbb{A}^1_k$. Daher kann für einen unendlichen Körper k die Menge $p_2(V((xy-1)))$ nicht abgeschlossen sein. Also ist $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ für unendliche Körper nicht abgeschlossen. Ist k ein endlicher Körper, so ist $\mathbb{A}^1_k \to \operatorname{Spec} k(x)$ zumindest nicht universell abgeschlossen.

Ein fundamentales Beispiel für einen eigentlichen Morphismus ist ein projektiver Morphismus.

Proposition 3.7 Projektive Morphismen sind eigentlich.

Beweis : Sei $f : X \to S$ ein projektiver Morphismus. Dann gibt es eine abgeschlossene Immersion $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_S$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbb{P}^n_S \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

Nach Proposition 3.6. ist i eigentlich, und eigentliche Morphismen sind stabil unter Komposition. Also genügt es zu zeigen, dass die Projektion $\mathbb{P}^n_S \to S$ eigentlich ist. Nach Proposition 3.6 sind eigentliche Morphismen stabil unter Basiswechsel, also müssen wir nur zeigen, dass $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ eigentlich ist. Nun ist $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ von endlichem Typ und separiert über $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ (Übungsaufgabe). Also genügt es zu zeigen, dass $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ universell abgeschlossen ist. Daher müssen wir also für jedes Schema S nachweisen, dass $\pi : \mathbb{P}^n_S \to S$ abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet. Ist $S = \bigcup_i S_i$ eine offene affine Überdeckung von S, so ist $\mathbb{P}^n_S = \bigcup_i \mathbb{P}^n_{S_i}$ eine offene Überdeckung. Wir können Abgeschlossenheit einer Menge durch Schneiden mit allen Mitgliedern einer offenen Überdeckung testen. Also können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $S = \operatorname{Spec} A$ affin ist. Dann ist $\mathbb{P}^n_S = \mathbb{P}^n_A$, jede abgeschlossene Teilmenge ist also von der Form $V(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset A[x_0, ..., x_n]$. Wir müssen zeigen, dass die Abbildung $\pi : \mathbb{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A = S$ die Menge $V(\mathfrak{a})$ auf eine abgeschlossene Teilmenge von S abbildet. Dazu genügt es zu zeigen, dass $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ offen ist. Für ein $s \in S$ betrachten wir die Faser von π in s, also $\mathbb{P}^n_A \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s) \simeq \mathbb{P}^n_{\kappa(s)}$ (Übungsaufgabe). Nun ist

$$\begin{aligned} p^{-1}(V(\mathfrak{a}) \cap \pi^{-1}(s)) &= p^{-1}(V(\mathfrak{a})) \\ &= V(\mathfrak{a}_s), \end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{a}_s \subset \kappa(s)[x_0, ..., x_n]$ das von $\mathfrak{a} \subset A[x_0, ..., x_n]$ induzierte Ideal ist.
Nun ist s genau dann in $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ enthalten, wenn $V(\mathfrak{a}) \cap \pi^{-1}(s)$ leer ist. Das ist äquivalent zu $V(\mathfrak{a}_s) = \emptyset = V((x_0, ..., x_n))$ also nach [KA], Satz 4.7 zu $(x_0, ..., x_n) \subset \sqrt{\mathfrak{a}_s}$. Nun ist $(x_0, ..., x_n) \subset \sqrt{\mathfrak{a}_s}$ genau dann, wenn es ein $d \geqq 0$ gilt mit $x_0^d, ..., x_n^d \in \mathfrak{a}_s$, und dies ist äquivalent zu der Tatsache, dass für einen geeigneten Grad $m \geqq 0$ jedes homomogene Polynom vom Grad m in $\kappa(s)[x_0, ..., x_n]$ in $\mathfrak{a}_s$ enthalten ist.
Wir schreiben kurz $B = A[x_0, ..., x_n]$. Mit B_m, $\mathfrak{a}_m$, $\kappa(s)[x_0, ..., x_n]_m$, $(\mathfrak{a}_s)_m$ bezeichnen wir jeweils den homogenen Anteil vom Grad m bezüglich der Graduierung. Of-

fenbar ist $(B/\mathfrak{a})_m = B_m/\mathfrak{a}_m$. Es ist $(\mathfrak{a}_s)_m$ das Bild von $\mathfrak{a}_m$ unter der natürlichen Abbildung

$$B = A[x_0, \ldots, x_n] \to \kappa(s)[x_0, \ldots, x_n].$$

Nun ist $(\mathfrak{a}_s)_m = \mathfrak{a}_m \otimes_A \kappa(s)$ (Übungsaufgabe). Wir haben oben gezeigt, dass s genau dann in $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ enthalten ist, wenn

$$\kappa(s)[x_0, \ldots, x_n]_m = (\mathfrak{a}_s)_m$$

gilt, also genau dann, wenn

$$B_m \otimes_A \kappa(s) = \mathfrak{a}_m \otimes_A \kappa(s)$$

gilt. Nach dem Lemma von Nakayama [KA], 3.8, angewandt auf $(B/\mathfrak{a})_m \otimes_A \mathcal{O}_{S,\,s}$, ist also $(B/\mathfrak{a}_m) \otimes_A \mathcal{O}_{S,\,s} = 0$. Dies ist die Lokalisierung von $(B/\mathfrak{a})_m$ nach allen Elementen aus A, die nicht im zu s gehörigen Primideal liegen. Da $(B/\mathfrak{a})_m$ als A-Modul endlich erzeugt ist, finden wir ein f in der Nennermenge mit $f(B/\mathfrak{a})_m = 0$. Dann ist $s \in D(f)$. Jedes Primideal $\mathfrak{p} \in D(f) \subset \operatorname{Spec} A = S$ erfüllt $(B/\mathfrak{a})_m \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = 0$, also gilt auch $(B/\mathfrak{a})_m \otimes_A \kappa(\mathfrak{p}) = 0$. Nach den obigen Überlegungen folgt daraus $\mathfrak{p} \in S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$. Also ist $S \setminus \pi(V(\mathfrak{a}))$ in der Tat offen. □

4 Dimension

Es sei X zunächst ganz allgemein ein topologischer Raum.

Definition 4.1 i) Für einen topologischen Raum X definieren wir die **Dimension** von X wie folgt:

$$\dim X = \sup\{\, n : \text{ es gibt eine Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen } \emptyset \neq Z_0 \subsetneqq Z_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq Z_n \text{ in } X\}.$$

ii) Ist X ein noetherscher topologischer Raum, so heißt X **rein von der Dimension n**, falls alle irreduziblen Komponenten von X die Dimension n haben.

Die Dimension von X ist nach dieser Definition entweder eine natürliche Zahl $\geqq 0$ oder gleich ∞.
Trägt X die diskrete Topologie (d.h. jede Teilmenge von X ist offen), so gilt $\dim X = 0$, da die einzigen irreduziblen Teilmengen von X dann Einpunktmengen sind. Angewandt auf die topologischen Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ergibt sich ebenfalls in beiden Fällen die Dimension 0. Dieser Dimensionsbegriff ist auf Schemata zugeschnitten, wie wir gleich sehen werden.

Proposition 4.2 Es sei X ein topologischer Raum

i) Für jede Teilmenge $Y \subset X$ (versehen mit der Relativtopologie) gilt $\dim Y \leqq \dim X$.

ii) Es sei X irreduzibel von endlicher Dimension. Für eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ ist $\dim Y = \dim X$ genau dann, wenn $Y = X$ ist.

iii) Ist $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$ Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen X_i, so gilt $\dim X = \sup_i \dim X_i$.

Beweis :

i) Sind $Y_1 \subsetneqq Y_2$ abgeschlossene irreduzible Teilmengen in Y, so seien $X_1 = \overline{Y_1}$ und $X_2 = \overline{Y_2}$ die Abschlüsse dieser Teilmengen in X. Nach [KA], Lemma 4.9 sind X_1 und X_2 irreduzibel. Natürlich gilt $X_1 \subset X_2$. Aus $X_1 = X_2$ folgte $Y_1 = X_1 \cap Y = X_2 \cap Y = Y_2$, was ausgeschlossen ist. Also gilt $X_1 \subsetneqq X_2$. Jede Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen in Y induziert also eine Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen in X. Definitionsgemäß folgt daraus $\dim Y \leqq \dim X$.

ii) Ist $Y \subset X$ abgeschlossen mit $\dim Y = \dim X = n$, so gibt es eine Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen

$$Z_0 \subsetneqq Z_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq Z_n \subset Y.$$

Wäre $Y \neq X$, so könnte man diese in X mit $Z_{n+1} = X$ um ein Element verlängern, was $\dim X = n$ widerspräche.

iii) Nach i) ist $\dim X_i \leqq \dim X$ für alle i, also folgt auch $\sup_i \dim X_i \leqq \dim X$. Jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge Z von X ist in einem der X_i enthalten, denn es gilt $Z = \bigcup_{i=1}^{n} (Z \cap X_i)$. Also ist jede Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen von X in einem X_i enthalten, woraus $\dim X \leqq \sup_i \dim X_i$ folgt.

□

Definition 4.3 i) Ist A ein Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, so ist die **Höhe von** $\mathfrak{p}$ definiert als

$$\mathrm{ht}\,(\mathfrak{p}) = \sup\{\, n : \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \text{ ist eine Kette von Primidealen in } A\}.$$

ii) Für einen Ring A ist die **Krulldimension** $\dim A$ definiert als Supremum über alle n, so dass eine Primidealkette $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ in A existiert.

Nach dieser Definition gilt also $\dim A = \sup\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$.

Beispiel:

i) Ist k ein Körper, so ist $\dim k = 0$.

ii) $\dim \mathbb{Z} = 1$.

iii) Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, so gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A_{\mathfrak{p}}$.

Dieser ringtheoretische Dimensionsbegriff ist eng verwandt mit obiger Dimension für topologischer Räume. Es gilt nämlich:

Proposition 4.4 Sei A ein Ring. Dann gilt

i) $\dim \operatorname{Spec} A = \dim A = \dim A^{\mathrm{red}}$, wobei $A^{\mathrm{red}} = A/\operatorname{Nil}(A)$ ist.

ii) $\dim A = \sup\{\dim A_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \subset A \text{ maximales Ideal}\}$.

Beweis :

i) Nach [KA], Proposition 4.10 liefert $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ eine inklusionsumkehrende bijektive Korrespondenz zwischen den Primidealen in A und den irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von Spec A. Also entsprechen die Ketten von Primidealen in A bijektiv den Ketten irreduzibler abgeschlossener Teilmengen in Spec A, woraus definitionsgemäß $\dim \operatorname{Spec} A = \dim A$ folgt. Da $\operatorname{Nil}(A)$ der Schnitt aller Primideale in A ist, entsprechen die Primideale in A bijektiv und inklusionserhaltend den Primidealen in A^{red}, woraus $\dim A = \dim A^{\mathrm{red}}$ folgt.

ii) Die Primideale in $A_{\mathfrak{m}}$ entsprechen bijektiv und inklusionserhaltend den Primidealen in A, die in $\mathfrak{m}$ enthalten sind. Daraus folgt sofort die Behauptung.

□

Beispiel: Jeder Hauptidealring, der kein Körper ist, hat Dimension 1. Also gilt etwa $\dim k[T] = \dim \mathbb{A}^1_k = 1$ für jeden Körper k.

Ein weiterer wichtiger Begriff ist die Kodimension einer irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge.

Definition 4.5 i) Es sei X ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Dann definieren wir die **Kodimension** von Y in X als

$$\operatorname{codim}(Y, X) = \sup \{ n : Y \subset Z_0 \subsetneqq Z_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq Z_n \subset X \\ Z_i \text{ irreduzibel, abgeschlossen} \}.$$

ii) Ist X ein noetherscher topologischer Raum, so definieren wir für jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge Z von X mit irreduziblen Komponenten Z_1, ..., Z_r die Kodimension von Z in X als

$$\operatorname{codim}(Z, X) = \min_{i=1, \ldots, r} \operatorname{codim}(Z_i, X).$$

Die Kodimension hat folgende ringtheoretische Bedeutung:

Proposition 4.6 Es sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann gilt

$$\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) = \operatorname{codim}(V(\mathfrak{p}), \operatorname{Spec} A).$$

Beweis : Die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von Spec A, die $V(\mathfrak{p})$ enthalten, entsprechen bijektiv und inklusionserhaltend den Primidealen $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Also gilt

$$\operatorname{codim}(V(\mathfrak{p}), \operatorname{Spec} A) = \operatorname{ht}(\mathfrak{p}).$$

Die Primideale in $A_{\mathfrak{p}}$ entsprechen bijektiv und inklusionserhaltend den Primidealen in A, die in $\mathfrak{p}$ liegen. Also ist $\dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$. □

Offenbar gilt für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$, dass $\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) \leqq \dim X$ ist. Hier gilt im Allgemeinen nicht die Gleichheit.

Beispiel: Die irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen der Kodimension eins in $\mathbb{A}^2_k$ sind gerade die Mengen $V\big((f)\big)$ für $f \neq 0$ und f keine Einheit in $k[x, y]$.

Um die Höhe von Primidealen abzuschätzen, ist folgende Tatsache nützlich:

Lemma 4.7 Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, das von r Elementen erzeugt wird. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, das minimal unter allen Primidealen ist, die $\mathfrak{a}$ enthalten, so gilt $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) \leq r$.

Beweis : [Liu], Chapter 2, Corollary 5.14, S.71. □

Jetzt können wir für einen beliebigen Körper k die Dimension von integren algebraischen k-Schemata bestimmen. Dazu benötigen wir noch folgenden Begriff:

Definition 4.8 Es sei k ein Körper und K/k eine Körpererweiterung. Falls es einen Zwischenkörper F von K/k gibt, so dass

i) $F \simeq k(x_1, ..., x_d)$ und

ii) K/F algebraisch

ist, so heißt K/k **von endlichem Transzendenzgrad**. Die Zahl $d = \text{trdeg}\,(K/k)$ wird als **Transzendenzgrad** von K/k bezeichnet.

Man kann zeigen, dass jede Körpererweiterung K/k, so dass K eine k-Algebra von endlichem Typ ist, einen endlichen Transzendenzgrad besitzt. Dieser ist außerdem wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Zwischenkörpers F.

Satz 4.9 Es sei k ein Körper und B eine $k-$Algebra, die ein Integritätsring ist. Dann gilt

$$\dim B = \text{trdeg}(\text{Quot}B/k).$$

Beispiel: $\dim \mathbb{A}_k^n = \dim k[x_1, \ldots, x_n] = n$.

5 Reguläre Schemata und der Tangentialraum

Definition 5.1 Es sei X ein Schema. Für jedes $x \in X$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_x$ das maximale Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,\,x}$ und mit $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,\,x}/\mathfrak{m}_x$ wie immer den Restklassenkörper. Dann ist $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ ein $\kappa(x)$-Vektorraum (Übungsaufgabe). Seinen Dualraum

$$T_{X,\,x} = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee = \text{Hom}_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2,\, \kappa(x))$$

nennen wir den **Tangentialraum** von X in x.

Ist $f : X \to Y$ ein Schemamorphismus mit $f(x) = y$, so induziert der lokale Homomorphismus

$$f : \mathcal{O}_{Y,\,y} \to \mathcal{O}_{X,\,x}$$

eine Abbildung $T_{X,\,x} = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^\vee \to (\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2)^\vee = T_{Y,\,y}$. Diese induziert eine $\kappa(x)$-lineare Abbildung

$$T_{f,\,x} : T_{X,\,x} \to T_{Y,\,y} \otimes_{\kappa(y)} \kappa(x),$$

die wir **Tangentialabbildung** zu f in x nennen.

Proposition 5.2 i) Ist X ein lokal noethersches Schema, so gilt für alle $x \in X$

$$\dim_{\kappa(x)} T_{X,\,x} \geqq \dim \mathcal{O}_{X,\,x}.$$

ii) Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Schemamorphismen, so gilt für $f(x) = y$ und $g(y) = z$:

$$T_{g \circ f,\,x} = (T_{g,\,y} \otimes_{\kappa(y)} \mathrm{id}_{\kappa(x)}) \circ T_{f,\,x}.$$

Beweis :

i) Da X lokal noethersch ist, ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein noetherscher Ring. Es genügt zu zeigen $\dim \mathcal{O}_{X,x} \leqq \dim_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$. Da $\mathfrak{m}_x$ endlich erzeugt ist, ist $d = \dim_{\kappa(x)}(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) < \infty$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{m}_x$ von d Elementen erzeugt wird. Dazu wählen wir beliebige Urbilder $a_1, \ldots, a_d \in \mathfrak{m}_x$ einer $\kappa(x)-$Basis von $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ aus. Das Ideal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ erfüllt dann $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_x$ und $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}_x^2$. Wir betrachten den endlich erzeugten $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{a}$. Dieser erfüllt $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_x(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{a})$, also folgt nach dem Lemma von Nakayama [KA], 3.8 $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_x$. Also ist $\mathfrak{m}_x$ von d Elementen erzeugt. Da $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \mathrm{ht}(\mathfrak{m}_x)$ gilt, folgt die Behauptung aus Lemma 4.7.

ii) Das folgt direkt aus den Definitionen.

□

Lemma 5.3 Ist A ein Ring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so vermittelt die kanonische Abbildung $A \to A_{\mathfrak{m}}$ einen Isomorphismus.

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}\, A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^2 A_{\mathfrak{m}}.$$

Beweis : Es ist $A/\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}\, A_{\mathfrak{m}}$ (Übungen). Daraus folgt die Behauptung. □

Es sei k ein Körper und $y \in \mathbb{A}_k^n(k)$. Mit E bezeichnen wir den k-Vektorraum k^n, mit $E^\vee$ seinen Dualraum. Wir schreiben die Elemente aus $E = k^n$ als Zeilenvektoren.

Wir definieren die Abbildung

$$\begin{array}{rcll} D_y : k\,[x_1,\, ...,\, x_n] & \to & E^\vee & \text{durch} \\ f & \mapsto & D_y f, & \end{array}$$

wobei $D_y f : E \to k$ die Abbildung $(t_1,\, ...,\, t_n) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) t_i$ ist.

Die Linearform $D_y f$ auf E heißt auch Differential von f in y. Es gilt $D_y(fg) = f(y)D_y(g) + g(y)D_y g$ nach der Produktregel.

Proposition 5.4 Sei $y \in \mathbb{A}_k^n(k)$ und $\mathfrak{m}$ das zugehörige maximale Ideal in $k[x_1, ..., x_n]$.

i) Die Einschränkung von D_y auf $\mathfrak{m}$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \simeq E^\vee.$$

ii) Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$T_{\mathbb{A}_k, y} \simeq E.$$

Beweis : Es ist $\mathfrak{m} = (x_1 - \lambda_1, ..., x_n - \lambda_n)$, wobei $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in k^n = \mathbb{A}_k^n(k)$. der von y induzierte Punkt ist

i) Wir entwickeln $f \in \mathfrak{m}$ in eine Taylorreihe um $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \lambda_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda_1, ..., \lambda_n) + \text{ Terme höherer Ordnung},$$

denn $f(\lambda_1, ..., \lambda_n) = 0$. Die Terme höherer Ordnung liegen in $\mathfrak{m}^2$, daraus folgt die Behauptung.

ii) Es sei $\mathfrak{m}_y$ das maximale Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n, y}$. Nach Lemma 5.3 gilt

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2.$$

Daraus folgt

$$T_{\mathbb{A}_k^n, y} = (\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2)^\vee \simeq (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\vee \simeq E^\vee$$

nach i).

□

Für jeden k-Untervektorraum $F \subset E$ sei $F^\perp = \{\varphi \in E^\vee : \varphi(v) = 0 \quad \text{für alle } v \in F\}$. Dann haben wir eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \to F^\perp \to E^\vee \to F^\vee \to 0.$$

Proposition 5.5 Es sei $X = \operatorname{Spec} k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{a}$ und $j : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ die kanonische abgeschlossene Immersion. Für jedes $u \in X(k)$ induziert dann die Tangentialabbildung

$$T_{j, u} : T_{X,u} \to T_{\mathbb{A}_k^n, j(u)} \overset{(5.4)}{\simeq} E$$

einen Isomorphismus von $T_{X,\,u}$ auf $(D_{j(u)}\mathfrak{a})^{\perp} \subset E$. Der Tangentialraum $T_{X,\,u}$ ist also isomorph zu

$$\{(t_1,\,...,\,t_n) \in E : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial j}{\partial x_i}(u)t_i = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}.$$

Dies ist analog zur klassischen Definition des Tangentialraums von Untermannigfaltigkeiten des affinen Raums in der Analysis.

Beweis : Es sei $\mathfrak{m} \subset k\,[x_1,\,...,\,x_n]$ das maximale Ideal zu $j(u) \in \mathbb{A}_k^n(k)$. Dann entspricht der Punkt $u \in X(k)$ dem maximalen Ideal $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/\mathfrak{a} \subset k\,[x_1,\,...,\,x_n]/\mathfrak{a}$. Wir haben eine natürliche exakte Sequenz von k- Vektorräumen

$$0 \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to 0.$$

Die Abbildung

$$T_{j,\,u} : T_{X,\,u} = (\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)^{\vee} \to (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^{\vee} = T_{\mathbb{A}_k^n,\,j(u)}$$

entsteht durch Dualisieren der Surjektion $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$, ist also injektiv. Nach Proposition 5.4 ist

$$D_{j(u)} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\sim} E^{\vee}$$

ein Isomorphismus. Der Unterraum $\mathfrak{a}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{m}^2$ wird dabei auf $D_{j(u)}(\mathfrak{a})$ abgebildet. Also ist $0 \to D_{j(u)}(\mathfrak{a}) \to E^{\vee} \to \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \to 0$ exakt. Der Übergang zu den Dualräumen liefert die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccc} (\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2)^{\vee} & \to & (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^{\vee} \\ \wr\!| & & \wr\!| \\ 0 \to T_{X,\,u} & \to & E \to D_{j(u)}(\mathfrak{a})^{\vee} \to 0, \end{array}$$

woraus $T_{X,\,u} \simeq D_{j(u)}(\mathfrak{a})^{\perp} = \{(t_1,\,...,\,t_n) \in E : \varphi(t_1,\,...,\,t_n) = 0 \text{ für alle } \varphi \in D_{j(u)}(\mathfrak{a})\} = \{(t_1,\,...,\,t_n) \in E : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)t_i = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\}$ folgt. □

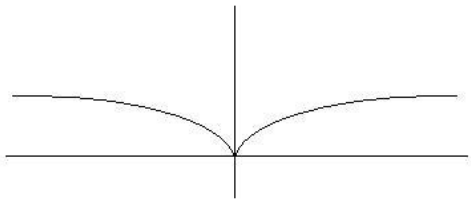
Beispiel: Wir betrachten $X = \operatorname{Spec} k\,[x,\,y]/(x^2 - y^3)$ und den Punkt $a = (0,0) \in X(k)$, der zum maximalen Ideal $(x,\,y)$ gehört. Es ist

$$\frac{\partial(x^2 - y^3)}{\partial x} = 2x \quad \text{und} \quad \frac{\partial(x^2 - y^3)}{\partial y} = -3y^2.$$

Also ist $T_{X,\,a} \simeq k^2$ nach Proposition 5.5.
Ist $b \neq a$ in $X(k)$ mit zugehörigem maximalen Ideal $(x - b_1,\,y - b_2)$, wobei $b_1^2 = b_2^3$ gilt, so ist

$$T_{X,\,b} = \{(t_1,\,t_2) \in k^2 : 2b_1t_1 = 3b_2^2t_2\}$$

eindimensional.
Man sieht an folgender graphischer Darstellung von $X(k)$, dass der Punkt $(0,\,0)$ zwei Tangentialrichtungen zulässt, alle anderen Punkte hingegen nur eine.



Definition 5.6 Ein noetherscher lokaler Ring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper $k = A/\mathfrak{m}$ heißt regulär, falls $\dim A = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ gilt.

Man kann zeigen, dass jeder reguläre noethersche lokale Ring ein Integritätsring ist.

Definition 5.7 i) Es sei k ein Körper. Eine **diskrete Bewertung** auf k ist eine Abbildung

$$\nu : k^* \to \mathbb{Z},$$

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\nu(\alpha\beta) = \nu(\alpha) + \nu(\beta)$, d.h. ν ist ein Gruppenhomomorphismus.

b) $\nu(\alpha\beta) \geqq \min\{\nu(\alpha), \nu(\beta)\}$.

ii) Ein Integritätsring A heißt **diskreter Bewertungsring**, falls es eine diskrete Bewertung ν auf Quot A gibt mit

$$A = \{x \in (\text{Quot } A)^* : \nu(x) \geqq 0\} \cup \{0\}.$$

Satz 5.8 Für einen lokalen noetherschen Integritätsring A der Dimension 1 sind folgende Aussagen äquivalent:

i) A ist ein diskreter Bewertungsring

ii) Das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist ein Hauptideal.

iii) A ist regulär.

i) $\Rightarrow$ ii): Sei $\nu : (\mathrm{Quot} A)^* \to \mathbb{Z}$ die diskrete Bewertung mit $A = \{x : \nu(x) \geqq 0\} \cup \{0\}$. Dann gilt $A^* = \{x : \nu(x) = 0\}$. Also ist $\mathfrak{m} = \{x : \nu(x) > 0\}$ das maximale Ideal in A. Wähle ein $\pi \in A$, so dass $\nu(\pi)$ ein minimales Element in $\nu(\mathfrak{m}) \subset \mathbb{Z}$ ist. Dann gilt $\mathfrak{m} = (\pi)$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Nach Proposition 5.2 ist $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geqq \dim A = 1$. Da $\mathfrak{m} = (\pi)$ ein Hauptideal ist, wird $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von einem Element erzeugt. Also gilt $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1 = \dim A$.

iii) $\Rightarrow$ i): Sei $\pi \in \mathfrak{m}$ ein Element, dessen Restklasse mod $\mathfrak{m}^2$ den eindimensionalen k-Vektorraum $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ erzeugt. Wie im Beweis von Proposition 5.2 ii) zeigt man $\mathfrak{m} = (\pi)$. Für jedes $a \neq 0$ in A definieren wir

$$\nu(a) = \max\{n : a \in (\pi^n)\} = \max\{n : \pi^n \text{ teilt } a \text{ in } A\}.$$

Wir setzen diese Funktion durch $\nu(a/b) = \nu(a) - \nu(b)$ auf $(\mathrm{Quot}\, A)^*$ fort. Das definiert eine diskrete Bewertung mit Bewertungsring A.

Lemma 5.9 Ist A ein regulärer lokaler Ring, dann ist für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ auch $A_{\mathfrak{p}}$ regulär.

Beweis : Übungsaufgabe. $\square$

Jetzt können wir den Regularitätsbegriff auf Schemata übertragen.

Definition 5.10 Sei X ein lokal noethersches Schema und $x \in X$. Dann heißt X **regulär in** x, falls der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ regulär ist. Das Schema X heißt **regulär**, falls es regulär in allen Punkten $x \in X$ ist.
Ein Punkt $x \in X$, in dem X nicht regulär ist, wird auch **singulärer Punkt** oder Singularität genannt.

Definitionsgemäß ist X genau dann regulär in $x \in X$, wenn $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim T_{X,x}$ gilt. Nach Lemma 5.9 ist X genau dann regulär, wenn es in allen abgeschlossenen Punkten regulär ist.

Beispiel: Ist k ein Körper, so ist für alle $n \geqq 0$ der affine Raum $\mathbb{A}^n_k$ und der projektive Raum $\mathbb{P}^n_k$ ein reguläres Schema.

Satz 5.11 (Jacobikriterium) Es sei k ein Körper und $X = \operatorname{Spec} k\,[x_1,\, ...,\, x_n]/\mathfrak{a}$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset k\,[x_1,\, ...,\, x_n]$. Wir betrachten für ein $u \in X(k)$ und ein Erzeugendensystem $\mathfrak{a} = (f_1,\, ...,\, f_r)$ von $\mathfrak{a}$ die (Jacobi-)Matrix

$$J_u = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u)\right)_{\substack{i=1,\,...,\,r \\ j=1,\,...,\,n}}$$

Dann ist X genau dann regulär in u, wenn der Rang von J_u gleich $n - \dim \mathcal{O}_{X,\,u}$ ist.

Beweis : Nach Proposition 5.5 ist $\dim T_{X,\,u} = \dim\,(D_{j(u)}\mathfrak{a})^{\perp} = n - \dim D_{j(u)}\mathfrak{a}$, wobei $j : X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$ die kanonische abgeschlossene Immersion ist. Nun ist $D_{j(u)}(\mathfrak{a})$ als k-Vektorraum erzeugt durch die Vektoren

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(u),\, ...,\, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(u)\right),$$

aufgefasst als Linearformen auf k^n. Das sind aber gerade die Zeilen der Matrix J_u. Also gilt $\dim D_{j(u)}(\mathfrak{a}) = \operatorname{rang} J_u$, woraus $\dim T_{X,\,u} = n - \operatorname{rang} J_u$ folgt. Daher gilt genau dann $\dim T_{X,\,u} = \dim \mathcal{O}_{X,\,u}$, wenn $\operatorname{rang} J_u = n - \dim \mathcal{O}_{X,\,u}$ gilt. □

Definition 5.12 Ein Schema X, das lokal von endlichem Typ über einem Körper k ist, heißt **glatt über** k, falls für einen (und damit jeden) algebraischen Abschluss $\overline{k}$ von k das Basiswechselschema

$$X_{\overline{k}} = X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \overline{k}$$

regulär ist. (Man sagt auch, X ist **geometrisch regulär** über k).

Man kann zeigen, dass aus $X_{\overline{k}}$ regulär auch X regulär folgt. Ferner gilt: Ist k ein vollkommener Körper, d.h. ist jede endliche algebraische Erweiterung von k separabel, so ist X glatt über k, falls X regulär ist.

Beispiel: $\mathbb{A}^n_k$ und $\mathbb{P}^n_k$ sind glatt über k.

Um allgemein zu erklären, wann ein Morphismus glatt ist, brauchen wir noch einen weiteren Begriff.

Definition 5.13 Sei A ein kommutativer Ring. Ein A-Modul M heißt **flach**, falls für jede injektive Abbildung

$$i : N' \to N$$

von A-Moduln auch die induzierte Abbildung

$$i \otimes M : N' \otimes_A M \to N \otimes_A M$$

injektiv ist.

Es gilt dann sogar, dass für jede exakte Sequenz $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ von A-Moduln die induzierte Sequenz $0 \to N' \otimes_A M \to N \otimes_A M \to N'' \otimes_A M \to 0$ exakt ist.

Definition 5.14 Es sei Y ein lokal Noethersches Schema und $f : X \to Y$ ein Morphismus lokal von endlichem Typ. Dann heißt f **glatt**, falls

i) für jedes $x \in X$ der Homomorphismus $f_x^H : \mathcal{O}_{Y,\, f(x)} \to \mathcal{O}_{X,\, x}$ den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,\, x}$ zu einem flachen $\mathcal{O}_{Y,\, f(y)}$-Modul macht, und falls

ii) für jedes $y \in Y$ die Faser

$$X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \kappa(y) \to \operatorname{Spec} \kappa(y)$$

glatt ist, d.h. falls

$$X_{\overline{y}} = X \times_Y \operatorname{Spec} \overline{\kappa(y)}$$

ein reguläres Schema ist.

Ein Morphismus in der obigen Situation ist also genau dann glatt, wenn er flach ist und geometrisch reguläre Fasern besitzt.

Literatur

[KA] Annette Werner: *Kommutative Algebra*. Vorlesungsskript WS 2010/11.

[Liu] Qing Liu: *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford Science Publications, 2002.