Skript zur Vorlesung

Einführung in die Algebraische Geometrie

Wintersemester 2007/2008
Frankfurt am Main

Prof. Dr. Annette Werner

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In der Algebraischen Geometrie studiert man Lösungsmengen von Polynomgleichungen mit geometrischen Methoden. Beispiele für Polynomgleichungen sind etwa die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + & \cdots & +a_{1n}x_n = b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & a_{mn}x_n = bm, \end{array}$$

wobei $(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ und $b_1, \ldots, b_m$ Elemente eines Körpers k sind.
In der Linearen Algebra lernt man, wann ein solches Gleichungssystem eine Lösung in k^n besitzt und wie man die Lösungsmenge beschreiben kann.

Ein weiteres Beispiel sind die Polynomgleichungen in einer Unbestimmten

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

für $a_1, \ldots, a_n \in k$, die man in der Algebra studiert. Ist eine solche Gleichung über k nicht lösbar, so gibt es eine algebraische Körpererweiterung L/K, in der sie lösbar ist.

In der Algebraischen Geometrie wollen wir Lösungsmengen von beliebigen Polynomen in beliebig vielen Unbestimmten studieren. Das erfordert natürlich etwas mehr Aufwand.

Wir bezeichnen den Polynomring in n Unbestimmten über dem Körper k mit $k[x_1, \ldots, x_n]$. Für $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ setzen wir dann

$$\begin{aligned} V_k(f_1, \ldots, f_m) = \{P = (P_1, \ldots, P_n) \in k^n : \\ f_1(P_1, \ldots, P_n) = \ldots = f_m(P_1, \ldots, P_n) = 0. \end{aligned}$$

$V_k(f_1, \ldots, f_m)$ ist also die Menge aller gemeinsamen Nullstellen von $f_1, \ldots, f_m$ in k.

Beispiel:

i) Ist $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$, so ist $V_{\mathbb{R}}(f) = \{(P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2 : P_1^2 + P_2^2 = 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$.

Wir können auch

$$V_{\mathbb{Q}}(f) = \{(P_1, P_2) \in \mathbb{Q}^2 : P_1^2 + P_2^2 = 1\}$$

betrachten, dies ist die Menge der rationalen Zahlen auf dem Einheitskreis. Auch $V_{\mathbb{C}}(f) = \{(P_1, P_2) \in \mathbb{C}^2; P_1^2 + P_2^2 = 1\}$ ist definiert; dies ist allerdings nicht der Einheitskreis in $\mathbb{C}^2$!

Da f nur die Koeffizienten 0 und 1 hat, können wir f auch im Polynomring $\mathbb{F}_2[x, y]$ auffassen. Dann ist

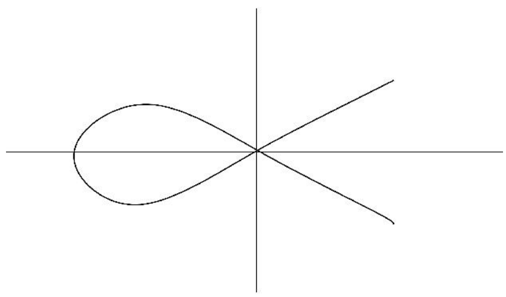
$$\begin{aligned} V_{\mathbb{F}_2}(f) &= \{P_1, P_2) \in \mathbb{F}_2^2 : P_1^2 + P_2^2 = 1\} \\ &= \{(0,1), (1,0)\}. \end{aligned}$$

Wir sehen schon an diesem einfachen Beispiel, dass die Nullstellenmenge von f entscheidend vom gewählten Grundkörper abhängt.

ii) Wir betrachten $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$. Hier ist

$$V_{\mathbb{R}}(f) = \{(P_1, P_2) \in \mathbb{R}^2 : P_2^2 = P_1^3 + P_1^2\}.$$

Dies ist eine Kurve mit einem Doppelpunkt:



Diese Kurve lässt sich „parametrisieren“ durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi = \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t^2 - 1, t^3 - t). \end{aligned}$$

Es gilt $\varphi(\mathbb{R}) \subset V_{\mathbb{R}}(f)$, wie man sofort nachrechnet.
Ferner ist φ injektiv für $t \notin \{\pm 1\}$, denn aus $t^2 - 1 = s^2 - 1$ und $t^3 - t = s^3 - s$ folgt $t(s^2-1) = s(s^2-1)$, also für $s \neq \pm 1$ auch $t = s$.

Die Tatsache, dass $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$ gilt, erklärt den Doppelpunkt der Kurve.

iii) Die aus der Linearen Algebra bekannte Menge

$$GL_n(k) = \{A \in k^{n \times n} : \det A \neq 0\}$$

der invertierbaren $(n \times n)-$ Matrizen mit Einträgen in k lässt sich ebenfalls als Nullstellenmenge von Polynomen schreiben.
Dazu brauchen wir n^2 Unbestimmte $(x_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}}$ und eine zusätzliche Unbestimmte T. Die Determinante einer Matrix ist ein Polynom in den Einträgen, wie man etwa an der Leibniz-Formel sieht. Daher ist $\det\big((x_{ij})_{i,j}\big)$ ein Polynom in $k[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$. Wir betrachten das Polynom

$$f\big((x_{ij})_{i,j}, T\big) = \det(x_{ij})T - 1 \in k[x_{11}, \ldots, x_{nn}, T].$$

Es ist

$$V_k(f) = \{(a_{ij})_{i,j} \in k^{n \times n}, t \in k : \det(a_{ij})_{i,j}\, t = 1\}.$$

Diese Nullstellenmenge lässt sich mit Hilfe der Abbildung

$$GL_n(k) \to V_k(f)$$

$$A \mapsto (A, \tfrac{1}{\det A})$$

mit der Menge $GL_n(k)$ identifizieren.

iv) Wir betrachten nun für $n \geq 2$ noch das berühmte Beispiel

$$f(x,y,z) = x^n + y^n - z^n.$$

Es ist

$$V_{\mathbb{Q}}(f) = \{(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3 : a^n + b^n = c^n\}$$

gerade die Menge der rationalen Lösungen der Fermat-Gleichung $x^n + y^n = z^n$. (Pierre de Fermat (1601 oder 1607/08 bis 1665) war ein französischer Jurist und genialer Hobbymathematiker, der u.a. das Traktat „Arithmetika" von Diophantos von Alexandria mit Randnotizen versah.) Diese hat immer die trivialen Lösungen $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ (und Vielfache davon) sowie $(-1,1,0)$, falls n ungerade ist bzw. $(0,1,-1)$ und $(1,0,-1)$, falls n gerade ist. Man nennt eine Lösung (a,b,c) nicht trivial, falls $abc \neq 0$ ist.
Für $n = 2$ gibt es unendlich viele nicht-triviale Lösungen, die sogenannten Pythagoräischen Tripel

$$a = 2AB\ ,\ b = A^2 - B^2\ ,\ c = A^2 + B^2$$

für ganze Zahlen $A > B > 0$. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2AB)^2 + (A^2 - B^2)^2 \\ &= 4A^2B^2 + A^4 - 2A^2B^2 + B^4 \\ &= (A^2 + B^2)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Für $A = 2$ und $B = 1$ ergibt sich das bekannte Pythagoräische Tripel $(2,3,5)$.
Ist $n \geqq 3$, so sagt die berühmte Fermatsche Vermutung, dass die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

keine nicht-triviale Lösung in $\mathbb{Q}^3$ besitzt. Mit anderen Worten, die Nullstellenmenge $V_{\mathbb{Q}}(f)$ besteht nur aus den oben angegebenen trivialen Lösungen.

Die Fermatsche Vermutung wurde 1995 von Andrew Wiles mit den hochentwickelten Methoden der Algebraischen Geometrie bewiesen.

2 Der Hilbert'sche Basissatz

Wir erinnern zunächst an einige Begriffe aus der Ringtheorie.

Ein **Ring** ist eine Menge A mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, für die folgende Bedingungen gelten:

i) $(A, +)$ ist eine abelsche Gruppe, insbesondere existiert also ein Nullelement 0 in A.

ii) Die Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ und distributiv, d. h. es gilt in A

$$a(b+c) = ab + ac$$

und

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Alle Ringe, die wir betrachten werden, sind **kommutativ mit 1**, d.h. es gilt zusätzlich

iii) $ab = ba$ für alle $a, b \in A$.

iv) Es gibt ein Einselement $1 \in A$ mit $1a = a1 = a$ für alle $a \in A$.

Ab sofort treffen wir folgende Vereinbarung: Mit Ring meinen wir immer einen kommutativen Ring mit Eins.

Ein **Ringhomomorphismus** ist eine Abbildung $f : A \to B$ zwischen Ringen, für die

i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

ii) $f(ab) = f(a)f(b)$

iii) $f(1) = 1$

gilt.
f heißt **Isomorphismus** von Ringen, falls es einen Ringhomomorphismus $g : B \to A$ gibt, so dass $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Ringhomomorphismus f injektiv und surjektiv ist.
Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subset A$ heißt **Ideal**, falls

i) $(\mathfrak{a}, +)$ eine Untergruppe von $(A, +)$ ist, d.h. es ist $0 \in \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}$ ist abgeschlossen unter $+$ und $-$

ii) $\mathfrak{a}A = \mathfrak{a}$ gilt, d.h. für alle $a \in \mathfrak{a}$ und $x \in A$ ist $xa \in \mathfrak{a}$.

Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so erbt die Quotientengruppe $A/\mathfrak{a}$ eine Multiplikationsabbildung von A und wird damit selbst ein Ring. Die Abbildung

$$A \to A/\mathfrak{a}$$

$$x \mapsto x + \mathfrak{a},$$

die x auf die Nebenklasse von x modulo $\mathfrak{a}$ abbildet, ist ein surjektiver Ringhomomorphismus.

Ein **Nullteiler** in A ist ein Element $a \in A$, so dass ein $b \in A$ existiert mit $b \neq 0$ und $ab = 0$.

Beispiel: Ist $k > 1$ und $l > 1$, so existieren für $n = kl$ Nullteiler im Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, denn es gilt

$$(k + n\mathbb{Z})(l + n\mathbb{Z}) = 0 \text{ in } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

und beide Faktoren sind $\neq 0$.

Definition 2.1 Ein kommutativer Ring mit 1, der keine Nullteiler enthält, heißt **Integritätsring**.

Beispiel: $\mathbb{Z}$, jeder Körper k und jeder Polynomring $k[x_1, \ldots, x_n]$ über einem Körper k sind Beispiele für Integritätsringe.

Wir benötigen nun noch einige Tatsachen über Ideale. Jedes $a \in A$ definiert ein sogenanntes **Hauptideal** $(a) = aA = \{ab : b \in A\}$.
Ist jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ein Hauptideal, so heißt A **Hauptidealring**. Ein Ideal $\mathfrak{p} \neq A$ in A heißt **Primideal**, falls gilt: Ist $ab \in \mathfrak{p}$ für a und b in A, so gilt $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{p} \subset A$ genau dann ein Primideal, wenn $A/\mathfrak{p}$ nullteilerfrei ist.

Beispiel: Ist p eine Primzahl, so ist das von p erzeugte Hauptideal (p) in $\mathbb{Z}$ ein Primideal. Ferner ist $(0) \subset \mathbb{Z}$ ein Primideal.

Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ heißt **maximales Ideal**, falls $\mathfrak{m} \neq A$ ist und falls für jedes Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{a} \underset{\neq}{\subset} A$ schon $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$ folgt. Ein Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $A/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Beispiel: Ist p eine Primzahl, so ist $(p) \subset \mathbb{Z}$ ein maximales Ideal. Das Nullideal ist nicht maximal in $\mathbb{Z}$.

Ist $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, und $\mathfrak{b} \in B$ ein Ideal, so ist $f^{-1}(\mathfrak{b}) \subset A$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{b}$ ein Primideal, so ist auch $f^{-1}(\mathfrak{b})$ ein Primideal.

Definition 2.2 i) Es sei I eine beliebige Indexmenge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus A. Ein Ideal $\mathfrak{a}$ heißt erzeugt von $(a_1')_{i\in I}$, wir schreiben $\mathfrak{a} = (a_i)_{i\in I}$, falls alle $a_i \in \mathfrak{a}$ sind und falls sich jedes $x \in \mathfrak{a}$ als $x = x_{i_1}a_{i_1} + \ldots + x_{i_m}a_{i_m}$ schreiben lässt mit geeigneten Indizes $i_1, \ldots, i_m \in I$ und Elementen $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in A$.

ii) Ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ heißt **endlich erzeugt**, falls es endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_m \in \mathfrak{a}$ gibt mit $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_m)$.

Definition 2.3 Ein Ring A heißt **noethersch**, falls jedes Ideal endlich erzeugt ist.

Lemma 2.4 Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) A ist noethersch.

ii) Jede aufsteigende Kette von Idealen $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{a}_k \subset \ldots$ in A wird stationär, d.h. es gibt ein n_0 mit $\mathfrak{a}_{n_0} = \mathfrak{a}_n$ für alle $n \geqq n_0$.

iii) Jede nicht-leere Menge von Idealen besitzt ein maximales Element bezüglich der Inklusion.

Beispiel: Jeder Hauptidealring ist noethersch, insbesondere ist $\mathbb{Z}$ noethersch.

Lemma 2.5 Ist A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so ist $A/\mathfrak{a}$ ein noetherscher Ring.

Beweis : Es sei $\pi : A \to A/\mathfrak{a}$ die kanonische Abbildung. Ist $\mathfrak{b} \subset A/\mathfrak{a}$ ein Ideal, so ist $\pi^{-1}(\mathfrak{b}) \subset A$ ein Ideal. Nach Voraussetzung ist $\pi^{-1}(\mathfrak{b})$ endlich erzeugt, also $\pi^{-1}(\mathfrak{b}) = (a_1, \ldots, a_m)$ für geeignete $a_1, \ldots, a_m \in A$. Man rechnet leicht nach, dass dann $\mathfrak{b} = \big(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_m)\big)$ gilt. Also ist $\mathfrak{b}$ endlich erzeugt. $\square$

Definition 2.6 Sei A ein Ring. Ein **A−Modul** M ist eine Menge mit einer Verknüpfung $+$ und einer Abbildung (skalare Multiplikation)

$$A \times M \to M,$$

$$(a, m) \mapsto am$$

so dass folgende Bedingungen gelten:

i) $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

ii) $a(x + y) = ax + ay$ für $a \in A, x, y \in M$

iii) $(a+b)x = ax + bx$ für $a, b \in A, x \in M$

iv) $(ab)x = a(bx)$ für $a, b \in A, x \in M$

v) $1x = x$ für $x \in M$.

Beispiele:

i) Jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ist ein $A-$Modul. Insbesondere ist A selbst ein $A-$Modul.

ii) Ist $A = k$ ein Körper, so sind die $A-$Moduln genau die $k-$Vektorräume.

iii) Die $\mathbb{Z}-$Moduln sind genau die abelschen Gruppen, wobei wir auf einer abelschen Gruppe die skalare Multiplikation mit $\mathbb{Z}$ so definieren:

$$ma = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{m-\text{mal}} & \text{, falls } m > 0 \\ 0 & \text{, falls } m = 0 \\ \underbrace{-a - \ldots - a}_{(-m)-\text{mal}} & \text{, falls } m < 0 \end{cases}$$

Eine Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei $A-$Moduln heißt **Homomorphismus** von $A-$Moduln, falls

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ und}$$
$$f(ax) = af(x)$$

für alle $a \in A,\ x, y \in M$ gilt.

Eine Teilmenge $N \subset M$ heißt **Untermodul**, falls N eine Untergruppe von M ist, die abgeschlossen unter der $A-$Multiplikation ist.

Beispiel: Ist $f : M \to N$ ein Homomorphismus, so ist Kern $f = \{x \in M : f(x) = 0\}$ ein Untermodul von M und Bild $f = \{y \in N : \text{es gibt ein } x \in M \text{ mit } f(x) = y\}$ ein Untermodul von N.

Ist $N \subset M$ ein Untermodul, so existiert die Faktorgruppe M/N. Auf dieser können wir durch

$$A \times M/N \to M/N$$
$$(a, x+N) \mapsto ax + N$$

eine skalare Multiplikation definieren, die M/N zu einem $A-$Modul macht. Die natürliche Abbildung

$$\pi : M \to M/N$$
$$x \to x + N$$

ist ein surjektiver Homomorphismus von $A-$Moduln mit kern $\pi = N$.

Ein $A-$Modul M heißt **endlich erzeugt**, falls es Elemente $x_1, \ldots, x_n$ in M gibt, so dass sich jedes $x \in M$ als Linearkombination

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

mit geeigneten $a_1, \ldots, a_n \in A$ darstellen lässt. Die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ sind natürlich im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

Ist I eine beliebige Indexmenge und ist M_i für alle $i \in I$ ein $A-$Modul, so wird die **direkte Summe**

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \{(m_i)_{i \in I} : m_i \in M_i, \text{fast alle } m_i = 0\}$$

der abelschen Gruppen M_i zusammen mit der skalaren Multiplikation

$$a(m_i)_{i \in I} = (am_i)_{i \in I}$$

ein $A-$Modul. Wir nennen einen $A-$Modul M, der isomorph zu $\bigoplus_{i \in I} A$ für eine beliebige Indexmenge I ist, einen **freien A−Modul**. Ist I eine endliche Menge mit n Elementen, so ist $M \simeq A \oplus \ldots \oplus A = A^n$. In diesem Fall gibt es ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ von M, so dass jedes $x \in M$ eine Darstellung der Form $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ mit eindeutig bestimmten $a_1, \ldots, a_n$ besitzt.

Proposition 2.7 Sei M ein $A-$Modul. M ist genau dann endlich erzeugt, wenn M isomorph zu einem Quotienten von A^n für ein $n > 0$ ist, d.h. wenn es einen surjektiven $A-$Modul-Homomorphismus $\varphi : A^n \to M$ gibt.

Beweis : „⇒:" Es sei $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{M}$. Wir definieren einen $A-$Modul-Homomorphismus

$$\varphi : A^n \to M$$

durch $\varphi(a_1, \ldots, a_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$. Dann ist φ surjektiv, also folgt $M \simeq A^n/\text{Kern}\,\varphi$.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $\varphi : A^n \to M$ ein surjektiver $A-$Modul-Homomorphismus. Wir bezeichnen mit $e_i = (0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0)$ den $i-$ten Einheitsvektor in A^n. Da φ surjektiv ist, wird M von $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ erzeugt. □

Jetzt können wir eine wichtige Tatsache zeigen, die der Schlüssel zum Hilbertschen Basissatz ist.

Satz 2.8 Sei A ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter $A-$Modul. Dann ist jeder Untermodul von M ebenfalls endlich erzeugt.

Beweis : Da M endlich erzeugt ist, gibt es nach Proposition 2.7 einen surjektiven Homomorphismus $\varphi : A^n \to M$ für ein $n > 0$. Sei $N \subset M$ ein Untermodul. Dann ist $\varphi^{-1}(N)$ ein Untermodul von A^n und $\varphi^{-1}(N) \to N$ ist ebenfalls surjektiv. Ist $\varphi^{-1}(N)$ endlich erzeugt, so ist also auch N endlich erzeugt. Daher genügt es zu zeigen, dass jeder Untermodul von A^n endlich erzeugt ist. Dies beweisen wir mit Induktion nach n.

Für $n = 1$ sind die Untermoduln von A gerade die Ideale in A. Diese sind endlich erzeugt, da A ein noetherscher Ring ist. Die Behauptung gelte also für ein $n > 1$. Wir betrachten den surjektiven Homomorphismus

$$\varphi : A^{n+1} \to A^n$$

$$(a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

und den injektiven Homomorphismus

$$\psi : A \to A^{n+1}$$

$$a \mapsto (0, \dots, 0, a).$$

Dann ist offenbar Kern $\varphi =$ Bild ψ. Also ist die kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \xrightarrow{\psi} A^{n+1} \xrightarrow{\varphi} A^n \to 0$$

exakt.

Sei $N \subset A^{n+1}$ ein Untermodul. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\psi^{-1}(N)$ als Untermodul von A und $\varphi(N)$ als Untermodul von A^n endlich erzeugt.

Wir wählen ein Erzeugendensystem $x_1, \dots, x_r$ von $\psi^{-1}(N)$ und Elemente $y_1, \dots, y_s \in N$, so dass $\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_s)$ ein Erzeugendensystem von $\varphi(N)$ ist. Jetzt sei $x \in N$ ein beliebiges Element. Dann ist $\varphi(x) \in \varphi(N)$, also von der Form $\varphi(x) = b_1\varphi(y_1) + \ldots + b_s\varphi(y_s)$ für $b_1, \ldots, b_s \in A$. Daher ist $x' = x - (b_1y_1 + \ldots + b_sy_s)$ in Kern φ = Bild ψ enthalten, also gilt $x' = \psi(x'')$ für ein $x'' \in A$. Da x' in N liegt, liegt $x'' \in \psi^{-1}(N)$. Somit ist x'' von der Form $x'' = a_1x_1 + \ldots + a_rx_r$ für $a_1, \ldots, a_r \in A$. Insgesamt folgt

$$x = a_1\psi(x_1) + \ldots + a_r\psi(x_r) + b_1y_1 + \ldots + b_sy_s.$$

Daher ist $\psi(x_1), \ldots, \psi(x_r), y_1, \ldots, y_s$ ein Erzeugendensystem von N, d.h. N ist endlich erzeugt.

□

Ein $A-$Modul, der die Eigenschaft hat, dass alle seine Untermoduln endlich erzeugte $A-$Moduln sind, heißt **noetherscher A−Modul**.

Satz 2.8 lässt sich also auch so umformulieren: Ein endlich erzeugter Modul über einem noetherschen Ring A ist noethersch. Insbesondere ist ein noetherscher Ring A auch als Modul über sich selbst noethersch.

Jetzt können wir den Hilbertschen Basissatz beweisen.

Satz 2.9 (**Hilbert'scher Basissatz**)
Ist A ein noetherscher Ring, so ist auch der Polynomring $A[X]$ noethersch.

Beweis : Es sei $\mathfrak{a} \subset A[X]$ ein Ideal. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist. Dafür können wir $\mathfrak{a} \neq 0$ annehmen. Nun betrachten wir die Menge aller Leitkoeffizienten von Elementen in $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{b} = \{a \in A : a \neq 0 \text{ und } aX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathfrak{a}\} \cup \{0\}.$$

$\mathfrak{b}$ ist ein Ideal in A, also nach Voraussetzung endlich erzeugt. Ist $\mathfrak{b} = (a_1, \ldots, a_m)$ mit $a_i \neq 0$ aus A, so gibt es für alle i ein Polynom: $f_i(X) \in \mathfrak{a}$, dessen Leitkoeffizient a_i ist. Wir bezeichnen den Grad von $f_i(X)$ mit r_i. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{a}' = (f_1, \ldots, f_m)$ in $A[X]$. Offenbar ist $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$.
Es sei r das Minimum der Grade $r_1, \ldots, r_m$. Ferner bezeichnen wir mit M den $A-$Untermodul aller Polynome vom Grad $\leqq r - 1$ in $A[X]$. Er wird erzeugt von den Polynomen $1, x, x^2, \ldots, x^{r-1}$. Wir zeigen nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + (\mathfrak{a} \cap M)$. Die Inklusion „$\supset$" ist klar. Um „$\subset$" zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges Polynom $f(X) = \alpha X^n + \ldots + \alpha_0$ in $\mathfrak{a}$. Ist $n < r$, so ist $f \in M$ und wir sind fertig. Ist $n \geqq r$, so schreiben wir den Leitkoeffizienten $\alpha \in \mathfrak{b}$ als $\alpha = c_1a_1 + \ldots + c_ma_m$ für geeignete $c_1, \ldots, c_m \in A$. Das Polynom $h_1(X) = \sum_{i=1}^{n} c_iX^{n-r_i}fi$ liegt in $\mathfrak{a}'$. Wir betrachten $g_1(X) = f(X) - h_1(X) \in \mathfrak{a}$. Der

Koeffizient vor X^n von $g_1(X)$ ist $\alpha - \sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 0$, also hat g_1 einen Grad $\leq n-1$. Ist grad $(g_1) < r$, so liegt g_1 in $\mathfrak{a} \cap M$ und wir erhalten $f \in \mathfrak{a}' + (\mathfrak{a} \cap \mathcal{M})$. Andernfalls wiederholen wir das obige Verfahren mit $g_1(X)$ und konstruieren ein Polynom $h_2(X) \in \mathfrak{a}'$, so dass der Grad von $g_1(X) - h_1(X)$ echt kleiner als der Grad von $g_1(X)$ ist. Nach endlich vielen Schritten erhalten wir so ein Polynom in $\mathfrak{a} \cap M$, und es folgt $f \in \mathfrak{a}' + (\mathfrak{a} \cap M)$.

Nun ist $(\mathfrak{a} \cap M)$ als Untermodul des endlich erzeugten $A-$Moduls M nach Satz 2.8 selbst ein endlich erzeugter $A-$Modul. Als Summe von zwei endlich erzeugten $A-$Moduln ist somit $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt. □

Korollar 2.10 Ist A ein noetherscher Ring, so ist für jedes $n \geq 1$ der Polynomring $A[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch.

Beweis : Das folgt mit Induktion aus Satz 2.9, da $A[X_1, \ldots, X_n] = (A[X_1, \ldots, X_{n-1}])[X_n]$ gilt. □

3 Der Hilbert'sche Nullstellensatz

Wir wollen nun Nullstellenmengen von Polynomen über algebraisch abgeschlossenen Körpern studieren.

Es sei K ein **algebraisch abgeschlossener** Körper, d.h. jedes nicht-konstante Polynom $f \in K[X]$ hat eine Nullstelle in K. Das kann man auch so ausdrücken: K hat keinen echten algebraischen Erweiterungskörper.

Beispiel: $\mathbb{C}$ ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Mit $A = K[X_1, ..., X_n]$ bezeichnen wir den **Polynomring in** n **Variablen über** K. Ferner definieren wir den n-dimensionalen affinen Raum über K als

$$\mathbb{A}^n(K) = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in K\}.$$

$\mathbb{A}^n(K)$ ist also der Vektorraum der n-dimensionalen Zeilenvektoren über K.
Ist $P = (P_1, ..., P_n)$ ein Punkt des $\mathbb{A}^n(K)$ und $f \in A = K[X_1, ..., X_n]$, so ist $f(P) = f(P_1, ..., P_n) \in K$. Ist $f(P) = 0$, so nennen wir P **Nullstelle von** f.

Definition 3.1 Es sei $T \subset A$ eine beliebige Menge von Polynomen. Die **Nullstellenmenge** von T ist definiert als

$$V(T) = \{P \in \mathbb{A}^n(K) : f(P) = 0 \text{ für alle } f \in T\}.$$

Mit Hilfe des Hilbert'schen Basissatzes können wir zeigen, dass für die Beschreibung von $V(T)$ endlich viele Polynome ausreichen. Wir bezeichnen mit (T) das von T erzeugte Ideal in A, es gilt also

$$(T) = \{f_1 t_1 + ... + f_n t_n : f_1, ..., f_n \in A, t_1, ..., t_n \in T, n \geqq 0\}.$$

Man prüft leicht, dass (T) das kleinste Ideal in A ist, das T enthält.

Offenbar gilt $V(T) = V((T))$, d.h. die Nullstellenmenge von T stimmt mit der Nullstellenmenge des von T erzeugten Ideals überein. Nach dem Hilbert'schen Basissatz 2.9 ist A noethersch, also ist (T) endlich erzeugt. Ist $(T) = (t_1, ..., t_n)$, so gilt

$$V(T) = V((T)) = \{P \in \mathbb{A}^n(K) : t_1(P) = ... = t_n(P) = 0\}.$$

Also ist $V(T)$ die Nullstellenmenge einer endlichen Teilmenge von A.

Definition 3.2 Eine Teilmenge $Y \subset \mathbb{A}^n(K)$ heißt **algebraische Menge**, wenn es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gibt mit $V(\mathfrak{a}) = Y$.

Lemma 3.3 Es sei I eine beliebige Indexmenge. Dann gilt für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, (\mathfrak{a}_i)(i \in I)$:

i) $V(0) = \mathbb{A}^n(K), V(A) = \emptyset$

ii) Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, so folgt $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$

iii) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$

iv) $V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap\limits_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

Hier ist die Summe $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ der Ideale $\mathfrak{a}_i$ definiert als

$$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i = \{a_{i_1} + ... + a_{i_m} : m \geqq 0, \{i_1, ..., i_m\} \subset I, a_{i_1} \in \mathfrak{a}_{i_1}, ..., a_{i_m} \in \mathfrak{a}_{i_m}\}$$

Beweis :

i) Das Nullpolynom verschwindet auf ganz $\mathbb{A}^n(K)$ und es gibt keinen Punkt $P \in \mathbb{A}^n(K)$, der Nullstelle eines jeden Polynoms ist.

ii) Folgt sofort aus der Definition von $V(\mathfrak{a})$.

iii) „$\subset$“: Angenommen, $P \in \mathbb{A}^n(K)$ ist weder in $V(\mathfrak{a})$ noch in $V(\mathfrak{b})$ enthalten. Dann gibt es ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f(P) \neq 0$ und ein $g \in \mathfrak{b}$ mit $g(P) \neq 0$. Also ist $fg \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ ein Polynom mit $fg(P) \neq 0$, d.h. $P \notin V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.

„$\supset$“: Folgt wegen $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}$ aus ii).

iv) „$\subset$“: Da $\mathfrak{a}_j \subset \sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ für alle $j \in I$ gilt, folgt dies aus ii).

„$\supset$“: Ist $P \in \bigcap\limits_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$, so gilt $f(P) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}_i$ und alle $i \in I$. Dann ist aber auch $f(P) = 0$ für alle $f \in \sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$, d.h. es gilt $P \in V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$.

□

Wir nennen eine Teilmenge $U \subset \mathbb{A}^n(K)$ **offen**, wenn das Komplement von U eine abgebraische Menge ist, d.h. wenn $\mathbb{A}^n(K) \backslash U = V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gilt.

Lemma 3.3 besagt dann:

- $\mathbb{A}^n(K)$ und $\emptyset$ sind offen in $\mathbb{A}^n(K)$.
- Der Schnitt von zwei offenen Mengen ist offen.
- Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist offen.

Wir erhalten mit diesem Begriff offener Mengen also eine Topologie auf $\mathbb{A}^n(K)$. Diese heißt **Zariski-Topologie**.

<u>Vorsicht</u>: Trägt K eine Topologie, wie etwa im Fall $K = \mathbb{C}$, so erbt auch der Raum der Zeilenvektoren $\mathbb{A}^n(K)$ eine Topologie. Dies ist aber eine ganz andere als die Zariski-Topologie. Die Zariski-Topologie ist recht grob, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Ist $n = 1$, also $A = K[X]$, so ist jedes Ideal in A ein Hauptideal. Also sind alle algebraischen Mengen in $\mathbb{A}^1(K)$ von der Form $V(f)$ für ein $f \in K[X]$. Daher ist $U \subset \mathbb{A}^1(K)$ offen genau dann, wenn es ein $f \in K[X]$ gibt mit

$$U = \{P \in \mathbb{A}^1(K) : f(P) \neq 0\}.$$

Also sind die offenen Mengen genau die Teilmengen von $\mathbb{A}^n(K)$, deren Komplement endlich ist, plus die leere Menge.

Definition 3.4 Ist $X \subset \mathbb{A}^n(K)$ eine beliebige Teilmenge, so definieren wir

$$I(X) = \{f \in A : f(P) = 0 \text{ für alle } P \in X\}.$$

Die Teilmenge $I(X) \subset A$ ist ein Ideal in A, wie man leicht nachrechnet.

Lemma 3.5 Es seien X und Y Teilmengen von $\mathbb{A}^n(K)$

i) Ist $X \subset Y$, so folgt $I(Y) \subset I(X)$.

ii) Es gilt $X \subset V(I(X))$. Ist X eine algebraische Menge, so gilt sogar $X = V(I(X))$.

iii) Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, so gilt $\mathfrak{a} \subset I(V(\mathfrak{a}))$.

Beweis :

i) und iii) folgen sofort aus den Definitionen

ii) $X \subset V(I(X))$ ist klar. Ist $X = V(\mathfrak{a})$ eine algebraische Menge, so ist nach iii) $\mathfrak{a} \subset I(V(\mathfrak{a})) = I(X)$, also mit Lemma 3.3 ii) $V(I(X)) \subset V(\mathfrak{a}) = X$.

$\square$

Im allgemeinen ist die Inklusion $\mathfrak{a} \subset I(V(\mathfrak{a}))$ aus Lemma 3.5 iii) eine echte Inklusion. So gilt etwa für das Ideal $\mathfrak{a} = (X^2) \subset K[X]$, dass

$$V(\mathfrak{a}) = \{P \in K : P^2 = 0\} = \{0\}$$

ist, woraus

$$I(V(\mathfrak{a})) = \{a_1 X + ... + a_n X^n : a_1, ..., a_n \in K, n \geqq 1\} = (X)$$

folgt.

Mit Hilfe des Hilbert'schen Nullstellensatzes werden wir später $I(V(\mathfrak{a}))$ bestimmen. Dafür brauchen wir folgenden Begriff:

Definition 3.6 Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in einem beliebigen Ring A, so ist das **Radikal** von $\mathfrak{a}$ definiert als

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{f \in A : \text{es gibt ein } k \geqq 1 \text{ mit } f^k \in \mathfrak{a}\}.$$

Offenbar gilt also $\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Das Radikal von $\mathfrak{a}$ ist ein Ideal (Übungsaufgabe).

Beispiel: Für das Ideal $(X^2) \subset K[X]$ gilt $\sqrt{(X^2)} = (X)$.

Wir wollen später zeigen, dass allgemein $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ gilt. Dazu brauchen wir ein paar algebraische Vorarbeiten.

Lemma 3.7 Es seien $C \subset B \subset A$ Ringe.

i) Ist A ein endlich erzeugter B-Modul und B ein endlich erzeugter C-Modul, so ist A ein endlich erzeugter C-Modul.

ii) Ist A ein endlich erzeugter B-Modul, so ist A **ganz über** B, d.h. jedes Element $x \in A$ erfüllt eine Gleichung der Form

$$x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 = 0$$

für geeignete $b_0, ..., b_{n-1} \in B$.

iii) Erfüllt umgekehrt ein $x \in A$ eine Gleichung der obigen Form, so ist

$$B[x] := \{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1x + b_0 : b_0, ..., b_n \in B, n \geqq 0\}$$

ein endlich erzeugter B-Modul.

Beweis :

i) Ist $(a_1, ..., a_m)$ ein Erzeugendensystem von A als B-Modul und $(b_1, ..., b_n)$ ein Erzeugendensystem von B als C-Modul, so hat jedes $a \in A$ eine Darstellung als $a = \beta_1 a_1 + ... + \beta_m a_m$ mit geeigneten $\beta_i \in B$. Diese können wir schreiben als $\beta_i = \gamma_{i_1} b_1 + ... + \gamma_{i_n} b_n$ mit geeigneten $\gamma_{i_j} \in C$. Setzen wir diese Ausdrücke in die Gleichung für a ein, so sehen wir, dass $(a_i b_j)_{\substack{i=1,...,m \\ j=1,...,n}}$ ein Erzeugendensystem von A als C-Modul ist.

ii) Es sei $(a_1, ..., a_m)$ ein Erzeugendensystem von A als B-Modul. Ist $x \in A$, so ist auch $xa_i \in A$, also gibt es Elemente $b_{i_j} \in B$ mit

$$xa_i = b_{i_1} a_i + ... + b_{i_m} a_m \quad \text{für alle } i = 1, ..., m.$$

Also gilt $\sum\limits_{j=1}^{m} (x\delta_{ij} - b_{ij}) a_j = 0$.

Wir betrachten nun die $(m \times m)$-Matrix $M = (x\delta_{ij} - b_{ij})_{i,j=1,...,m}$. Es ist $M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0$. Ist M^{adj} die zu M adjungierte Matrix, so gilt

$$M^{adj} M = \text{det} M \cdot E_m,$$

also auch

$$0 = M^{adj} M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \text{det} M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

woraus

$$(\text{det} M) \cdot a_i = 0 \text{ für } i = 1, ..., m \text{ folgt.}$$

Nun lässt sich das Element $1 \in A$ linear aus den Erzeugern $a_i, ..., a_m$ kombinieren, woraus det$M$ = det$M \cdot 1 = 0$ in A folgt. Rechnen wir det$M$ aus, so stellen wir fest, dass det$M$ ein normiertes Polynom in x mit Koeffizienten in B ist, d.h. es gilt

$$0 = \text{det} M = x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

für geeignete $b_0, ..., b_{n-1} \in B$.

iii) Gilt $x^n = -b_{n-1}x^{n-1} - ... - b_1 x - x_0$, so ist $B[x]$ als B-Modul von $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ erzeugt.

$\square$

Lemma 3.8 (Lemma von Nakayama) Es seien $B \subset A$ Ringe, so dass $A \neq 0$ ein endlich erzeugter B-Modul ist. Dann gilt für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von B, dass $\mathfrak{m}A \neq A$ ist. Hier ist $\mathfrak{m}A = \{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i : n \geqq 1, m_i \in \mathfrak{m}, x_i \in A\}$ das von $\mathfrak{m}$ in A erzeugte Ideal.

Beweis : Angenommen, es gilt $\mathfrak{m}A = A$. Es sei $(a_1, ..., a_m)$ ein Erzeugendensystem von A als B-Modul. Da $a_i \in A = \mathfrak{m}A$ ist, gibt es Elemente $b_{i_j} \in \mathfrak{m}$ mit

$$a_i = b_{i_1} a_1 + ... + b_{i_m} a_m \quad \text{für alle } i = 1, ..., m.$$

Wie im Beweis von 3.7 ii) betrachten wir die Matrix $M = (\delta_{ij} - b_{ij})_{i,j=1,...,m}$ und schließen det$M = 0$. Rechnen wir det$M$ aus, so stellen wir fest, dass

$$\det M = 1 + b \quad \text{für ein } b \in \mathfrak{m} \text{ gilt.}$$

Also ist $1 \in \mathfrak{m}$ im Widerspruch zu der Tatsache, dass $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist. $\square$

Das Lemma von Nakayama gilt auch allgemeiner für beliebige endlich erzeugte B-Moduln, die nicht unbedingt Ringe sein müssen. Dazu muss man den obigen Beweis etwas modifizieren.

Lemma 3.9 Es sei A ein Körper und $B \subset A$ ein Unterring, so dass A ein endlich erzeugter B-Modul ist. Dann ist auch B ein Körper.

Beweis : Es sei $b \neq 0$ ein Element von B. Da A ein Körper ist, existiert $b^{-1} \in A$. Wir müssen zeigen, dass b^{-1} bereits in B liegt. Nach Lemma 3.7 ii) erfüllt b^{-1} eine Gleichung der Form

$$b^{-n} + b_{n-1} b^{-(n-1)} + ... + b_1 b^{-1} + b_0 = 0$$

für geeignete $b_0, ..., b_{n-1} \in B$.
Nach Multiplikation mit b^{n-1} ergibt sich

$$b^{-1} = -b_{n-1} - ... - b_1 b^{n-2} + b_0 b^{n-1} \in B.$$

$\square$

Wir erinnern jetzt noch an den Begriff einer Algebra über einem Ring B. Ein B-Modul A, der gleichzeitig ein Ring ist, so dass noch

$$b(fg) = (bf)g = g(bf)$$

für alle $b \in B$ und $f, g \in A$ gilt, heißt B**-Algebra** (genauer gesagt: kommutative B-Algebra mit 1).

Beispiel: Der Polynomring $B[X_1, ..., X_n]$ ist eine B-Algebra.

Allgemeiner gilt für jeden Ring A und jeden Unterring $B \subset A$, dass A eine B-Algebra ist.

Definition 3.10 Eine B-Algebra A heißt **endlich erzeugt** (genauer gesagt: endlich erzeugt als B-Algebra), wenn es endlich viele Elemente $b_1, ..., b_n \in B$ gibt, so dass sich jedes $b \in B$ als Polynom in den b_i schreiben lässt. Mit anderen Worten, für jedes $b \in B$ gibt es ein $f \in B[X_1, ..., X_n]$ mit $b = f(b_1, ..., b_n)$.

Beispiel: Ist $\mathfrak{a} \subset B[X_1, ..., X_n]$ ein Ideal, so ist die B-Algebra $B[X_1, ..., X_n]/\mathfrak{a}$ endlich erzeugt.

Eine B-Algebra A trägt insbesondere die Struktur eines B-Moduls. Ist A als B-Modul endlich erzeugt, so ist A auch als B-Algebra endlich erzeugt. Die Umkehrung gilt allerdings nicht! Der Polynomring $A = B[X_1, ..., X_n]$ ist etwa als B-Modul nicht endlich erzeugt, wohl aber als B-Algebra.

Satz 3.11 (Noether-Normalisierung) Es sei K ein unendlicher Körper und A eine von $(a_1, ..., a_n)$ erzeugte K-Algebra. Dann gibt es eine Zahl m mit $0 \leqq m \leqq n$ und Elemente $y_1, ..., y_m \in A$, so dass gilt:

i) $(y_1, ..., y_m)$ sind **algebraisch unabhängig** über K, d.h. es gibt kein Polynom $0 \neq f \in K[X_1, ..., X_m]$ mit $f(y_1, ..., y_m) = 0$ in A.

ii) A ist ein endlich erzeugter $K[y_1, ..., y_m]$-Modul, wobei $K[y_1, ..., y_m] = \{a \in A :$ es gibt ein Polynom $h \in K[X_1, ..., X_m]$ mit $a = h(y_1, ..., y_m)\}$ ist.

Bemerkung: Die Bedingung, dass $(y_1, .., y_m)$ algebraisch unabhängig über K sind, bedeutet, dass der natürliche Homomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi : K[X_1, ..., X_m] &\to A \\ f &\mapsto f(y_1, ..., y_m)\end{aligned}$$

injektiv ist. Sein Bild ist definitionsgemäß gerade $K[y_1, ..., y_m]$. Also gilt $K[y_1, ..., y_m] \simeq K[X_1, ..., X_m]$, d.h. $K[y_1, ..., y_m]$ ist isomorph zu dem Polynomring in m Variablen über K.

Beweis : Wir betrachten den Homomorphismus von $K-$Algebren

$$\begin{aligned}\psi : K[X_1, ..., X_n] &\to A \\ f &\mapsto f(a_1, ..., a_n).\end{aligned}$$

Da A als K-Algebra von $(a_1, ..., a_n)$ erzeugt wird, ist ψ surjektiv. Es sei $\mathfrak{a} = \text{Kern}\psi$. Ist $\mathfrak{a} = 0$, so können wir $y_1 = a_1, ..., y_n = a_n$ und $m = n$ wählen und haben die Behauptung bewiesen. Also nehmen wir $\mathfrak{a} \neq 0$ an.
Ist $n = 1$, so ist $\mathfrak{a} = (f)$ ein Haupideal in $K[X]$. Wir können den Erzeuger f normiert wählen. Es gilt $f(a_1) = 0$. Nach Lemma 3.7 iii) ist also $A = K[a_1]$ ein endlich erzeugter K-Modul, und wir können $m = 0$ wählen und haben die Behauptung bewiesen.

Also können wir per Inklusion annehmen, dass die Behauptung für K-Algebren A mit $\leqq (n-1)$ Erzeugern bewiesen ist. Wir wählen ein $f \neq 0$ in $\mathfrak{a}$. Ist $d = \text{deg} f$ der Grad von f, so können wir f schreiben als $f = F_d + G$ mit einem homogenen Polynom F_d vom Grad d und einem Polynom G vom Grad $\leqq d-1$. Das Polynom F_d ist also eine Summe von Monomen der Form $cX_1^{i_1} \cdot ... \cdot X_n^{i_n}$ mit $i_1 + ... + i_n = d$ und $c \in K$.
Da K ein unendlicher Körper ist, gibt es Elemente $\gamma_1, ..., \gamma_{n-1} \in K$ mit $F_d(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, 1) \neq 0$, denn $F_d(X_1, ..., X_{n-1}, 1)$ ist ein Polynom $\neq 0$ in $K[X_1, ..., X_{n-1}]$ (Übungsaufgabe).

Also gilt für $a_1' = a_1 - \gamma_1 a_n, ..., a_{n-1}' = a_{n-1} - \gamma_{n-1} a_n$ die Gleichung

$$0 = f(a_1, ..., a_n) = f(a_1' + \gamma_1 a_n, ..., a_{n-1}' + \gamma_{n-1} a_n, a_n) =$$
$$F_d(a_1' + \gamma_1 a_n, ..., a_{n-1}' + \gamma_{n-1} a_n, a_n) + G(a_1' + \gamma_1 a_n, ..., a_1' + \gamma_{n-1} a_n, a_n).$$

Diese beiden Summanden wollen wir als Polynome in der Variablen a_n mit Koeffizienten im Ring $K[a_1', ..., a_{n-1}']$ betrachten. Da $\text{deg} G \leqq d-1$ ist, hat der zweite Summand einen Grad $\leqq d-1$ in a_n. Der erste Summand ist eine Summe von Elementen der Form

$$c(a_1' + \gamma_1)^{i_1} \dots (a_{n-1}' + \gamma_n a_n)^{i_{n-1}} a_n^{i_n}$$

für $c \in K$ und $i_1 + ... + i_n = d$. Multiplizieren wir dies aus und ordnen nach Potenzen von a_n, so stellen wir fest, dass der Faktor vor a_n^d gerade $c\gamma_1^{i_1} \; ... \; \gamma_{n-1}^{i_{n-1}}$ ist.
Also gilt

$$F_d(a'_1 + \gamma_1 a_n, ..., a'_{n-1} + \gamma_{n-1} a_n, a_n) =$$

$$F_d(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, 1) a_n^d + \text{ Terme kleinerer Ordnung in } a_n.$$

Da $F_d(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}, 1) \neq 0$ ist, haben wir somit ein normiertes Polynom mit Koeffizienten in $K[a'_1, ..., a'_{n-1}]$ gefunden, das in a_n verschwindet.
Nach Lemma 3.7 iii) ist $(K[a'_1, ..., a'_{n-1}])[a_n]$ also ein endlich erzeugter $K[a'_1, ..., a'_{n-1}]$-Modul. Da A als K-Algebra von $(a_1, ..., a_n)$ erzeugt wird, ist auch $(a'_1, ..., a'_{n-1}, a_n)$ ein Erzeugendensystem von A als K-Algebra. Also gilt $A = K[a'_1, ..., a'_{n-1}][a_n]$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ferner Elemente $y_1, ..., y_m$ mit $0 \leqq m \leqq n-1$, die algebraisch unabhängig über K sind, so dass $K[a'_1, ..., a'_{n-1}]$ ein endlich erzeugter $K[y_1, ..., y_m]$-Modul ist. Nach Lemma 3.7 i) ist dann auch A ein endlich erzeugter $K[y_1, ..., y_m]$-Modul und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Jetzt können wir folgende wichtige Konsequenz der Noether Normalisierung zeigen.

Satz 3.12 Es sei K ein unendlicher Körper und L ein Erweiterungskörper von K, der als K-Algebra endlich erzeugt ist. Dann ist L/K eine endliche Körpererweiterung, also insbesondere algebraisch.

Beweis : Wir wenden Noether Normalisierung (Satz 3.11) auf L an. Es gibt also Elemente $y_1, ..., y_m \in L$, die algebraisch unabhängig über L sind, da dass L ein endlicher $K[y_1, ..., y_m]$-Modul ist. Nach Lemma 3.9 ist $K[y_1, ..., y_m]$ ein Körper, also lässt sich jedes y_i^{-1} als Polynom in $y_1, ..., y_m$ schreiben. Multiplizieren wir diese Gleichung mit y_i, so erhalten wir ein Polynom $f \neq 0$ mit $f(y_1, ..., y_m) = 0$. Das widerspricht der algebraischen Unabhängigkeit, wenn $m \geqq 1$ ist. Also ist $m = 0$, d.h. L ist ein endlicher K-Modul, also eine endliche Erweiterung über K. $\square$

Sowohl der Satz 3.11 von der Noether Normalisierung als auch Satz 3.12 gelten für beliebige, nicht notwendig unendliche Körper. Dann muss man sich im Beweis von 3.11 aber etwas mehr anstrengen.

Jetzt können wir diese algebraischen Resultate dazu benutzen, um etwas über algebraische Mengen herauszukommen.

Satz 3.13 (Hilbert'scher Nullstellensatz) Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Dann gilt

i) Jedes maximale Ideal in $A = K[X_1, ..., X_n]$ ist von der Form $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ für ein $P = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$.

ii) Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \neq A$, so gilt $V(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.

iii) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gilt $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Beweis :

i) Ist $P = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$, so gilt $I(P) = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ (Übungsaufgabe), also ist dieses Ideal der Kern der Auswertungsabbildung

$$\begin{aligned} \varphi : K[X_1, ..., X_n] &\to K \\ f &\mapsto f(a_1, ..., a_n). \end{aligned}$$

Somit ist $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ ein maximales Ideal.

Sei umgekehrt $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Dann ist $L = K[X_1, ..., X_n]/\mathfrak{m}$ ein Körper und gleichzeitig eine endlich erzeugte K-Algebra. Nach Satz 3.12 ist L algebraisch über K. Also folgt $L = K$, da K algebraisch abgeschlossen ist. Somit ist

$$\psi : K \subset K[X_1, ..., X_n] \xrightarrow{\pi} K[X_1, ..., X_n]/\mathfrak{m}$$

ein Isomorphismus.
Wir betrachten $b_i = x_i + \mathfrak{m} \in K[X_1, ..., X_n]$ und setzen $a_i = \psi^{-1}(b_i)$. Dann ist $x_i - a_i \in \text{Kern}\, \pi = \mathfrak{m}$. Also folgt $(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) \subset \mathfrak{m}$. Da $(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ ein maximales Ideal ist, gilt sogar $(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) = \mathfrak{m}$.

ii) Es sei $\mathfrak{a} \subsetneqq A$ ein Ideal. Dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$ (ÜA). Nach i) gilt $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, ..., x_n - a_n)$ für geeignete $a_1, ..., a_n \in K$, woraus $(a_1, ..., a_n) \in V(\mathfrak{a})$ folgt.

iii) Ist $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so ist $f^k \in \mathfrak{a}$ für ein $k \geqq 1$, also gilt nach Lemma 3.5 $f^k \in I(V(\mathfrak{a}))$, woraus $f \in I(V(\mathfrak{a}))$ folgt. Wir müssen also nur noch $I(V(\mathfrak{a})) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ zeigen.
Sei $f \in I(V(\mathfrak{a}))$ gegeben. Ohne Einschränkung ist $f \neq 0$.

Wir wählen ein Erzeugendensystem $g_1, ..., g_r \in K[X_1, ..., X_n]$ des Ideals $\mathfrak{a}$. Wir nehmen nun eine zusätzliche Unbestimmte X_{n+1} hinzu und betrachten das Ideal $\mathfrak{b} = (g_1, ..., g_r, X_{n+1}f - 1)$ in $K[X_1, ..., X_n, X_{n+1}]$.
Angenommen $V(\mathfrak{b}) \neq \emptyset$. Dann gibt es ein Punkt $(a_1, ..., a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}(K)$ mit $g_1(a_1, ..., a_n) = ... = g_r(a_1, ..., a_n) = 0$ und $a_{n+1}f(a_1, ..., a_n) = 1$.
Somit liegt $(a_1, ..., a_n)$ in $V(\mathfrak{a})$. Da $f \in I(V(\mathfrak{a})$ ist, folgt $f(a_1, ..., a_n) = 0$, was im Widerspruch zu $a_{n+1}f(a_1, ..., a_n) = 1$ steht.
Also ist $V(\mathfrak{b}) = \emptyset$. Mit ii) folgt daraus $b = K[X_1, ..., X_n, X_{n+1}]$. Also ist 1 eine Linearkombination von $g_1, ..., g_n, X_{n+1}f - 1$ mit Koeffizienten in $K[X_1, ..., X_n, X_{n+1}]$, d.h. es gilt

$$1 = \sum_{i=1}^{r} h_i g_i + h_0(X_{n+1}f - 1)$$

für geeignete $h_0, h_1, ..., h_r \in K[X_1, ..., X_n, X_{n+1}]$.

Da $f \neq 0$ ist, liegt $\frac{1}{f} \in$ Quot$(K[X_1, ..., X_n])$ und es folgt

$$1 = \sum_{i=1}^{r} h_i(X_1, ..., X_n, \tfrac{1}{f})g_i(X_1, ..., X_n)$$

in Quot$K[X_1, ..., X_n]$.
Es sei m der höchste Grad, mit dem X_{n+1} in einem der Polynome $h_1, ..., h_r$ auftaucht. Dann folgt nach Multiplikation mit f^m die Gleichung

$$f^m = \sum_{i=1}^{r} h_i(X_1, ..., X_n, \tfrac{1}{f})f^m g_i.$$

Nun liegen die Elemente $h_i(X_1, ..., X_n, \frac{1}{f})f^m$ in $K[X_1, ..., X_n]$, also folgt

$$f^m \in (g_1, ..., g_r) \in \mathfrak{a} \quad \text{und damit } f \in \sqrt{\mathfrak{a}}.$$

$\square$

Teil ii) des Hilbert'schen Nullstellensatzes (3.13) besagt, dass jedes Ideal $\neq (1)$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{A}^n(K)$ besitzt. Die Voraussetzung, dass K algebraisch abgeschlossen ist, ist hier entscheidend. Sonst ist dies natürlich schon für Polynome mit einer Variable im allgemeinen falsch.

Der Hilbert'sche Nullstellensatz impliziert folgendes Lösbarkeitskriterium von Systemen polynomialer Gleichungen:

Korollar 3.14 Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $f_1, ..., f_r \in K[X_1, ..., X_n]$. Das System polynomialer Gleichungen

$$f_1(a_1, ..., a_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_r(a_1, ..., a_n) = 0$$

ist genau dann unlösbar über K, wenn es Polynome $g_1, ..., g_r \in K[X_1, ..., X_n]$ gibt mit

$$g_1 f_1 + ... + g_r f_r = 1.$$

Beweis : Das System von polynomialen Gleichungen

$$f_1(a_1, ..., a_n) = f_2(a_1, ..., a_n) = ... = f_r(a_1, ..., a_n) = 0$$

ist genau dann unlösbar über K, wenn für das Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, ..., f_r) \subset K[X_1, ..., X_n]$ gilt $V(\mathfrak{a}) = \emptyset$. Nach 3.13 ii) ist das äquivalent zu $\mathfrak{a} = K[X_1, ..., X_n]$, also zu einer Linearkombination der 1 mit Koeffizienten $g_1, ..., g_r \in K[X_1, ..., X_n]$. □

4 Das Spektrum eines Ringes

Wir wollen nun für jeden Ring A einen topologischen Raum $\operatorname{Spec} A$ definieren, den wir später zu einem „affinen Schema“ machen werden. Es sei daran erinnert, dass alle unsere Ringe kommutativ mit 1 sind.

Definition 4.1 Sei A ein Ring.

i) Das **Spektrum** von A ist definiert als

$$\operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \subset A \text{ Primideal }\}.$$

ii) Für jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ sei

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \subset A \text{ Primideal mit } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\} \subset \operatorname{Spec} A.$$

Beispiele:

i) Ist K ein Körper, so ist $\operatorname{Spec} K = \{0\}$ eine Einpunktmenge.

ii) Für $A = \mathbb{Z}$ gilt

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{0\} \cup \{(p) : p \text{ Primzahl }\}.$$

Für das Ideal $(n) = n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$V((n)) = \{(p) : p \text{ Primzahl}, p|n\}, \quad \text{falls } n \neq 0 \text{ ist,}$$

sowie $V((0)) = \mathbb{Z}$.

Die Menge $V(\mathfrak{a})$ verhalten sich ähnlich wie die Nullstellenmengen aus §3.

Lemma 4.2 Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, (\mathfrak{a}_i)_{i \in I}$ in A, I eine beliebige Indexmenge, gilt

i) $V((0)) = \operatorname{Spec} A, \quad V(A) = \emptyset$.

ii) Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, so folgt $V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a})$.

iii) $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$.

iv) $V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap\limits_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$.

Beweis :

i) Jedes Primideal enthält 0, kein Primideal enthält 1.

ii) Ist $\mathfrak{p}$ in $V(\mathfrak{b})$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Also gilt auch $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$.

iii) Ist $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$, so ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Somit ist auch $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$.
Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, so müssen wir $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ zeigen. Es existiert also ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Sei $g \in \mathfrak{b}$ ein beliebiges Element. Dann ist $fg \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt $f \in \mathfrak{p}$ (was ausgeschlossen ist) oder $g \in \mathfrak{p}$. Also ist $g \in \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$.

iv) Da für alle $i \in I$ die Inklusion $\mathfrak{a}_i \subset \sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ gilt, ist nach i) $V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i) \subset \bigcap\limits_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i)$.
Ist umgekehrt $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$ für alle $i \in I$, so folgt $\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(\sum\limits_{i \in I} \mathfrak{a}_i)$.

□

Definition 4.3 Wir nennen eine Teilmenge $U \subset \operatorname{Spec} A$ **offen**, wenn es ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ gibt mit $\quad U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$.

Die Menge $\operatorname{Spec} A$ zusammen mit den so definierten offenen Teilmengen ist ein topologischer Raum, denn nach Lemma 4.2 gilt

i) $\emptyset$ und $\operatorname{Spec} A$ sind offen.

ii) Endliche Schnitte offener Mengen sind offen.

iii) Beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

Die so definierte Topologie auf $\operatorname{Spec} A$ heißt Zariski-Topologie.

Beispiel: Die offenen Teilmengen von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sind $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und alle Mengen der Form $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(p_1), ..., (p_r)\}$ für endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_r$. Wir haben nämlich oben gesehen, dass die Mengen $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ gerade die folgenden sind: $V((0)) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $V((1)) = \emptyset$ und $V((n)) = \{(p) : p|n\}$ für $n \geqq 2$.

Jede nicht-leere offene Menge in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ enthält also den Punkt (0). Insbesondere ist die Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ nicht Hausdorff'sch.

Definition 4.4 Für jedes $f \in A$ sei

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A : f \notin \mathfrak{p}\} \subset \operatorname{Spec} A.$$

Die Teilmenge $D(f) \subset \operatorname{Spec} A$ ist offen, denn es gilt

$$D(f) = \operatorname{Spec} A \setminus V((f)),$$

wobei (f) das von f erzeugte Hauptideal in A ist.

Die offenen Mengen $D(f)$ für $f \in A$ bilden eine Basis der Zariski-Topologie auf $\operatorname{Spec} A$, d.h. für jedes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und jede offene Teilmenge $U \subset \operatorname{Spec} A$ mit $\mathfrak{p} \in U$ gibt es ein $f \in A$ mit $D(f) \subset U$. Jedes offene U mit $\mathfrak{p} \in U$ (d.h. jede offene Umgebung U von $\mathfrak{p}$) ist nämlich von der Form

$$U = \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$$

für ein Ideal $\mathfrak{a} \subset A$. Da $\mathfrak{p} \in U$ ist, folgt natürlich $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Somit existiert ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Also gilt $\mathfrak{p} \in D(f)$. Wegen $f \in \mathfrak{a}$ folgt außerdem $V(\mathfrak{a}) \subset V((f))$, also $D(f) \subset U$.

Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann definieren wir eine Abbildung

$$f = \operatorname{Spec} \varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

durch $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Da für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset A$ ein Primideal ist (Übungsaufgabe), ist f wohldefiniert.

Lemma 4.5 Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die zugehörige Abbildung. Dann gilt:

i) f ist stetig.

ii) Ist $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal in A und $\varphi(\mathfrak{a})B$ das von $\varphi(\mathfrak{a})$ erzeugte Ideal in B, so gilt

$$f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\varphi(\mathfrak{a})B).$$

iii) Ist $g \in A$, so gilt $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$.

iv) Ist φ surjektiv, so induziert f einen **Homöomorphismus** (also eine bijektive, stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung)

$$f : \operatorname{Spec} B \to V(\operatorname{Kern}\varphi).$$

Beweis :

i) Folgt sofort aus ii), denn es genügt zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.

ii) Sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ von B:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} \in f^{-1}(V(\mathfrak{a})) &\Leftrightarrow \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \\ &\Leftrightarrow \varphi(\mathfrak{a})B \subset \mathfrak{p} \\ &\Leftrightarrow \mathfrak{p} \in V(\varphi(\mathfrak{a})B).\end{aligned}$$

iii) $f^{-1}(D(g))$ besteht aus allen Primidealen in B, so dass $g \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ gilt. Das ist äquivalent zu $\varphi(g) \notin \mathfrak{p}$, also zu $\mathfrak{p} \in D(\varphi(g))$.

iv) Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset B$ gilt Kern$\varphi \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, also ist Bild$(f) \subset V(\text{Kern}\varphi)$.

Sei $\mathfrak{q} \in V(\text{Kern}\varphi)$ ein beliebiges Primideal. Da φ surjektiv ist, ist $\varphi(\mathfrak{q})$ ein Ideal in B (Übungsaufgabe). Dies ist sogar ein Primideal. Gilt nämlich $\varphi(f)\varphi(g) \in \varphi(\mathfrak{q})$ für $f, g \in A$, so existiert ein $h \in$ Kernφ mit $fg - h \in \mathfrak{q}$. Da Kern$\varphi \subset \mathfrak{q}$ ist, folgt $fg \in \mathfrak{q}$, also $f \in \mathfrak{q}$ oder $g \in \mathfrak{q}$. Somit ist $\varphi(f) \in \varphi(\mathfrak{q})$ oder $\varphi(g) \in \varphi(\mathfrak{q})$.

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : V(\text{Kern}\varphi) &\to \text{Spec}\, B \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

ist eine Umkehrabbildung zu f, wie man leicht nachrechnet. Ferner gilt

$$\tilde{f}(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\varphi(\mathfrak{b})),$$

also ist $\tilde{f}$ ebenfalls stetig. Damit ist f ein Homöomorphismus Spec $B \to V(\text{Kern}\varphi)$.

$\square$

Beispiel: In Spec $\mathbb{Z}$ gilt $V((9)) = V((3)) = \text{Spec}\,\mathbb{Z} \setminus \{3\}$.

Wir wollen jetzt analysieren, unter welchen Umständen verschiedene Ideale in A dieselbe abgeschlossene Teilmenge in Spec A induzieren. Dazu brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 4.6 Es sei $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Dann ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ gleich dem Schnitt aller Primideale in A, die $\mathfrak{a}$ enthalten.

Beweis : Ist $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, so liegt $f^k \in \mathfrak{a}$ für ein $k \geqq 1$. Ist $\mathfrak{p} \subset A$ ein beliebiges Primideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, so folgt aus $f^k \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ also $f \in \mathfrak{p}$. Daher gilt $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$.

Sei umgekehrt $f \in A$ ein Element, das <u>nicht</u> in $\sqrt{\mathfrak{a}}$ enthalten ist. Also gilt für alle $k \geqq 1$, dass f^k nicht in $\mathfrak{a}$ liegt. Wir betrachten nun die Menge

$\Sigma = \{\mathfrak{b} : \mathfrak{b} \subset A$ Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, so dass für alle $k \geqq 1$ das Element f^k nicht in $\mathfrak{b}$ liegt$\}$.

Diese Menge enthält $\mathfrak{a}$, ist also insbesondere nicht leer.

Wir betrachten eine bezüglich der Inklusion total geordnete Teilmenge $\{\mathfrak{b}_i : i \in I\}$ von Σ. Dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{b}_i$ ein Ideal in A, das $\mathfrak{a}$ enthält, aber kein f^k. Also ist $\bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{b}_i \in \Sigma$ eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn hat Σ somit ein maximales Element $\mathfrak{p}$.

Wir zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist. Angenommen, $x \notin \mathfrak{p}$ und $y \notin \mathfrak{p}$ für Elemente $x, y \in A$. Dann sind $\mathfrak{p} + (x)$ und $\mathfrak{p} + (y)$ Ideale in A, die echt größer als $\mathfrak{p}$ sind. Da $\mathfrak{p}$ in Σ maximal ist, können weder $\mathfrak{p} + (x)$ noch $\mathfrak{p} + (y)$ in Σ liegen. Da beide Ideale $\mathfrak{a}$ enthalten, existieren $k, l \geqq 1$ mit $f^k \in \mathfrak{p} + (x)$ und $f^l \in \mathfrak{p} + (y)$. Daher ist $f^{k+l} \in (\mathfrak{p} + (x))(\mathfrak{p} + (y)) \subset \mathfrak{p} + (xy)$.
Also ist $\mathfrak{p} + (xy) \notin \Sigma$, woraus $xy \notin \mathfrak{p}$ folgt. Daher ist $\mathfrak{p}$ in der Tat ein Primideal in $V(\mathfrak{a})$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Da f dann nicht im Schnitt aller Primideale sein kann, die $\mathfrak{a}$ enthalten, folgt die andere Inklusion. $\square$

Satz 4.7 Es gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ ist. Insbesondere ist $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$ ist.

Beweis : Ist $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$, so folgt $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{b}} = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{p} \subset \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Umgekehrt folgt aus $\mathfrak{b} \subset \sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$, dass jedes Primideal, das $\mathfrak{a}$ enthält, auch $\mathfrak{b}$ enthält. Also gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$. $\square$

Nun untersuchen wir die Topologie auf Spec A. Dazu brauchen wir folgenden Begriff.

Definition 4.8 Es sei T ein topologischer Raum. Eine nichtleere Teilmenge $Z \subset T$ heißt **irreduzibel**, wenn Z nur auf triviale Weise als Vereinigung von in Z abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann, d.h. aus

$$Z = Z_1 \cup Z_2$$

mit $Z_1, Z_2 \subset Z$ abgeschlossen folgt

$$Z_1 = Z \text{ oder } Z_2 = Z.$$

Hier heißt $Z_1 \subset Z$ abgeschlossen, falls Z_1 abgeschlossen in der Relativtopologie von Z ist, d.h. falls $Z = Z_1 \cap Y$ für eine abgeschlossene Teilmenge $Y \subset T$ gilt.

Beispiel: Es sei $Z \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ eine beliebige Teilmenge. Da die abgeschlossenen Teilmengen in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ gerade die Mengen der Form $\emptyset$, $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $\{(p_1), ..., (p_r)\}$ sind, sind folgende Mengen irreduzibel:

$$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \quad \emptyset, \quad \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \setminus \{(0)\}, \quad \{(3)\}, \quad \{(0), (3)\}.$$

Die Menge $V((10)) = \{(2), (5)\}$ ist etwa nicht irreduzibel.

Lemma 4.9 i) Ist T ein topologischer Raum und $Z \subset T$ eine irreduzible Teilmenge, so ist auch jede Teilmenge $U \subset Z$, die offen in Z ist, irreduzibel.

ii) Ist $Z \subset T$ irreduzibel, so ist auch der Abschluss von Z, also die Menge

$$\overline{Z} = \bigcap_{\substack{Y \subset T \text{abgeschlossen} \\ Z \subset Y}} Y,$$

irreduzibel.

Beweis :

i) Gilt $U = U_1 \cup U_2$ mit Mengen der Form $U_1 = U \cap Y_1$ und $U_2 = U \cap Y_2$, wobei Y_1 und Y_2 abgeschlossen sind, so gilt

$$Z = (Z \cap Y_1) \cup (Z \cap (Y_2 \cup Z \setminus U)),$$

was man sich am besten an Hand eines Bildes klar macht. Da Z irreduzibel ist, folgt $Z = Z \cap Y_1$ oder $Z = Z \cap (Y_2 \cup Z \setminus U)$. Daher gilt $U = U \cap Y_1$ oder $U = U \cap Y_2$ und U ist irreduzibel.

ii) Gilt $\overline{Z} = Y_1 \cup Y_2$ für $Y_1, Y_2 \subset \overline{Z}$, die in $\overline{Z}$, also auch in T abgeschlossen sind, so ist

$$Z = (Y_1 \cap Z) \cup (Y_2 \cap Z).$$

Da Z irreduzibel ist, folgt $Z = Y_1 \cap Z$ oder $Z = Y_2 \cap Z$, d.h. $Z \subset Y_1$ oder $Z \subset Y_2$. Da Y_1 und Y_2 abgeschlossen sind, folgt daraus $\overline{Z} \subset Y_1$ oder $\overline{Z} \subset Y_2$ und somit $\overline{Z} = Y_1$ oder $\overline{Z} = Z_2$. Daher ist $\overline{Z}$ irreduzibel.

□

Beispiel: Die Teilmenge $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \setminus \{(2),(3),(13)\}$ ist offen in $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, daher ist mit $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ auch $\operatorname{Spec}\mathbb{Z} \setminus \{(2),(3),(13)\}$ irreduzibel.

Proposition 4.10 Die abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal ist. Die Zuordnung

$$\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$$

ist also eine inklusionsumkehrende Bijektion

$$\operatorname{Spec} A \to \{\text{irreduzible abgeschlossene Teilmengen von } \operatorname{Spec} A\}.$$

Beweis : Angenommen, $V(\mathfrak{a})$ ist irreduzibel. Gilt $xy \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ für $x, y \in A$, so ist $(xy) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, also folgt $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \subset V((xy))$.

Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Dann ist $\mathfrak{p} \in V((xy))$, also gilt $xy \in \mathfrak{p}$, woraus $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$ folgt. Daher ist $\mathfrak{p} \in V((x))$ oder $\mathfrak{p} \in V((y))$. Also gilt $V(\mathfrak{a}) = (V(\mathfrak{a}) \cap V((x))) \cup (V(\mathfrak{a}) \cap V((y)))$. Da $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel ist, folgt $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((x))$ oder $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{a}) \cap V((y))$, d.h. es gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V((x))$ oder $V(\mathfrak{a}) \subset V((y))$. Nach Satz 4.7 folgt daraus $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ oder $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, also ist $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal.

Ist umgekehrt $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal, so sei $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}_1) \cup V(\mathfrak{b}_2)$ eine Darstellung von $V(\mathfrak{a})$ als Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen. Nach Lemma 4.2 ist also $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2)$, woraus mit Satz 4.7 $\sqrt{\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ folgt.

Angenommen $V(\mathfrak{b}_1) \subsetneqq V(\mathfrak{a})$. Dann ist nach Satz 4.7 $\sqrt{\mathfrak{a}} \subsetneqq \sqrt{\mathfrak{b}_1}$, d.h. es existiert ein $x \in \sqrt{\mathfrak{b}_1}$ mit $x \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$. Für alle $y \in \mathfrak{b}_2$ ist dann $xy \in \sqrt{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2} \subset \sqrt{\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$. Da $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ein Primideal ist und $x \notin \sqrt{\mathfrak{a}}$, folgt $y \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Somit gilt $\mathfrak{b}_2 \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, woraus $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b}_2)$ folgt. Also ist $V(\mathfrak{a})$ irreduzibel.

Der zweite Teil der Behauptung folgt mit Lemma 4.2, wenn man beachtet, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ die Gleichung $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}}$ gilt. □

Korollar 4.11 $\operatorname{Spec} A$ ist genau dann irreduzibel, wenn $\operatorname{Nil}(A) = \sqrt{0}$ ein Primideal ist.

Beweis : Da $\operatorname{Spec} A = V((0))$ ist, folgt dies aus Proposition 4.10. □

Definition 4.12 Ein topologischer Raum T heißt **noethersch**, wenn er folgende absteigende Kettenbedingung für abgeschlossene Teilmengen erfüllt:
Für jede Kette $\quad Y_1 \supset Y_2 \supset ... Y_n \supset \; Y_{n+1} \supset ... \quad$ abgeschlossener Teilmengen $Y_n \subset T$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\quad Y_{n_0} = Y_n \quad$ für alle $n \geqq n_0$.

Lemma 4.13 Ist A ein noetherscher Ring, so ist Spec A ein noetherscher topologischer Raum.

Beweis : Eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen in Spec A ist von der Form

$$V(\mathfrak{a}_1) \supset V(\mathfrak{a}_2) \supset ... \supset V(\mathfrak{a}_n) \supset ...$$

für Ideale $(\mathfrak{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von A. Mit Lemma 4.2 gilt

$$\sqrt{\mathfrak{a}_1} \subset \sqrt{\mathfrak{a}_2} \subset ... \subset \sqrt{\mathfrak{a}_n} \subset ... \, .$$

Da A noethersch ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{\mathfrak{a}_{n_0}} = \sqrt{\mathfrak{a}_n}$ für $n \geqq n_0$. Daraus folgt die Behauptung, da $V(\sqrt{\mathfrak{a}_n}) = V(\mathfrak{a}_n)$ ist. $\square$

<u>Vorsicht:</u> Die Umkehrung von Lemma 4.13 gilt nicht!

Proposition 4.14 In einem noetherschen topologischen Raum T ist jede nicht-leere abgeschlossene Teilmenge Y die Vereinigung endlich vieler irreduzibler abgeschlossener Teilmengen Y_i, d.h. es gilt

$$Y = Y_1 \cup ... \cup Y_n.$$

Falls wir hier $Y_j \not\subset Y_i$ annehmen, so sind die Mengen $Y_1, ..., Y_n$ (bis auf die Numerierung) eindeutig bestimmt. Sie heißen die **irreduziblen Komponenten von** Y.

Beweis : Sei $\mathcal{S}$ die Menge der nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen von T, die sich nicht als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellen lassen.

Angenommen, $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Dann enthält $\mathcal{S}$ ein minimales Element. Falls nicht, finden wir nämlich eine Kette abgeschlossener Teilmengen $(Y_n)_{n \geqq 1}$ in $\mathcal{S}$ mit

$$Y_1 \underset{\neq}{\supseteq} Y_2 \underset{\neq}{\supseteq} \dots \underset{\neq}{\supseteq} Y_n \underset{\neq}{\supseteq} \dots,$$

was der Tatsache widerspricht, dass T ein noetherscher topologischer Raum ist.

Sei $Y \in \mathcal{S}$ ein minimales Element. Da Y nicht irreduzibel sein kann, gilt $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $Y_i \subsetneq Y$. Da Y in $\mathcal{S}$ minimal ist, folgt $Y_1 \notin \mathcal{S}$ und $Y_2 \notin \mathcal{S}$. Beide sind also als endliche Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellbar. Dann ist aber auch Y als Vereinigung irreduzibler abgeschlossener Teilmengen darstellbar, was $Y \in \mathcal{S}$ widerspricht. Somit ist $\mathcal{S} = \emptyset$.

Jede abgeschlossene Teilmenge Y von T ist also Vereinigung $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ von irreduziblen, abgeschlossenen Y_i. Indem wir gegebenenfalls einige Y_i weglassen, können wir $Y_i \not\subset Y_j$ für $i \neq j$ annehmen.

Angenommen, $Y = Y_1' \cup \dots \cup Y_m'$ ist eine andere solche Darstellung. Dann ist $Y_1' \subset Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$, also $Y_1' = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (Y_1' \cap Y_i)$. Da Y_1' irreduzibel ist, folgt $Y_1' = Y_1' \cap Y_i$ für ein i. Nach Umnumerieren ist $i = 1$. Somit folgt $Y_1' \subset Y_1$. Auf dieselbe Weise zeigt man $Y_1 \subset Y_j'$ für ein j, woraus $Y_1' \subset Y_j'$, also $j = 1$ folgt. Somit ist $Y_1 = Y_1'$.

Auf diese Weise fährt man fort, bis alle Y_i verbraucht sind und erhält die Eindeutigkeit der Darstellung bis auf Umnumerierung. □

Beispiel: Die irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec}(K[x,y]/xy)$ sind gerade die Teilmengen $V(x)$ und $V(y)$.

Allgemeiner gilt: Die irreduziblen Komponenten von $\operatorname{Spec} A$ für einen noetherschen Ring A sind gerade die Teilmengen $V(\mathfrak{p}_i)$, wobei $\mathfrak{p}_i$ die endliche Menge der minimalen Primideale in A durchläuft (Übungsaufgabe).

Definition 4.15 i) Ein topologischer Raum T heißt **quasi-kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Mit anderen Worten, sind $(U_i)_{i \in I}$ offene Teilmengen von T mit $T = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$, so gibt es endlich viele $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $T = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

ii) Ein topologischer Raum T heißt **kompakt**, wenn T Hausdorff'sch und quasi-kompakt ist.

In der Algebraischen Geometrie sind die betrachteten topologischen Räume meist nicht Hausdorff'sch, daher haben wir es hier mit der Eigenschaft quasi-kompakt zu tun.

Lemma 4.16 Für jeden Ring A ist Spec A quasi-kompakt.

Beweis : Es sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Spec A. Dann ist Spec $A \setminus U_i = V(\mathfrak{a}_i)$ für ein Ideal $\mathfrak{a}_i \subset A$. Da Spec $A = \bigcup U_i$ ist, folgt $\bigcap\limits_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = \emptyset$. Nach Lemma 4.2 ist $V(\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap\limits_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) = \emptyset = V(A)$, woraus mit Satz 4.7 $\sqrt{\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i} = A$ folgt. Da $1 \in \sum\limits_{i\in I} \sqrt{\mathfrak{a}_i}$ ist, gibt es Indizes $i_1, ..., i_n \in I$ und Elemente $f_{i_1} \in \mathfrak{a}_{i_1}, ..., f_{i_n} \in \mathfrak{a}_{i_n}$ mit $1 = f_{i_1} + ... + f_{i_n}$. Daher folgt $1 \in \mathfrak{a}_{i_1} + ... + \mathfrak{a}_{i_n}$, woraus $\emptyset = V((1)) = V(\sum\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{a}_{i_j}) = \bigcap\limits_{j=1}^{n} V(\mathfrak{a}_{i_j})$ folgt. Also ist $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $(U_i)_{i\in I}$. □

Proposition 4.17 Ein topologischer Raum T ist genau dann noethersch, wenn jede offene Teilmenge quasi-kompakt ist.

Beweis : Ist T noethersch und $U \subset T$ eine offene Teilmenge, so sei $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$ eine offene Überdeckung von U. Enthält $(U_i)_{i\in I}$ keine endliche Teilüberdeckung, so existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein U_n mit

$$U_1 \subsetneqq U_1 \cup U_2 \subsetneqq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \subsetneqq ....$$

Die Komplemente der Mengen $U_1 \cup ... \cup U_m$ bilden dann eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von T, die nicht stationär wird. Das widerspricht der Tatsache, dass T noethersch ist.

Umgekehrt nehmen wir an, jede offene Teilmenge $U \subset T$ sei quasi-kompakt. Sei $Y_1 \supset Y_2 \supset ...$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von T. Dann ist $U = \bigcup\limits_{n\geqq 1} (T \setminus Y_n)$ eine offene Teilmenge mit der offenen Überdeckung $(T \setminus Y_n)_{n\geqq 1}$. Da U quasi-kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $T \setminus Y_{n_1}, ..., T \setminus Y_{n_r}$ von U. Wir setzen $n_0 = \max\{n_1, ..., n_r\}$. Da $Y_{n_0} \subset Y_{n_j}$ ist, folgt $T \setminus Y_{n_j} \subset T \setminus Y_{n_0}$ für $j = 1, ..., r$. Also ist $U = T \setminus Y_{n_0}$. Für alle $n \geqq n_0$ gilt $U = T \setminus Y_{n_0} \subset T \setminus Y_n \subset U$, also folgt $Y_{n_0} = Y_n$. Somit wird die Kette der Y_n stationär, d.h. T ist noethersch. □

Wir wollen nun noch den Zusammenhang unserer Untersuchung von Spec A mit der Theorie aus §3 herstellen. Dazu sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Lemma 4.18 Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}: \qquad \mathbb{A}^n(K) &\to \operatorname{Spec} K[X_1, ..., X_n] \\ (a_1, ..., a_n) &\mapsto (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n) \end{aligned}$$

ist stetig und injektiv. Das Bild von $\mathfrak{i}$ ist gerade die Menge $\operatorname{Max}(K[X_1, ..., X_n])$ der maximalen Ideale in $K[X_1, ..., X_n]$. Versieht man $\operatorname{Max}(K[X_1, ..., X_n])$ mit der Relativtopologie von Spec A, so ist

$$\mathfrak{i} : \mathbb{A}^n(K) \to \operatorname{Max} K[X_1, ..., X_n]$$

ein Homöomorphismus in der Zariski-Topologie.

Beweis : Nach dem Hilbert'schen Nullstellensatz sind die maximalen Ideale von $K[X_1, ..., X_n]$ gerade die Ideale der Form $X_1 - a_1, ..., X_n - a_n$ für $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K)$.

Offenbar ergeben verschiedene Punkte in $\mathbb{A}^n(K)$ auch verschiedene maximale Ideale. Also ist $\mathfrak{i}$ eine Bijektion $\mathbb{A}^n(K) \to \operatorname{Max} K[X_1, ..., X_n]$.

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $K[X_1, ..., X_n]$, so bezeichnen wir mit $\tilde{V}(\mathfrak{a})$ die Nullstellenmenge im Sinne von Definition 3.1, also

$$\tilde{V}(\mathfrak{a}) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) : f(a_1, ..., a_n) = 0 \text{ für alle } f \in \mathfrak{a}\},$$

um sie von $V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$ zu unterscheiden. Es gilt nun

$$\mathfrak{i}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) : \mathfrak{a} \subset (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)\}.$$

Dies ist offenbar eine Teilmenge von $\tilde{V}(\mathfrak{a})$.

Ist umgekehrt $(a_1, ..., a_n) \in \tilde{V}(\mathfrak{a})$, so folgt

$$\{(a_1, ..., a_n)\} = \tilde{V}((X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)) \subset \tilde{V}(\mathfrak{a}),$$

also mit Satz 3.13

$$\mathfrak{a} \subset (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n), \quad \text{d.h. } (a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{i}^{-1}(V(\mathfrak{a})).$$

Daher gilt $\mathfrak{i}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = \tilde{V}(\mathfrak{a})$, also ist $\mathfrak{i}$ stetig.

Analog zeigt man $\mathfrak{i}(\tilde{V}(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}) \cap \mathrm{Max}K[X_1, ..., X_n]$, also hat die stetige Bijektion

$$\mathfrak{i} : \mathbb{A}^n(K) \to \mathrm{Max}K[X_1, ..., X_n]$$

eine stetige Umkehrabbildung, sie ist somit ein Homöomorphismus. □

Ist man an Nullstellenmengen von Teilmengen des Polynomrings $K[X_1, ..., X_n]$ interessiert, so kommt man mit Hilfe der Theorie von §3 oft mit den maximalen Idealen aus. Möchte man beliebige Ringe studieren, so reicht das nicht mehr und man muss alle Primideale betrachten. Ein Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ etwa vermittelt i.a. keine Abbildung zwischen Max(B) und Max(A), wohl aber eine Abbildung Spec $B \to$ Spec (A).

5 Garben

Um zu definieren, was ein Schema ist, brauchen wir außer geeigneten topologischen Räumen auch noch den Begriff der Garbe.

Definition 5.1 Es sei T ein topologischer Raum. Eine **Prägarbe** $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf T besteht aus den folgenden Daten:

- einer abelschen Gruppe $\mathcal{F}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$ und
- einem Gruppenhomomorphismus $\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ für jedes Paar offener Mengen $V \subset U$,

so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.

ii) $\mathrm{res}_{UU} = \mathrm{id}$ für alle $U \subset T$ offen.

iii) Für $W \subset V \subset U$ gilt

$$\mathrm{res}_{UW} = \mathrm{res}_{VW} \circ \mathrm{res}_{UV}.$$

Manchmal schreiben wir auch $f|_U$ statt $\mathrm{res}_{UV}(f)$ für $f \in \mathcal{F}(U)$. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ nennt man auch **Schnitte über** U.

Beispiele:

1) Ist T ein topologischer Raum, so ist durch

$$\mathcal{F}_{\text{cont}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \;\text{ stetig}\}$$

für $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ offen eine Prägarbe gegeben, wenn wir noch $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ setzen. Für $V \subset U$ ist

$$\text{res}_{UV} : \mathcal{F}_{\text{cont}}(U) \to \mathcal{F}_{\text{cont}}(V)$$

die Einschränkungsabbildung $f \mapsto f|_V$.

2) Ist $T = \mathbb{R}$ mit der reellen Topologie, so ist durch

$$\mathcal{F}_{\text{diff}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ differenzierbar}\}$$

(und $\mathcal{F}_{\text{diff}}(\emptyset) = 0$) eine Prägarbe, wobei

$$\text{res}_{UV} : \mathcal{F}_{\text{diff}}(U) \to \mathcal{F}_{\text{diff}}(V)$$

wieder durch das Einschränken von Funktionen gegeben wird. Analog ist die Prägarbe $\mathcal{C}^1$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert.

3) Ist G eine beliebige abelsche Gruppe und T ein topologischer Raum, so ist durch $\mathcal{F}_G(U) = G$, falls $U \neq \emptyset$, sowie $\mathcal{F}_G(\emptyset) = 0$ und $\text{res}_{UV} = \text{id}_G$ für $\emptyset \neq V \subset U$ sowie $\text{res}_{U\emptyset} = 0$ eine Prägarbe gegeben. Sie heißt **konstante Prägarbe**.

Definition 5.2 Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen auf dem topologischen Raum T heißt **Garbe**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) Sei $U \subset T$ offen, $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U und $f \in \mathcal{F}(U)$. Ist $\text{res}_{UU_i} f = 0$ für alle $i \in I$, so ist $f = 0$.

ii) Sei $U \subset T$ offen und $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von U. Für jede Familie $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$, so dass

$$\text{res}_{U_i\ U_i\cap U_j}(f_i) = \text{res}_{U_j\ U_i\cap U_j}(f_j)$$

für alle $i \neq j$ gilt, existiert ein $f \in \mathcal{F}(U)$ mit $\text{res}_{UU_i}(f) = f_i$.

Das erste Garbenaxiom i) besagt, dass ein $f \in \mathcal{F}(U)$ eindeutig durch seine Einschränkungen auf alle Teilmengen einer offenen Überdeckung bestimmt ist.

Das zweite Garbenaxiom ii) besagt, dass sich eine Familie $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ von Schnitten über den offenen Teilmengen U_i einer Überdeckung von U zu einem $f \in \mathcal{F}(U)$ verkleben lässt, wenn die Einschränkung von f_i auf $U_i \cap U_j$ jeweils mit der Einschränkung von f_j auf $U_i \cap U_j$ übereinstimmt.

Beispiel: Im obigen Beispiel 1) ist die Prägarbe $\mathcal{F}_{\text{cont}}$ eine Garbe: Stetige reellwertige Funktionen sind offenbar durch ihre Einschränkung auf eine offene Überdeckung eindeutig bestimmt. Ist ferner $f_i \in \mathcal{F}_{\text{cont}}(U_i)$ für eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U gegeben, so dass $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ gilt, so definieren wir

$$f(x) = f_i(x), \quad \text{falls } x \in U_i.$$

Das ist wohldefiniert, d.h. $f(x)$ hängt nicht von der Wahl eines i mit $x \in U_i$ ab. Da die Einschränkung von f auf alle U_i stetig ist, ist auch f stetig. Somit haben wir $f \in \mathcal{F}_{\text{cont}}(U)$ gefunden mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle $i \in I$.

Analog zeigt man, dass die Prägarbe $\mathcal{F}_{\text{diff}}$ aus dem obigen Beispiel 2) eine Garbe ist.

Ist $G \neq 0$ eine Gruppe, so muss die konstante Prägarbe $\mathcal{F}_G$ aus dem obigen Beispiel 3) keine Garbe sein. Das erste Garbenaxiom ist zwar erfüllt, das zweite jedoch nicht, wenn T zwei nicht-leere disjunkte offene Mengen U und V enthält. Dann wählen wir $g_1 \neq g_2$ in G und betrachten die Schnitte $g_1 \in \mathcal{F}_G(U) = G$ und $g_2 \in \mathcal{F}_G(V) = G$. Die offenen Mengen U und V bilden eine Überdeckung von $U \cup V$. Es gilt $U \cap V = \emptyset$, also $\text{res}_{U\, U \cap V}(g_1) = 0 = \text{res}_{V\, U \cap V}(g_2)$, aber es gibt kein $g \in \mathcal{F}_G(U \cup V) = G$ mit $g = \text{res}_{U \cup V\, U}(g) = g_1$ und $g = \text{res}_{U \cup V\, V}(g) = g_2$.

Definition 5.3 Es seien $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ Prägarben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T.

i) Ein **Morphismus von Prägarben** $\alpha : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ ist eine Familie $(\alpha_U)_{U \subset T \text{ offen}}$ von Gruppenhomomorphismen

$$\alpha_U : \mathcal{F}_1(U) \to \mathcal{F}_2(U),$$

so dass für alle Paare $V \subset U$ von offenen Mengen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_1(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"'] & \mathcal{F}_2(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"] \\ \mathcal{F}_1(V) \arrow[r, "\alpha_V"'] & \mathcal{F}_2(V) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist, d.h. es gilt

$$\mathrm{res}_{UV} \circ \alpha_U = \alpha_V \circ \mathrm{res}_{UV}.$$

ii) Ein **Morphismus von Garben** ist einfach ein Morphismus der zugrundeliegenden Prägarben.

iii) Ein Morphismus

$$\alpha = (\alpha_U)_{U \subset T \text{ offen}} : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

von Prägarben heißt **Isomorphismus**, falls es einen Morphismus

$$\beta = (\beta_U)_{U \subset T \text{ offen}} : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$$

von Prägarben gibt, so dass $\alpha_U \circ \beta_U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_2(U)}$ und $\beta_U \circ \alpha_U = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_1(U)}$ für alle $U \subset T$ offen gilt.

Beispiele:

1) Für jedes $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}$ offen betrachten wir den Gruppenhomomorphismus

$\alpha_U : \mathcal{C}^1(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\} \to \mathcal{F}_{\text{cont}}(U) = \{f : U \to \mathbb{R} \text{ stetig}\},$

gegeben durch $$f \mapsto f'.$$

Dann ist $\alpha = (\alpha_U)_{U \subset \mathbb{R} \text{ offen}}$ ein Morphismus von Garben von $\mathcal{C}^1$ nach $\mathcal{F}_{\text{cont}}$.

2) Sind G und H abelsche Gruppen und $\sigma : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so definiert $\alpha_U = \sigma : \mathcal{F}_G(U) = G \to H = \mathcal{F}_H(U)$ für $U \neq \emptyset$ und $\alpha_\emptyset = 0$ einen Morphismus von Prägarben $\alpha : \mathcal{F}_G \to \mathcal{F}_H$.

Nun wollen wir den Halm einer Prägarbe $\mathcal{F}$ in einem Punkt $x \in T$ definieren. Dazu brauchen wir den Begriff des direkten Limes.

Definition 5.4 Eine (Index-)Menge I heißt **gerichtet**, falls sie durch eine Relation $\leqq$ partiell geordnet ist und falls für $i, j \in I$ immer ein $k \in I$ existiert mit $i \leqq k$ und $j \leqq k$.

Proposition 5.5 Es sei I eine gerichtete Indexmenge und $(G_i)_{i \in I}$ eine Familie abelscher Gruppen, so dass für alle $i \leqq j$ in I ein Gruppenhomomorphismus

$$\sigma_{ij} : G_i \to G_j$$

gegeben ist mit

i) $\sigma_{ii} = \mathrm{id}_{G_i}$ für alle i

ii) $\sigma_{ik} = \sigma_{jk} \circ \sigma_{ij}$ für alle $i \leqq j \leqq k$.

Man nennt dann $(G_i,\ \sigma_{ij})$ auch ein **gerichtetes System** abelscher Gruppen. Für ein solches gerichtetes System existieren

- eine abelsche Gruppe $\varinjlim G_i$ sowie
- Gruppenhomomorphismen

  $$g_i : G_i \to \varinjlim G_i$$

  für alle $i \in I$ mit $g_i = g_j \circ \sigma_{ij}$ für alle $i \leqq j$, so dass folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist.

  Sind eine abelsche Gruppe H und Gruppenhomomorphismen $h_i : G_i \to H$ mit $h_i = h_j \circ \sigma_{ij}$ für $i \leqq j$ gegeben, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus

  $$f : \varinjlim G_i \to H,$$

  so dass $f \circ g_i = h_i$ ist für alle $i \in I$. Mit anderen Worten, das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[dd, "\sigma_{ij}"'] \arrow[dr, "g_i"] \arrow[drr, bend left, "h_i"] & & \\
& \varinjlim G_i \arrow[r, "f"] & H \\
G_j \arrow[ur, "g_j"'] \arrow[urr, bend right, "h_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

  ist kommutativ.

Man nennt $\varinjlim G_i$ den **direkten Limes** von $(G_i,\, \sigma_{ij})$.

Beweis : Man konstruiert die Gruppe $\varinjlim G_i$ als Quotienten von $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ nach der Untergruppe R, die von allen Elementen der Form $g_i - \sigma_{ij}(g_i)$ für $i \leqq j$ und $g_i \in G_i$ erzeugt wird. Die Abbildungen $g_i : G_i \to \varinjlim G_i$ kommen von den natürlichen Abbildungen $G_i \to \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ her. Ist $a_{i_1} + \ldots + a_{i_r}$ für $i_1, \ldots, i_r \in I$ und $a_{i_j} \in G_{i_j}$ ein beliebiges Element in $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$, so wählen wir ein $j \in I$ mit $i_1 \leqq j, \ldots, i_r \leqq j$. Dann gilt in $\varinjlim G_i = \bigoplus G_i/R$ die Gleichung $a_{i_1} + \ldots + a_{i_r} = \sigma_{i_1} a_{i_1} + \ldots + \sigma_{i_r} a_{i_r}$. Da die rechte Seite dieser Gleichung ein Element der G_j-Komponente ist, haben wir gezeigt, dass es für jedes $a \in \varinjlim G_i$ einen Index $j \in I$ und ein $a_j \in G_j$ gibt, so dass $a = g_j(a_j)$ gilt.
$\square$

Definition 5.6 Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T und $x \in T$. Dann ist die Menge aller offenen Umgebungen U von x mit der partiellen Ordnung $U \leqq V \Leftrightarrow V \subset U$ eine gerichtete Indexmenge. Für $U \leqq V$, also $V \subset U$ haben wir die Restriktionsabbildung $\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$. Also existiert der direkte Limes

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U).$$

Er heißt **Halm** von $\mathcal{F}$ in x.

Beispiel: Es sei G eine abelsche Gruppe und $\mathcal{F}_G$ die zugehörige konstante Prägarbe auf T. Dann ist $\mathcal{F}_x = G$ für alle $x \in T$.

Lemma 5.7 Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T und sei $x \in T$.

i) Für jede offene Umgebung U von x gibt es eine natürliche Abbildung

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x.$$

Diese bezeichnen wir mit $s \mapsto s_x$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[dd, "\mathrm{res}_{UV}"'] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{F}_x \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

für $V \subset U$ ist kommutativ.

ii) Für jedes Element $c \in \mathcal{F}_x$ existiert eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = c$.

iii) Sind U und V offene Umgebungen von x sowie $s \in \mathcal{F}(U)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$, dann ist $s_x = t_x$ genau dann, wenn es eine offene Umgebung W von x mit $W \subset U \cap V$ gibt, so dass $\mathrm{res}_{UW} s = \mathrm{res}_{UW} t$ gilt.

Beweis :

i) Nach Konstruktion des direkten Limes gibt es für jede offene Umgebung U von x einen Homomorphismus $g_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_x$, so dass für alle $U \leqq V$, d.h. $V \subset U$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[dd, "\mathrm{res}_{UV}"'] \arrow[dr] & \\ & \mathcal{F}_x \\ \mathcal{F}(V) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit $s \mapsto s_x$.

ii) Wir haben im Beweis von Proposition 5.5 gesehen, dass es für jedes $c \in \mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$ eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ gibt, so dass $g_U(s) = c$, also $s_x = c$ gilt.

iii) Gilt $\mathrm{res}_{UW} s = \mathrm{res}_{VW} t$ für eine offene Teilmenge $W \subset U \cap V$, dann folgt $s_x = t_x$ nach Konstruktion des direkten Limes. Ist umgekehrt $s_x = t_x$, so liegt nach Konstruktion des direkten Limes

$$\mathcal{F}_x = \bigoplus_{x \in U} \mathcal{F}(U)/R$$

das Element $s - t$ in der Gruppe $R \subset \bigoplus_{x \in U} \mathcal{F}(U)$, die von allen Elementen der Form $f - \mathrm{res}_{\tilde{U}\tilde{V}} f$ für $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ und $f \in \mathcal{F}(\tilde{U})$ erzeugt wird. Also ist $s - t$ eine endliche Summe solcher Differenzen, d.h.

$$s - t = (f_1 - \mathrm{res}_{U_1 V_1} f_1) + \ \dots \ + (f_r - \mathrm{res}_{U_r V_r} f_r)$$

mit $f_1 \in \mathcal{F}(U_1), \ \dots \ , f_r \in \mathcal{F}(U_r)$. Für $W = V_1 \cap \dots \cap V_r \cap U \cap V$ gilt somit $\mathrm{res}_{UW} s - \mathrm{res}_{UW}(t) = 0$, denn für alle i ist $\mathrm{res}_{U_i W} f_i = \mathrm{res}_{V_i W}(\mathrm{res}_{U_i V_i} f_i)$. Also ist $\mathrm{res}_{UW} s = \mathrm{res}_{UW} t$.

□

Lemma 5.8 Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf T und $U \subset T$ offen. Für $s, t \in \mathcal{F}(U)$ ist $s = t$ genau dann, wenn $s_x = t_x$ für alle $x \in U$ gilt.

Beweis : Aus $s = t$ folgt natürlich $s_x = t_x$ für alle $x \in U$. Gilt umgekehrt $s_x = t_x$ für alle $x \in U$, so gibt es nach Lemma 5.7iii) eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von U, so dass $\mathrm{res}_{UU_i}(s) = \mathrm{res}_{UU_i}(t)$ für alle $i \in I$ gilt. Nach dem ersten Garbenaxiom folgt $s = t$. □

Lemma 5.9 Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben abelscher Gruppen auf dem topologischen Raum T. Ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induziert für jedes $x \in T$ einen Gruppenhomomorphismus $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, so dass für alle offenen Umgebungen U von x das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"'] & \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Beweis : Für alle offene Umgebungen U von x betrachten wir den Gruppenhomomorphismus $\beta_U : \mathcal{F}(U) \stackrel{\alpha_U}{\to} \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}_x$. Da α_U mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist, kommutiert für alle $V \subset U$ offen das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[dd, "\mathrm{res}_{UV}"'] \arrow[dr, "\beta_U"] & \\
& \mathcal{G}_x \\
\mathcal{F}(V) \arrow[ur, "\beta_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des direkten Limes $\mathcal{F}_x$ existiert also genau ein Homomorphismus $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$, so dass

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[d] \arrow[dr, "\beta_U"] & \\
\mathcal{F}_x \arrow[r, "\alpha_x"'] & \mathcal{G}_x
\end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Nach Konstruktion macht dieser das Diagramm aus der Behauptung kommutativ. $\square$

Nun wollen wir zeigen, wie man eine Prägarbe „garbifizieren“ kann.

Definition 5.10 Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum T. Dann definieren wir für jedes $U \subset T$ offen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^+(U) \quad = \quad & \{\text{Funktionen } s : U \to \bigcup_{x \in U} \mathcal{F}_x, \text{so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:} \\
& i)\;\; s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ für alle } x \in U \text{ und} \\
& ii)\;\; \text{für alle } x \in U \text{ existiert eine offene Umgebung} \\
& \qquad V \subset U \text{ und ein } t \in \mathcal{F}(V) \text{ mit } s_y = t_y \text{ für alle } y \in V\}.
\end{aligned}$$

$\mathcal{F}^+(U)$ besteht also aus allen Kollektionen $(s(x))_{x \in U}$ von Elementen $s(x) \in \mathcal{F}_x$, die lokal von einem Schnitt von $\mathcal{F}$ herkommen.

Lemma 5.11 In der Situation von Definition 5.10 gilt:

i) $\mathcal{F}^+$ ist eine Garbe auf T.

ii) Für jedes $U \subset T$ offen sei

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$$

die Abbildung, die einem $s \in \mathcal{F}(U)$ die Funktion $x \mapsto s_x$ zuordnet. Dann ist φ ein Morphismus von Prägarben.

iii) Ist $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein beliebiger Morphismus von Prägarben und $\mathcal{G}$ eine Garbe, so existiert genau ein Morphismus $\beta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F}^+ \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

iv) Für jedes $x \in T$ ist die Abbildung der Halme

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^+$$

ein Isomorphismus.

v) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ ein Isomorphismus.

Beweis :

i) und ii) in den Übungen

iii) Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe und $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus. Für jede offene Teilmenge $U \subset T$ definieren wir eine Abbildung $\beta_U : \mathcal{F}^+(U) \to \mathcal{G}(U)$ wie folgt: Zu $(s(x))_{x \in U}$ in $\mathcal{F}^+(U)$ wählen wir eine offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$ sowie $t_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $(t_i)_x = s(x)$ für alle $x \in U_i$. Wir betrachten $r_i = \alpha_{U_i}(t_i) \in \mathcal{G}(U_i)$. Es ist $(r_i)_x = \alpha_x(t_i)_x = \alpha_x(s(x))$ für alle $x \in T$. Also ist $(\mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_i)_x = (r_i)_x = (r_j)_x = (\mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_j)_x$ für alle $x \in U_i \cap U_j$. Da $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, folgt mit Lemma 5.8 $\mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_i = \mathrm{res}_{U_i\, U_i \cap U_j} r_j$, also existiert nach dem zweiten Garbenaxiom ein $r \in \mathcal{G}(U)$ mit $\mathrm{res}_{U U_i} r = r_i$. Nach Lemma 5.8 ist $r \in \mathcal{G}(U)$ das einzige Element mit $r_x = \alpha_x(s(x))$ für alle $x \in T$. Daher ist r unabhängig von der Wahl der Überdeckung und der Wahl der t_i. Wir setzen $\beta_U(s) = r$. Das definiert einen Garbenmorphismus $\beta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$. Ist $s \in \mathcal{F}(U)$, so kann man in obiger Konstruktion angewandt auf $\varphi(s)$ die triviale Überdeckung wählen und erhält $\beta \circ \varphi(s) = \alpha(s)$.

iv) Wir betrachten $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^+$. Ist $a \in \mathcal{F}_x$ mit $\varphi_x(a) = 0$, so existiert nach Lemma 5.7 ii) eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $a = s_x$. Dann ist $0 = \varphi_x(a) = (\varphi_U(s))_x$, also existiert nach Lemma 5.7 iii) eine offene Umgebung $V \subset U$ um x mit $\varphi_U(s)|_V = 0$. Also ist nach Definition von φ_U für alle $y \in V$ der Halm $s_y = 0$. Insbesondere ist $a = s_x = 0$. Daher ist φ_x injektiv. Ist $b \in \mathcal{F}_x^+$, so sei $s \in \mathcal{F}^+(U)$ ein Schnitt mit $s_x = b$. Nach Definition von $\mathcal{F}^+$ existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von x und ein $t \in \mathcal{F}(V)$ mit $s(y) = t_y$ für alle $y \in V$. Also ist nach Lemma 5.8 $\varphi_V(t) = \mathrm{res}_{UV}(s)$. Daher folgt $\varphi_x(t_x) = (\varphi_V(t))_x = (\mathrm{res}_{UV}(s))_x = s_x = b$.

v) in den Übungen.

$\square$

Beispiel: Wir wollen uns jetzt am Beispiel der konstanten Prägarbe klarmachen, was beim Übergang zur Garbifizierung passiert.

Es sei $T = \mathbb{R}$ (oder jeder andere lokal zusammenhängende topologische Raum) und G eine abelsche Gruppe, etwa $G = \mathbb{Z}$. Wir haben schon gesehen, dass die konstante Prägarbe $\mathcal{F}_\mathbb{Z}$ keine Garbe ist, denn wir können etwa die Schnitte $1 \in \mathcal{F}_\mathbb{Z}(]0,1[)$ und $2 \in \mathcal{F}_\mathbb{Z} \in (]1,2[)$ nicht zu einem Element in $\mathcal{F}_\mathbb{Z}(]0,1[\cup]1,2[) = \mathbb{Z}$ zusammenkleben. Nun ist $\mathcal{F}_{\mathbb{Z},x} = \mathbb{Z}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist
$\mathcal{F}_\mathbb{Z}^+(]0,1[\cup]1,2[) = \{(m_x)_{x\in]0,1[\cup]1,2[} : m_x \in \mathbb{Z}$, so dass für alle x eine offene Umgebung V_x in $]0,1[\cup]1,2[$ und ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $m_y = n$ für alle $y \in V_x\}$.

Für ein $(m_x)_x \in \mathcal{F}_\mathbb{Z}^+(]0,1[\cup]1,2[)$ und ein beliebiges $x \in]0,1[$ sei

$$\begin{aligned} U &= \{y \in]0,1[: m_y = m_x\} \quad \text{und} \\ V &= \{y \in]0,1[: m_y \neq m_x\} \end{aligned}$$

Diese Teilmengen sind disjunkt und offen in $]0,1[$ und es gilt $]0,1[= U \cup V$. Da $]0,1[$ zusammenhängend ist und $x \in U$, also $U \neq \emptyset$ gilt, folgt $U =]0,1[$ und $V \neq \emptyset$. Somit ist $(m_x)_{x\in]0,1[}$ konstant.
Genauso zeigt man, dass $(m_x)_{x\in]1,2[}$ konstant ist. Also folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\mathbb{Z}^+(]0,1[\cup]1,2[) &= \{(m_x)_{x\in]0,1[\cup]1,2[} : \text{ es gibt } a, b \in \mathbb{Z} \text{ mit} \\ &\qquad m_x = a \text{ für alle } x \in]0,1[\text{ und} \\ &\qquad m_x = b \text{ für alle } x \in]1,2[\} \\ &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die Abbildung $\varphi : \mathcal{F}_{\mathbb{Z}} \to \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{+}$ vermittelt via

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(]0,1[\,\cup\,]1,2[) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}^{+}(]0,1[\,\cup\,]1,2[) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

gerade die Diagonalabbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, die durch $a \mapsto (a, a)$ gegeben wird.

Definition 5.12 Ein Morphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben abelscher Gruppen auf T heißt injektiv, wenn für jede offene Teilmenge $U \subset T$ der Gruppenhomomorphismus

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

injektiv ist.

Vorsicht: Der Begriff der Surjektivität ist komplizierter, wie wir später zeigen werden.

Proposition 5.13 Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf T. Dann gilt:

i) α ist genau dann injektiv, wenn für alle $x \in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ injektiv ist.

ii) Falls für alle $x \in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ surjektiv ist, so gibt es für jedes $U \subset T$ offen und für jedes $t \in \mathcal{G}(U)$ eine offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ sowie $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\alpha_{U_i}(s_i) = \mathrm{res}_{UU_i}(t)$.

iii) α ist genau dann ein Isomorphismus, wenn für alle $x \in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus ist.

Beweis :

i) Angenommen, α ist injektiv und $a \in \mathcal{F}_x$ ist ein Element im Halm mit $\alpha_x(a) = 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = a$. Ferner gilt nach Lemma 5.9 $\alpha_U(s)_x = \alpha_x(s_x) = \alpha_x(a) = 0$, also gibt es nach Lemma 5.7 eine offene Umgebung $W \subset U$ von x mit $\mathrm{res}_{UW}(\alpha_U(s)) = 0$. Da $\mathrm{res}_{UW}(\alpha_U(s)) = \alpha_W(\mathrm{res}_{UW}(s))$ ist und α_W injektiv ist, folgt $\mathrm{res}_{UW}(s) = 0$, also $a = s_x = (\mathrm{res}_{UW}(s))_x = 0$. Daher ist α_x injektiv.

Umgekehrt nehmen wir an, alle Halmabbildungen $\alpha_x : \mathcal{F} \to \mathcal{G}_x$ sind injektiv. Sei $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\alpha_U(s) = 0$ gegeben. Für jedes $x \in U$ gilt dann $\alpha_x(s_x) = (\alpha_U(s))_x = 0$ woraus $s_x = 0$ folgt. Mit Lemma 5.8 folgt $s = 0$, d.h. α ist injektiv im Sinne von Definition 5.12.

ii) Angenommen, alle α_x sind surjektiv. Sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Dann existiert für jedes $x \in T$ ein $r_x \in \mathcal{F}_x$ mit $\alpha_x(r_x) = t_x$. Nach Lemma 5.7 ii) gibt es eine offene Umgebung $W_x \subset U$ von x und ein $s(x) \in \mathcal{F}(W_x)$ mit $s(x)_x = r_x$. Der Keim von $\alpha_{W_x}(s(x)) \in G(W_x)$ in x ist gerade $\alpha_x(s(x)_x) = \alpha_x(r_x) = t_x$, also gleich dem Keim von $\mathrm{res}_{UW_x} t$ in x. Nach Lemma 5.7 iii) existiert eine offene Umgebung $U_x \subset W_x$ von x mit

$$\begin{aligned} \mathrm{res}_{UU_x} t &= \mathrm{res}_{W_xU_x}(\alpha_{W_x}(s(x))) \\ &= \alpha_{U_x}(\mathrm{res}_{W_xU_x} s(x)). \end{aligned}$$

Mit der offenen Überdeckung $U = \bigcup\limits_{x \in U} U_x$ und den Schnitten $\mathrm{res}_{W_xU_x} s(x)$ folgt die Behauptung.

iii) Ist α ein Isomorphismus, dann sind alle $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ Isomorphismen. Also müssen auch die Halmabbildungen $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ Isomorpismen sein. Wir nehmen umgekehrt an, alle α_x sind Isomorphismen und zeigen, dass dann alle $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ Isomorphismen sind. Nach i) ist jedes α_U injektiv. Sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Nach ii) existiert eine offene Überdeckung $U = \bigcup\limits_i U_i$ und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $\alpha_{U_i}(s_i) = \mathrm{res}_{UU_i} t$. Nun ist $\alpha_{U_i \cap U_j}(\mathrm{res}_{U_i\ U_i \cap U_j} s_i) = \mathrm{res}_{U\ U_i \cap U_j} t = \alpha_{U_i \cap U_j}(\mathrm{res}_{U_j\ U_i \cap U_j} s_j)$.
Da $\alpha_{U_i \cap U_j}$ injektiv ist, folgt $\mathrm{res}_{U_i\ U_i \cap U_j} s_i = \mathrm{res}_{U_j\ U_i \cap U_j} s_j$. Nach dem zweiten Garbenaxiom existiert also ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\mathrm{res}_{UU_i} s = s_i$ für alle i. Dann hat $\alpha_U(s)$ die Eigenschaft, dass $\mathrm{res}_{UU_i}(\alpha_U(s)) = \alpha_{U_i}(\mathrm{res}_{UU_i} s) = \alpha_{U_i}(s_i) = \mathrm{res}_{UU_i}(t)$ gilt, woraus nach dem ersten Garbenaxiom $\alpha_U(s) = t$ folgt. Somit ist α_U auch surjektiv.

□

Definition 5.14 Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben auf T. $\mathcal{F}$ heißt **Untergarbe** von $\mathcal{G}$ ($\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$), falls für alle $U \subset T$ offen $\mathcal{F}(U)$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}(U)$ ist und falls für alle $V \subset U$ offen die Restriktionsabbildung $\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ durch Einschränken aus der Restriktionsabbildung $\mathrm{res}_{UV} : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ hervorgeht.

Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, so ist für alle $x \in T$ der Halm $\mathcal{F}_x$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}_x$ (Übungsaufgabe).

Definition 5.15 Sei $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. Dann definieren wir für alle $U \subset T$ offen

$$(\mathrm{Kern}\,\alpha)(U) = \mathrm{Kern}\,(\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)).$$

Lemma 5.16 i) $\mathrm{Kern}\,\alpha$ definiert eine Garbe auf T und zwar eine Untergarbe von $\mathcal{F}$.

ii) Für jedes $x \in T$ gilt $(\mathrm{Kern}\,\alpha)_x = \mathrm{Kern}\,(\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x)$.

iii) α ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Kern}\,\alpha = 0$ gilt.

Beweis : in den Übungen. □

Jetzt wollen wir das Bild eines Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ definieren. Wir definieren eine Prägarbe auf T durch

$$(\text{P-Bild}\,\alpha)(U) = \mathrm{Bild}\,(\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

mit den Restriktionsabbildungen, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bild}\,(\alpha_U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{UV}"] \\ \mathrm{Bild}\,(\alpha_V) \arrow[r, hook] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

kommutativ machen.

Leider ist $\text{P-Bild}\,\alpha$ im allgemeinen keine Garbe (siehe Übungen). Hier behelfen wir uns, indem wir zur Garbifizierung übergehen.

Definition 5.17 Es sei $\mathrm{Bild}\,\alpha = (\text{P-Bild}\,\alpha)^+$ die Garbe, die zur Prägarbe $\text{P-Bild}\,\alpha$ assoziiert ist.

Mit φ : P-Bild $\alpha \to$ Bild α bezeichnen wir die kanonische Abbildung aus Lemma 5.11 ii). Wir haben einen natürlichen Prägarbenmorphismus j : P-Bild $\alpha \to \mathcal{G}$, der auf jedem $U \subset T$ offen durch die Inklusion j_U : (P-Bild $\alpha)(U) =$ Bild $\alpha_U \subset \mathcal{G}(U)$ gegeben ist. Nach Lemma 5.11 iii) existiert genau ein Garbenmorphismus i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \text{P-Bild}\,\alpha \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{G} \\ & \text{Bild}\,\alpha \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Lemma 5.18 i) Für alle $x \in T$ induziert die Halmabbildung i_x : (Bild $\alpha)_x \to \mathcal{G}_x$ einen Isomorphismus (Bild $\alpha)_x \xrightarrow{\sim}$ Bild(α_x).

ii) Der Garbenmorphismus i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$ ist injektiv.

Beweis : In den Übungen. □

Definition 5.19 Ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ heißt **surjektiv**, wenn für alle $x \in T$ die Halmabbildung $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ surjektiv ist.

Nach Proposition 5.13 ii) gilt: Ist $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Garbenmorphismus und $t \in \mathcal{G}(U)$, so gibt es eine offene Überdeckung $U = \bigcup_i U_i$ und $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit

$$\alpha_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \quad \text{für alle } i.$$

Lemma 5.20 Ein Garbenmorphismus $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist genau dann surjektiv, wenn i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$ ein Isomorphismus ist.

Beweis : Ist α surjektiv, so sind definitionsgemäß alle α_x surjektiv. Nach Lemma 5.18 gilt also (Bild $\alpha)_x \cong$ Bild $\alpha_x = \mathcal{G}_x$ für alle $x \in T$. Der injektive Garbenmorphismus i : Bild $\alpha \to \mathcal{G}$ ist also ein Isomorphismus in allen Halmen. Nach Proposition 5.13 iii)

ist er ein Isomorphismus.
Falls umgekehrt $i : \text{Bild}\,\alpha \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ gilt, so folgt aus Lemma 5.18 für jedes $x \in T$

$$\text{Bild}\,(\alpha_x) = \mathcal{G}_x,$$

d.h. alle α_x sind surjektiv. Daher ist α definitionsgemäß surjektiv. □

Ähnlich wie das Bild definieren wir nun Quotienten von Garben.

Definition 5.21 Es sei $\mathcal{F}$ eine Untergarbe von $\mathcal{G}$.

i) Wir setzen für alle $U \subset T$ offen

$$(\mathrm{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U).$$

Das definiert eine Prägarbe auf T.

ii) Es sei $\mathcal{G}/\mathcal{F} = (\mathrm{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})^+$ die Garbifizierung. $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ heißt **Quotientengarbe** von $\mathcal{G}$ nach $\mathcal{F}$.

Die Quotientenabbildungen $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ induzieren einen Prägarbenmorphismus $q : \mathcal{G} \to \mathrm{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F}$. Diesen können wir mit dem kanonischen Morphismus $\varphi : \mathrm{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F} \to \mathcal{G}/\mathcal{F}$ verknüpfen und erhalten einen Morphismus $p = \varphi \circ q : \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F}$.

Lemma 5.22 i) Für alle $x \in T$ ist $p_x : \mathcal{G}_x \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ surjektiv mit $\text{Kern}\, p_x = \mathcal{F}_x$. Also ist $\mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x \simeq (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$.

ii) Die Sequenz $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}/\mathcal{F} \to 0$ ist exakt.

Beweis :

i) Da $\varphi_x : (\mathrm{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})_x \to (\mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ nach Lemma 5.11 iv) ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass $q_x : \mathcal{G}_x \to (\mathrm{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})_x$ surjektiv mit Kern $\mathcal{F}_x$ ist. Sei $b \in (\mathrm{P} - \mathcal{G}/\mathcal{F})_x$. Dann gibt es ein $s \in \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ für geeignetes $U \subset T$ offen mit $s_x = b$. Wir wählen ein $t \in \mathcal{G}(U)$ mit $q_U(t) = s$. Dann gilt $q_x(t_x) = (q_U(t))_x = s_x = b$. Also ist q_x surjektiv. Ist $a \in \mathcal{F}_x$, so gilt offenbar $q_x(a) = 0$. Ist umgekehrt $a \in \text{Kern}\, q_x \subset \mathcal{G}_x$, so existiert ein $s \in \mathcal{G}(U)$ mit $s_x = a$. Es gilt $q(s)_x = 0$, also existiert nach Lemma 5.7 iii) eine offene Umgebung V um x mit $q(s)|_V = 0$. Daher ist $s|_V \in \mathcal{F}(V)$, woraus $a = s_x \in \mathcal{F}_x$ folgt. Also gilt $\text{Kern}\, q_x = \mathcal{F}_x$.

ii) Klar. (Hoffentlich)

□

Wir wollen nun zum Abschluss dieses Kapitels Garben auf verschiedenen topologischen Räumen vergleichen.

Definition 5.23 Es sei $f : S \to T$ eine stetige Abbildung topologischer Räume.

i) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf S, so definieren wir für jede offene Teilmenge $U \subset T$

$$(f_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)).$$

Zusammen mit den von $\mathcal{F}$ induzierten Restriktionsabbildungen ist $f_*\mathcal{F}$ eine Garbe auf T. Sie heißt **direktes Bild von** $\mathcal{F}$.

ii) Es sei $\mathcal{G}$ eine Garbe auf T. Dann ist für jedes $U \subset S$ offen die Familie von abelschen Gruppen $\mathcal{G}(V)$, wobei V alle offenen Teilmengen von T mit $f(U) \subset V$ durchläuft, ein gerichtetes System abelscher Gruppen, wenn wir $V \leqq W \Leftrightarrow W \subset V$ setzen.
Es sei $(\mathrm{P} - f^{-1}\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{f(U) \subset V \text{ offen}} \mathcal{G}(V)$. Das definiert eine Prägarbe $\mathrm{P} - f^{-1}\mathcal{G}$ auf S. Die assoziierte Garbe $(\mathrm{P} - f^{-1}\mathcal{G})^+$ bezeichnen wir mit $f^{-1}\mathcal{G}$. Sie heißt das **Urbild von** $\mathcal{G}$.

6 Schemata

Wir wollen jetzt für jeden Ring A den topologischen Raum $\operatorname{Spec} A$ mit einer Garbe ausstatten. Dazu benötigen wir den Begriff der Lokalisierung.

Definition 6.1 Sei A ein Ring (wie immer kommutativ mit 1) und $S \subset A$ eine multiplikative Teilmenge, d.h. es gilt $1 \in S$ und für $s, t \in S$ ist auch $st \in S$. Die **Lokalisierung** $S^{-1}A$ von A nach S ist dann definiert als der Quotient von $A \times S$ nach folgender Äquivalenzrelation

$$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \text{ es gibt ein } u \in S \text{ mit } (at - bs)u = 0.$$

Hier müssen wir natürlich nachprüfen, dass die so definierte Relation wirklich eine Äquivalenzrelation ist. Reflexivität und Symmetrie sieht man sofort.

Um die Transitivität zu zeigen, seien $(a,s) \sim (b,t)$ und $(b,t) \sim (c,w)$. Dann gibt es $u,v \in S$ mit $(at-bs)u = 0$ und $(bw-ct)v = 0$. Also ist auch $(aw-cs)tuv = (at-bs)uvw + (bw-ct)vus = 0$. Da S multiplikativ ist, liegt tuv in S, also folgt $(a,s) \sim (c,w)$.

$S^{-1}A$ ist also definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen von $\sim$ in $A \times S$. Wir schreiben $a/s = \{(b,t) : (b,t) \sim (a,s)\} \in S^{-1}A$ für die Äquivalenzklasse von (a,s).

Wir definieren

$$\begin{aligned} a/s + b/t &= (at+bs)/st \quad \text{und} \\ a/s \cdot b/t &= ab/st. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $S^{-1}A$ wohldefiniert, d.h. unabhänging von der Wahl des Vertreters der Äquivalenzklasse sind. Zusammen mit diesen Verknüpfungen wird $S^{-1}A$ zu einem kommutativen Ring. (Übungsaufgabe).

Die Abbildung $j : A \to S^{-1}A$, gegeben durch $j(a) = a/1$ ist ein Ringhomomorphismus. Im allgemeinen ist j weder injektiv noch surjektiv. Für jedes $s \in S$ existiert in $S^{-1}A$ das Inverse $1/s$ von $j(s)$, d.h. es gilt $j(s) \in (S^{-1}A)^{\times}$.
Beispiel:

i) Ist $0 \in S$, so gibt es nur eine Äquivalenzklasse und $S^{-1}A = \{0\}$.

ii) Ist A ein Integritätsring und $S = A \setminus \{0\}$, so gilt $(a,s) \sim (b,t) \Leftrightarrow at - bs = 0$. In diesem Fall ist $S^{-1}A = \operatorname{Quot} A$ ein Körper, der sogenannte **Quotientenkörper** von A, und $j : A \to \operatorname{Quot} A$ ist injektiv. Für $A = \mathbb{Z}$ und $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist also $S^{-1}A = \mathbb{Q}$.

Die Lokalisierung $S^{-1}A$ von A nach S hat folgende universelle Eigenschaft:

Lemma 6.2 Es sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so dass $\varphi(s)$ für alle $s \in S$ eine Einheit in B ist. Dann existiert genau ein Ringhomomorphismus $\psi : S^{-1}A \to B$, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "j"'] & B \\ & S^{-1}A \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Beweis : Wir setzen $\psi(a/s) = \varphi(a)\varphi(s)^{-1}$. Ist $(a, s) \sim (b, t)$, so folgt $(at - bs)u = 0$ für ein $u \in S$. Also gilt $(\varphi(a)\varphi(t) - \varphi(b)\varphi(s))\varphi(u) = 0$. Da $\varphi(s), \varphi(t)$ und $\varphi(u)$ in $B^\times$ sind, folgt $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} = \varphi(b)\varphi(t)^{-1}$. Also ist ψ wohldefiniert, d.h. unabhänging vom gewählten Vertreter der Äquivalenzklasse. Man rechnet leicht nach, dass ψ ein Ringhomomorphismus ist und $\varphi = \psi \circ j$ erfüllt.
Ist $\psi' : S^{-1}A \to B$ ein weiterer Ringhomomorphismus mit $\varphi = \psi' \circ j$, so folgt $\psi'(a/1) = \psi'(j(a)) = \varphi(a) = \psi(j(a)) = \psi(a/1)$ für alle $a \in A$. Also gilt $\psi'(a/s) = \psi'(a/1)\psi'(1/s) = \psi'(a/1)\psi'(s/1)^{-1} = \psi(a/1)\psi(s/1)^{-1} = \psi(a/s)$. □

Uns interessieren vor allem die folgenden Beispiele für Lokalisierungen:

Beispiel:

i) Für jedes $f \in A$ ist $S = \{1, f, f^2, ...\}$ eine multiplikative Teilmenge von A. Wir schreiben $A_f = S^{-1}A$ und nennen A_f die **Lokalisierung von** A **nach** f.

   Für $A = \mathbb{Z}$ und $f = 3$ ist etwa $\mathbb{Z}_3$ die Menge aller rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und b eine Dreierpotenz.

ii) Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, so ist $S = A \setminus \mathfrak{p}$ eine multiplikative Teilmenge von A. Wir schreiben $A_\mathfrak{p} = S^{-1}A$ und nennen $A_\mathfrak{p}$ die **Lokalisierung von** A **nach** $\mathfrak{p}$.

Lemma 6.3 Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in A, so ist $\mathfrak{m} = \{a/s : a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus \mathfrak{p}\}$ das einzige maximale Ideal in $A_\mathfrak{p}$.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Ein Ring, der nur ein maximales Ideal enthält, heißt **lokaler Ring**. Ist A ein lokaler Ring und $\mathfrak{m} \subset A$ das einzige maximale Ideal, so ist jedes Element in $A \setminus \mathfrak{m}$ eine Einheit.

Es sei A ein Ring und $X = \mathrm{Spec}\, A$. Wir wollen nun eine Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X definieren, so dass $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ für alle $f \in A$ gilt. Nach §4 bilden die offenen Mengen der Form $D(f)$ eine Basis der Topologie, also läßt sich jede offene Teilmenge $U \subset X$ von ihnen überdecken. Es gilt $D(g) \subset D(f)$ genau dann, wenn $V((f)) \subset V((g))$, also nach Satz 4.7 genau dann, wenn $g \in \sqrt{f}$ ist, d.h. wenn $g^n = bf$ für ein $b \in A$ und ein $n \geqq 0$ gilt. Insbesondere folgt $D(f) = D(g)$ genau dann, wenn $\sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$ ist.

Für $D(g) \subset D(f)$ definieren wir nun eine Restriktionsabbildung wie folgt:

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{res}_{D(f)D(g)}: & A_f & \to & A_g \\ & a/f^k = ab^k/(bf)^k & \mapsto & ab^k/g^{nk}. \end{array}$$

Ist $D(f) = D(g)$, so ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Wir wollen jetzt die Garbenaxiome für die offenen Basismengen $D(f)$ nachprüfen. Zunächst macht man sich leicht klar, dass für $D(h) \subset D(g) \subset D(f)$ auch $\mathrm{res}_{D(f)D(h)} = \mathrm{res}_{D(g)D(h)} \circ \mathrm{res}_{D(f)D(g)}$ gilt. Außerdem haben wir folgendes Lemma.

Proposition 6.4 Es sei $D(f) = \bigcup\limits_{i \in I} D(f_i)$ für Elemente f, f_i in A.

i) Ist $s \in A_f$ gegeben mit $\mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} s = 0$ für alle $i \in I$, so folgt $s = 0$.

ii) Ist $s_i \in A_{f_i}$ für alle $i \in I$ gegeben mit $\mathrm{res}_{D(f_i)D(f_i f_j)} s_i = \mathrm{res}_{D(f_j)D(f_i f_j)} s_j$ für alle $i, j \in I$, so gibt es ein $s \in A_f$ mit $\mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} s = s_i$ für alle $i \in I$.

Beweis : Nach den Übungen ist $D(f_i f_j) = D(f_i) \cap D(f_j)$, daher ist ii) analog zum zweiten Garbenaxiom.

Es sei $D(f) = \bigcup\limits_{i \in I} D(f_i)$ gegeben. Aus $D(f_i) \subset D(f)$ folgt $f_i^{n_i} = b_i f$ für geeignetes $n_i \geqq 0$ und $b_i \in A$. Da $D(f_i) = D(f_i^{n_i})$ und $A_{f_i} \simeq A_{f_i{}^{n_i}}$ gilt, können wir f_i durch $f_i^{n_i}$ ersetzen und $f_i = b_i f$ annehmen.

Aus $D(f) = \bigcup\limits_{i \in I} D(f_i)$ folgt $V((f)) = \bigcap\limits_{i \in I} V((f_i)) \overset{4.2\,iv)}{=} V(\sum\limits_{i \in I}(f_i))$, also ist $f \in \sqrt{\sum\limits_{i \in I}(f_i)}$ nach Satz 4.7. Es gibt also ein $n \geqq 0$ und $i_1, \dots i_r \in I$ sowie $c_1, \dots, c_r \in A$ mit $f^n = c_1 f_{i_1} + \dots + c_r f_{i_r}$.

i) Sei $s = a/f^k \in A_f$ gegeben mit $0 = \mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} s = ab_i^k/f_i^k$ in A_{f_i}. Nach Definition der Lokalisierung existiert ein $n_i \geqq 0$ mit $ab_i^k f_i^{n_i} = 0$ für alle $i \in I$. Wir wählen $N \geqq r(k + \max\{n_1, \dots, n_r\})$. Dann ist jeder Summand in $f^{nN} = (c_1 f_{i_1} + \dots + c_r f_{i_r})^N$ ein Vielfaches von $(c_j f_{i_j})^{k+n_j} = c_j^{k+n_j} f_{i_j}^k f_{i_j}^{n_j} = c_j^{k+n_j} b_{i_j}^k f^k f_{i_j}^{n_j}$ für ein j. Daher ist $af^{nN} = 0$, woraus $s = a/f^k = 0$ in A_f folgt.

ii) Aus $f \in \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{r}(f_{i_j})}$ können wir wie oben schließen $D(f) = D(f_{i_1}) \cup \dots \cup D(f_{i_r})$. Also hat $(D(f_i))_{i \in I}$ eine endliche Teilüberdeckung. Daher können wir mit der im i) gezeigten Eindeutigkeit annehmen, dass I endlich ist. Sei also $D(f) = \bigcup_{i=1}^{r} D(f_i)$ und $f_i = b_i f$ für $b_i \in A$. Seien $s_i \in A_{f_i}$ gegeben mit $\mathrm{res}_{D(f_i)D(f_i f_j)} s_i = \mathrm{res}_{D(f_j)D(f_i f_j)} s_j$ für $i, j \in \{1, ..., r\}$. Da nur endlich viele s_i auftreten, gibt es ein $k \geqq 0$, so dass $s_i = a_i / f_i^k$ für geeignete $a_i \in A$ gilt. Aus $a_i f_j^k / (f_i f_j)^k = a_j f_i^k / (f_i f_j)^k$ in $A_{(f_i f_j)}$ folgt, dass es ein $m_{i,j} \geqq 0$ gibt mit $(a_i f_j^k - a_j f_i^k)(f_i f_j)^{m_{ij}} = 0$.

Da nur endlich viele Indizes auftauchen, gibt es also ein $m \geqq 0$ mit

$$(a_i f_j^k - a_j f_i^k)(f_i f_j)^m = 0 \tag{1}$$

für alle $i, j \in \{1, ..., r\}$.
Da $D(f_i) = D(f_i^{k+m})$ ist, gilt $D(f) = \bigcup_{i=1}^{r} D(f_i^{k+m})$. Dies impliziert wie oben

$$f^n = \sum_{j=1}^{r} c_j f_j^{k+m}$$

für geeignete $n \geqq 1$ und $c_1, ..., c_r \in A$.

Wir setzen $a = \sum_{j=1}^{r} c_j f_j^m a_j \in A$ und behaupten, dass für $s = a/f^n$ gilt: $\mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} s = s_i$. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} b_i^n f_i^{k+m} a &= b_i^n (\sum_{j=1}^{r} c_j f_j^m a_j f_i^{k+m}) \\ &\overset{(1)}{=} b_i^n (\sum_{j=1}^{r} c_j a_i f_j^{k+m} f_i^m) \\ &= b_i^n a_i f_i^m (\sum_{j=1}^{r} c_j f_j^{k+m}) \\ &= b_i^n a_i f_i^m f^n \\ &= a_i f_i^{n+m}, \end{aligned}$$

also folgt $(a b_i^n f_i^k - a_i f_i^n) f_i^m = 0$. Daher ist $a b_i^n / f_i^n = a_i / f_i^k$ in A_{f_i}.
Somit ist tatsächlich $\mathrm{res}_{D(f)D(f_i)} a/f^n = a_i / f_i^k = s_i$ für alle $i = 1, ..., r$.

□

Wir definieren nun für jedes $f \in A$

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f.$$

Für eine beliebige offene Teilmenge $U \subset X$ wählen wir eine offene Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ und setzen

$$\mathcal{O}_X(U) = \{(s_i)_{i\in I} : s_i \in A_{f_i} \text{ mit } \mathrm{res}_{D(f_i)D(f_if_j)} s_i = \mathrm{res}_{D(f_j)D(f_if_j)} s_j \text{ für alle } i, j \in I\}.$$

Diese Definition hängt von der gewählten Überdeckung ab. Wählen wir eine andere Überdeckung $U = \bigcup_{j\in J} D(g_j)$ von U und setzen

$$\mathcal{O}'_X(U) = \{(t_j)_{j\in J} : t_j \in A_{g_j} \text{ mit } \mathrm{res}_{D(g_i)D(g_ig_j)} t_i = \mathrm{res}_{D(g_j)D(g_ig_j)} t_j \text{ für alle } i, j \in J\},$$

so können wir $\mathcal{O}_X(U)$ und $\mathcal{O}'_X(U)$ auf folgende kanonische Weise miteinander identifizieren: Ist $(s_i)_{i\in I} \in \mathcal{O}_X(U)$, so gibt es für jedes $j \in J$ nach Proposition 6.4 ein eindeutig bestimmtes Element $t_j \in A_{g_j}$ mit $\mathrm{res}_{D(g_j)D(f_ig_j)} t_j = \mathrm{res}_{D(f_i)D(f_ig_j)} s_i$ für alle $i \in I$. Das Tupel $(t_j)_{j\in J}$ liegt in $\mathcal{O}'_X(U)$ und ist das gesuchte Bild von $(s_i)_{i\in I}$.
Ist $V \subset U$ offen und $V = \bigcup_{j\in J} D(g_j)$ sowie $U = \bigcup_{i\in I} D(f_i)$, so gibt es für jedes $(s_i)_{i\in I} \in \mathcal{O}_X(U)$ und jedes $j \in J$ nach Proposition 6.4 genau ein Element $t_j \in A_{g_j}$ mit

$$\mathrm{res}_{D(g_j)D(f_ig_j)} t_j = \mathrm{res}_{D(f_i)D(f_ig_j)} s_i$$

für alle $i \in I$. Wir setzen

$$\mathrm{res}_{UV}((s_i)_{i\in I}) = (t_j)_{j\in J}.$$

Eine **Garbe von Ringen** auf einem topologischen Raum T ist eine Garbe $\mathcal{F}$ abelscher Gruppen, so dass alle $\mathcal{F}(U)$ Ringe und alle Restriktionsabbildungen Ringhomomorphismen sind.

Proposition 6.5 $\mathcal{O}_X$ ist eine Garbe von Ringen auf $X = \operatorname{Spec} A$.

Beweis : Da $\mathcal{O}_X(D_f) = A_f$ für alle $f \in A$ Ringe sind und die Restriktionsabbildungen $\mathcal{O}_X(D_f) \to \mathcal{O}_X(D_g)$ Ringhomomorphismen sind, folgt leicht, dass alle $\mathcal{O}_X(U)$ Ringe und alle Restriktionsabbildungen res_{UV} Ringhomomorphismen sind. Man sieht ferner sofort, dass $\mathcal{O}_X(U)$ eine Prägarbe ist. Um das erste Garbenaxiom zu zeigen, sei $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ eine offene Überdeckung von U und $s \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $s|_{U_j} = 0$ für alle $j \in J$. Dann ist $s = (s_i)_{i\in I}$ mit $s_i \in A_{f_i}$ für die gewählte Überdeckung $U = \bigcup_i D(f_i)$. Sind $U_j = \bigcup_k D(g_{j_k})$ die gewählten Überdeckungen, so folgt $0 = s|_{D(g_{j_k})\cap D(f_i)} = s_i|_{D(g_{j_k}f_i)}$, woraus mit Proposition 6.4 $s_i = 0$ folgt. Also ist $s = 0$. Um das zweite Garbenaxiom zu zeigen, sei $s_j \in \mathcal{O}_X(U_j)$ gegeben mit

$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. Wieder seien $U = \bigcup\limits_i D(f_i)$ und $U_j = \bigcup\limits_k D(g_{j_k})$ die gewählten Überdeckungen. Dann gibt es nach Proposition 6.4 Elemente $t_i \in A_{f_i}$ mit $t_i|_{D(f_i)\cap D(g_{j_k})} = s_j|_{D(f_i)\cap D(g_{j_k})}$ für alle j, k. Also ist $s = (t_i)_{i \in I}$ ein Element in $\mathcal{O}_X(U)$ mit $s|_{U_j} = s_j$ für alle j. □

Proposition 6.6 Für jedes $\mathfrak{p} \in X = \operatorname{Spec} A$ ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \simeq A_\mathfrak{p}$, wobei $A_\mathfrak{p}$ die Lokalisierung von A nach $\mathfrak{p}$ ist.

Beweis : Es ist $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \varinjlim\limits_{\mathfrak{p} \in U} \mathcal{O}_X(U) = \varinjlim\limits_{\mathfrak{p} \in D(f)} \mathcal{O}_X(D(f)) = \varinjlim\limits_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f$, denn die Mengen der Form $D(f)$ bilden nach §4 eine Basis der Zariski-Topologie. Ist $\mathfrak{p} \in D(f)$, so gilt $f \notin \mathfrak{p}$, also haben wir mit Lemma 6.2 eine natürliche Abbildung

$$\begin{array}{rcll} A_f & \to & A_\mathfrak{p}, & \text{gegeben durch} \\ a/f^k & \mapsto & a/f^k. & \end{array}$$

Ist $\mathfrak{p} \in D(g) \subset D(f)$, so ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r] \arrow[d, "\text{res}"'] & A_\mathfrak{p} \\ A_g \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

kommutativ. Aufgrund der universellen Eigenschaft des direkten Limes existiert also ein Homomorphismus

$$\varphi : \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f \to A_\mathfrak{p},$$

so dass für alle $f \in A$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_f \arrow[r] \arrow[d] & A_\mathfrak{p} \\ \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ ist.

Jedes Element in $A_\mathfrak{p}$ ist von der Form a/h mit $h \notin \mathfrak{p}$, also ist a/h im Bild von $A_h \to A_\mathfrak{p}$. Daher ist φ surjektiv. Ist $x \in \varinjlim\limits_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f$ ein Element mit $\varphi(x) = 0$, so gibt es ein h mit

$h \notin \mathfrak{p}$, so dass x das Bild von $a/h \in A_h$ unter der natürlichen Abbildung $A_h \to \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(f)} A_f$ ist. Dann ist $a/h = \varphi(x) = 0$ in $A_\mathfrak{p}$, also existiert ein $g \notin \mathfrak{p}$ mit $ag = 0$. Dann ist aber $D(gh) \subset D(h)$ und $\mathrm{res}(a/h) = ag/gh = 0$ in A_{gh}. Also ist $x = 0$, d.h. φ ist auch injektiv. □

Beispiele:

1) Es sei $A = k$ ein Körper. Dann ist $X = \operatorname{Spec} k = \{0\}$ als topologischer Raum eine Einpunktmenge. Die Garbe $\mathcal{O}_X$ ist festgelegt durch

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(D(1)) = k.$$

Mit Hilfe der Garbe $\mathcal{O}_X$ bekommt man also die Information zurück, um welchen Körper es sich handelt.

2) Es sei $A = \mathbb{Z}$. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, ist jede abgeschlossene Teilmenge von $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ von der Form $V((f))$ für ein $f \in \mathbb{Z}$. Also ist jede offene Teilmenge U von X von der Form $U = D(f)$. Es gilt definitionsgemäß

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathbb{Z}_f = \{\frac{a}{f^k} : a \in \mathbb{Z}, k \geqq 0\} \subset \mathbb{Q}.$$

Ferner ist $D(g) \subset D(f)$ genau dann, wenn $g^n = bf$ für ein $n \geqq 0$ und ein $b \in \mathbb{Z}$. Also ist jeder Primteiler von f auch ein Primteiler von g und die Restriktionsabbildung $\mathrm{res}_{D(f)D(g)}$ ist die Inklusion $\mathbb{Z}_f \subset \mathbb{Z}_g \subset \mathbb{Q}$. Eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit $b \neq 0$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ liegt genau dann in $\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathbb{Z}_f$, wenn jeder Primteiler von b auch f teilt.

3) Es sei k ein Körper und $A = k[T]$ der Polynomring in einer Variablen über k. Da $k[T]$ ein Hauptidealring ist, ist jede nicht-leere offene Teilmengen $U \subset X = \operatorname{Spec} [T]$ von der Form $U = D(f)$ für ein $f \in k[T]$, $f \neq 0$. Es gilt also

$$\mathcal{O}_X(U) = k[T]_f,$$

wobei $k[T]_f$ die Menge aller Funktionen im rationalen Funktionenkörper $k(T) = \mathrm{Quot}(k[T])$ ist, die sich als g/f^n für ein $g \in k[T]$ und ein $n \geqq 0$ schreiben lassen. Als euklidischer Ring ist $k[T]$ faktoriell. $k[T]_f$ besteht also genau aus den rationalen Funktionen $g/h \in k(T)$, für die $\mathrm{ggT}(g, h) = 1$ ist und für die jeder Primfaktor von h ein Teiler von f ist.
Ist k algebraisch abgeschlossen, so können wir jede rationale Funktion durch Auswerten als Funktion von k nach $k \cup \{\infty\}$ betrachten. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz können wir die Menge der maximalen Ideale in $\operatorname{Spec} k$

mit k identifizieren. Für jedes $h \in k[T]$ ist $h(a) = 0$ genau dann, wenn h im Ideal $(T - a)$ liegt. Also ist für $U = D(f)$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(U) = \quad \{ \quad & g/h \in k[T] : \text{ Die rationale Funktion } g/h : k \to k \cup \{\infty\} \\ & \text{hat keinen Pol in } U \}.\end{aligned}$$

4) Wir betrachten nun noch $A = \mathbb{Z}[T]$. Dieser Ring ist kein Hauptidealring. Für jede Primzahl p ist $(T, p) \subset A$ ein maximales Ideal. In $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$ betrachten wir $U = X \setminus \{(T, p)\} = D(p) \cup D(T)$. Da $\mathbb{Z}[T]$ ein Integritätsring ist, sind wieder alle Restriktionsabbildungen Inklusionen von Teilmengen von Quot $(\mathbb{Z}[T])$. Also ist

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathbb{Z}[T]_p \cap \mathbb{Z}[T]_T \subset \operatorname{Quot}(\mathbb{Z}[T]).$$

Ist $0 \neq f/g \in \mathbb{Z}[T]_p \cap \mathbb{Z}[T]_T$, so gilt $f/g = \frac{h_1}{p^n} = \frac{h_2}{T^m}$ für $n, m \geqq 0$ und $h_1, h_2 \in \mathbb{Z}[T] \setminus \{0\}$. Wir können nach eventuellem Kürzen annehmen, dass T nicht h_2 und p nicht h_1 teilt. Aus dieser Gleichung folgt $T^m h_1 = p^n h_2$, also $n = m = 0$ aufgrund der Annahmen. Somit ist $\mathcal{O}_X(U) = \mathbb{Z}[T] = \mathcal{O}_X(X)$.

Wir schreiben auch $\mathbb{A}_k^n = \operatorname{Spec} k[T_1, ..., T_n]$ und nennen diesen Raum den **„n-dimensionalen affinen Raum über k“**.

Wir wollen nun noch folgende Tatsache festhalten, die in den Beispielen schon klar geworden ist:

Lemma 6.7 Es sei A ein Integritätsring und $K = \operatorname{Quot} A$. Mit $\xi \in X = \operatorname{Spec} A$ bezeichnen wir den Punkt zum Nullideal. Dann ist $\mathcal{O}_{X,\xi} = K$. Für jede offene nichtleere Teilmenge $U \subset X$ gilt $\xi \in U$, und der kanonische Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$$

ist injektiv. Für alle $V \subset U$ offen ist die Restriktionsabbildung

$$\operatorname{res}_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$$

injektiv.

Beweis : Nach Proposition 6.6 gilt $\mathcal{O}_{X,\xi} = A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A) = K$. Ist $U \neq \emptyset$ offen, so gibt es ein $0 \neq f \in A$ mit $D(f) \subset U$. Es folgt

$0 \in D(f) \subset U$. Ferner ist $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f \subset K$. Also ist die Halmabbildung $\mathcal{O}_X(D(f)) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$ injektiv. Für eine beliebige offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$ haben wir eine offene Überdeckung $U = \bigcup\limits_{i \in I} D(f_i)$ gewählt und $\mathcal{O}_X(U) = \{(s_i)_{i\in I} : s_i \in A_{f_i}, \mathrm{res}_{D(f_i)D(f_i f_j)} s_i = \mathrm{res}_{D(f_j)D(f_i f_j)} s_j$ für alle $i, j \in I\}$ definiert. Sei $s = (s_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $s_\xi = 0$. Dann ist $(s_i)_\xi = (\mathrm{res}_{UD(f_i)} s)_\xi = 0$ für alle $i \in I$, woraus $s_i = 0$ folgt. Also ist $s = 0$, d.h. die Halmabbildung

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

ist injektiv.
Daraus folgt, dass auch alle Restriktionsabbildungen injektiv sind. □

Definition 6.8 Ein **geringter Raum** ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$, bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$ auf X. Ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt **lokal geringter Raum**, falls für jedes $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring ist.

Beispiel: Für jeden Ring A ist (Spec A, $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$) ein lokal geringter Raum. Wir bezeichnen ihn meist einfach als Spec A.

Definition 6.9 Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $x \in X$ ein Punkt, so sei $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ das eindeutig bestimmte maximale Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$. Dann ist $\kappa(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ ein Körper. Wir nennen $\kappa(x)$ den **Restklassenkörper** von X in x.

Beispiel: Ist $X = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, so ist $\kappa((0)) = \mathbb{Q}$. Für jede Primzahl p ist $\kappa((p)) = \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{F}_p$, wobei $p\mathbb{Z}_{(p)}$ das von $p = p/1$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}_{(p)}$ bezeichnet. Dieses ist gleich $S^{-1}(p)$ für $S = \mathbb{Z} \setminus (p)$.

Definition 6.10 Ein **Morphismus**

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

geringter Räume besteht aus einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$ und einem Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Ringgarben auf Y.

Sind $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ und $(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ Morphismen geringter Räume, so ist die Verknüpfung $(g, g^\sharp) \circ (f, f^\sharp)$ definiert durch die stetige Abbildung $g \circ f : X \to Z$ und den Garbenmorphismus

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{g^\sharp} g_*\mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_*(f^\sharp)} g_*(f_*\mathcal{O}_X),$$

wobei $(g_* f^\sharp)_V = f^\sharp_{g^{-1}(V)}$ ist.

Ist $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus geringter Räume, so haben wir für jedes $V \subset Y$ offen einen Ringhomomorphismus

$$f^\sharp_V : \mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)).$$

Ist $x \in f^{-1}(V)$, dann induziert dies einen Homomorphismus

$$\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Nach der universellen Eigenschaft des direkten Limes erhalten wir einen Ringhomomorphismus der Halme

$$f_x^H : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}.$$

Definition 6.11 Ein Morphismus

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

geringter Räume heißt **Morphismus lokal geringter Räume**, falls für jedes $x \in X$ die Abbildung

$$f_x^H : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

ein lokaler Homomorphismus ist, d.h. falls gilt $(f_x^H)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{f(x)}$.

Definition 6.12 Ein **Isomorphismus**

$$(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

(lokal) geringter Räume ist ein Morphismus (lokal) geringter Räume, für den ein Morphismus

$$(g, g^\sharp) : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

(lokal) geringter Räume existiert, so dass

$$(f, f^\sharp) \circ (g, g^\sharp) = \mathrm{id}_{(Y, \mathcal{O}_Y)} \quad \text{und}$$
$$(g, g^\sharp) \circ (f, f^\sharp) = \mathrm{id}_{(X, \mathcal{O}_X)}$$

gilt.

Also ist $(f, f^\sharp)$ genau dann ein Isomorphismus, wenn $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus und $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus von Garben ist.

Definition 6.13 i) Ein **affines Schema** ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, der isomorph zu $(\mathrm{Spec}\, A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A})$ für einen kommutativen Ring A ist.

ii) Ein **Schema** ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, so dass es eine offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X gibt, so dass $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ für alle $i \in I$ ein affines Schema ist. Die Garbe $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ ist hier die Einschränkung von $\mathcal{O}_X$ auf U_i (wie in den Übungen besprochen).

iii) Ein Morphismus bzw. Isomorphismus von Schemata ist einfach ein Morphismus bzw. Isomorphismus lokal geringter Räume.

Bisher haben wir als Beispiele für Schemata nur affine Schemata kennengelernt. Wir werden später auch Schemata untersuchen, die nicht affin (sondern „projektiv") sind.

Wir bezeichnen ein Schema oft nur mit dem unterliegenden topologischen Raum und denken uns die Garbe mit. Wir schreiben also X statt $(X, \mathcal{O}_X)$.

Lemma 6.14 Es sei $X = \mathrm{Spec}\, A$ ein affines Schema und $g \in A$. Dann ist die offene Teilmenge $D(g) \subset \mathrm{Spec}\, A$, zusammen mit der Garbe $\mathcal{O}_X|_{D(g)}$ ein affines Schema, das isomorph zu $\mathrm{Spec}\, A_g$ ist.

Beweis : Es sei $Y = \mathrm{Spec}\, A_g$ und $j : A \to A_g$ der kanonische Ringhomomorphismus. Wir betrachten die dadurch induzierte stetige Abbildung $\mathrm{Spec}\, A_g \to \mathrm{Spec}\, A$, gegeben durch $\mathfrak{p} \mapsto j^{-1}(\mathfrak{p})$. Diese Abbidung induziert eine Bijektion (Übungsaufgabe)

$$i : \mathrm{Spec}\, A_g \to D(g).$$

Ist $\mathfrak{a}$ ein Ideal in A_g, so ist $i(V(\mathfrak{a})) = V(j^{-1}(\mathfrak{a})) \cap D(g)$, also bildet i abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen ab. Somit ist i ein Homöomorphismus.

Für jedes $h \in A$ mit $D(h) \subset D(g)$ gilt $h^n = bg$ für ein $b \in A$ und ein $n \geqq 0$. Nach Lemma 4.5 gilt $i^{-1}(D(h)) = D(j(h))$. Mit $(A_g)_{j(h)}$ bezeichnen wir die Lokalisierung von A_g nach $j(h)$. Dieser Ring besteht aus allen Elementen der Form $(1/h^k)\,(a/g^m) = a/h^k g^m$ für $a \in A$ und $k, m \geqq 0$. Man zeigt leicht, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (A_g)_{j(h)} & \to & A_h \\ a/h^k g^m & \mapsto & ab^m/h^{k+nm} \end{array}$$

ein Isomorphismus ist.
Also ist $\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{j(h)} = \mathcal{O}_Y(D(j(h))) = \mathcal{O}_Y(i^{-1}D(h))$. Man rechnet leicht nach, dass für $D(h_2) \subset D(h_1)$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(D(h_1)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{O}_Y(i^{-1}D(h_1)) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ \mathcal{O}_X(D(h_2)) \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{O}_Y(i^{-1}D(h_2)) \end{tikzcd}$$

kommutiert.
Also erhalten wir für jede offene Teilmenge $U \subset D(g)$ einen Isomorphismus

$$i_U^\sharp : \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y(i^{-1}U),$$

der mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist. Daher ist $(i, i^\sharp) : \operatorname{Spec} A_g \to (D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)})$ ein Isomorphismus lokal geringter Räume. Da $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)})$ ein Schema ist (Übungsaufgabe), handelt es sich um einen Isomorphismus von Schemata. □

Jetzt wollen wir für jeden Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ einen Schemamorphismus $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ definieren. Dabei gehen wir ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 6.14. Nach Lemma 4.5 induziert φ eine stetige Abbildung $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ der topologischen Räume. Diese ist definiert als $f(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.

Proposition 6.15 Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ die zugehörige stetige Abbildung. Dann gibt es einen Garbenmorphismus

$$f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B},$$

so dass $(f, f^\sharp) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ ein Morphismus von Schemata ist.
Wir erhalten die Abbidung φ zurück als $\varphi = f^\sharp_{\operatorname{Spec} A} : A = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) = B$.

Beweis : Für jedes $g \in A$ ist $f^{-1}(D(g)) = D(\varphi(g))$ nach Lemma 4.5. Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to B$ induziert auf natürliche Weise einen Homomorphismus

$$\begin{array}{rcl} f^\sharp_{D(g)} : \mathcal{O}_{\text{Spec}\,A}(D(g)) = A_g & \to & B_{\varphi(g)} = \mathcal{O}_{\text{Spec}\,B}(f^{-1}D(g)) = f_*\mathcal{O}_{\text{Spec}\,B}(D(g)) \\ a/g^n & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(g)^n. \end{array}$$

Diese Homomorphismen sind verträglich mit den Restriktionsabbildungen für $D(g_1) \subset D(g_2)$, wie man leicht nachrechnet.
Also induzieren sie für jedes $U \subset \text{Spec}\,A$ offen einen Homomorphismus

$$f^\sharp_U : \mathcal{O}_{\text{Spec}\,A}(U) \to \mathcal{O}_{\text{Spec}\,B}(f^{-1}U) = f_*\mathcal{O}_{\text{Spec}\,A}(U),$$

der mit den Restriktionsabbildungen verträglich ist.
Für jedes $\mathfrak{p} \in \text{Spec}\,B$ ist die Halmabbildung

$$\begin{array}{rcl} f^H_{\mathfrak{p}} : \mathcal{O}_{\text{Spec}\,A,\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} & \to & B_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{\text{Spec}\,B,\mathfrak{p}} \quad \text{gegeben durch} \\ a/f & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(f), \end{array}$$

denn diese wird im direkten Limes durch die Abbildung $f^\sharp_{D(g)}$ für $\mathfrak{p} \in D(g)$ induziert. Nun ist $f^{H-1}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})}$, also ist $f^H_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Homomorphismus. Also ist $(f, f^\sharp) : \text{Spec}\,B \to \text{Spec}\,A$ ein Morphismus lokal geringter Räume, d.h. ein Schemamorphismus. Da $\text{Spec}\,A = D(1)$ ist, folgt in der Tat

$$f^\sharp_{\text{Spec}\,A} = \varphi : A \to B.$$

$\square$

Definition 6.16 Ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ heißt **offene Immersion**, falls es eine offene Teilmenge $U \subset Y$ und einen Isomorphismus

$$\tilde{f} : (X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (U, \mathcal{O}_Y|_U)$$

gibt, so dass f die Verknüpfung von $\tilde{f}$ mit der Inklusion $i : (U, \mathcal{O}_Y|_U) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist.

Beispiel: Ist $Y = \text{Spec}\,A$ für einen Ring A und $g \in A$, so induziert nach Lemma 6.14 der kanonische Ringhomomorphismus $j : A \to A_g$ einen Schemamorphismus $f : \text{Spec}\,A_g \to \text{Spec}\,A$, der eine offene Immersion ist. Das offene Unterschema von $\text{Spec}\,A$, welches isomorph zu $\text{Spec}\,A_g$ ist, ist hier $(D(g), \mathcal{O}_{\text{Spec}\,A}|_{D(g)})$.

Definition 6.17 Ein Morphismus von Schemata $f : X \to Y$ heißt **abgeschlossene Immersion**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset Y$, so dass f einen Homöomorphismus $f : X \to Z$ vermittelt.

ii) Der Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ ist surjektiv.

Das Paradebeispiel für abgeschlossene Immersionen wird in folgenden Lemma diskutiert.

Lemma 6.18 Es sei A ein Ring und $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal. Der Ringhomomorphismus $\varphi : A \to A/\mathfrak{a}$ induziert nach Proposition 6.15 einen Schemamorphismus $f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$. Dieser ist eine abgeschlossene Immersion.

Beweis : Die stetige Abbildung $f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$ ist gegeben durch $\mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$. Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $A/\mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{a} \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, also $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a}) \subset \operatorname{Spec} A$. Umgekehrt gibt es für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ in A mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $A/\mathfrak{a}$ (nämlich $\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{q})$) mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Also induziert f eine bijektive stetige Abbildung

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to V(\mathfrak{a}).$$

Man rechnet leicht nach, dass für jedes Ideal $\mathfrak{b} \subset A/\mathfrak{a}$ die abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{b})$ in $\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ unter f auf $V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ abgebildet wird. Also ist diese Abbildung ein Homöomorphismus.

Jetzt betrachten wir den Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}}$. Für jede offene Menge $U \subset \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ ist $f^{-1}(U) = \emptyset$, also ist $f^\sharp_U$ surjektiv. Somit ist auch für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \setminus V(\mathfrak{a})$ die Halmabbildung $f^H_\mathfrak{q}$ surjektiv.

Ist $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a})$, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $A/\mathfrak{a}$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Die Halmabbildung $f^H_\mathfrak{q}$ ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} f^H_\mathfrak{q} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, \varphi^{-1}(\mathfrak{p})} = A_{\varphi^{-1}(\mathfrak{p})} &\to (A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}, \mathfrak{p}} \\ a/f &\mapsto \varphi(a)/\varphi(f). \end{aligned}$$

Da φ surjektiv ist, ist auch diese Halmabbildung surjektiv.

Also ist der Garbenmorphismus $f^\sharp$ surjektiv auf den Halmen und damit definitionsgemäß surjektiv. Daher ist $f : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$ eine abgeschlossene Immersion. □

Definition 6.19 Es sei X ein Schema.

i) Ein **offenes Unterschema** von X ist ein Schema der Form $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ für eine offene Teilmenge $U \subset X$.

ii) Ein **abgeschlossenes Unterschema** von X ist ein Schema der Form $(Z, \mathcal{O}_Z)$ für eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subset X$ zusammen mit einer abgeschlossenen Immersion
$$(f, f^\sharp) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X),$$
wobei $f : Z \to X$ die Inklusionsabbildung ist.

Die Strukturgarbe eines offenen Unterschemas von X ist also eindeutig bestimmt als Einschränkung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$.
Auf einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \subset X$ kann es aber mehrere Strukturgarben $\mathcal{O}_Z$ geben, die Z zu einem abgeschlossenen Unterschema machen.

Beispiel: Die abgeschlossene Teilmenge $\{3\} \subset \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ wird zusammen mit der konstanten Garbe $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und zusammen mit der konstanten Garbe $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ein abgeschlossenes Unterschema von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Im ersten Fall ist das abgeschlossene Unterschema isomorph zu $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_3$, im zweiten Fall zu $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.

Definition 6.20 Es sei S ein Schema. Ein **S-Schema** (oder ein Schema über S) ist ein Schema X zusammen mit einem Morphismus $\pi : X \to S$. Der Morphismus π heißt **Strukturmorphismus** und S wird auch **Basisschema** genannt. Ein Morphismus von $S-$Schemata von $\pi : X \to S$ nach $\sigma : Y \to S$ ist ein Schemamorphismus $f : X \to Y$, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \arrow[dl, "\sigma"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.

Sind X, Y Schemata, so bezeichnen wir mit $\operatorname{Mor}(X, Y)$ die Menge aller Schemamorphismen von X nach Y. Sind X und Y $S-$Schemata, so bezeichnen wir mit $\operatorname{Mor}_S(X, Y)$ die Menge aller $S-$Schemamorphismen von X nach Y.

Für zwei Ringe A, B setzen wir
$$\operatorname{Hom}_{\text{Ringe}}(A, B) = \{\varphi : A \to B \text{ Ringhomomorphismus}\}.$$

Wir haben in Proposition 6.15 jedem $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ringe}}(A, B)$ ein Element $(f, f^\sharp)$ in $\mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A)$ zugeordnet. Umgekehrt können wir für beliebige Schemata X und Y jedem Schemamorphismus $f : X \to Y$ einen Ringhomomorphismus $f_Y^\sharp : \mathcal{O}_Y(Y) \to (f_*\mathcal{O}_X)(X) = \mathcal{O}_X(f^{-1}Y) = \mathcal{O}_X(X)$ zuordnen.

Lemma 6.21 Sind $X = \mathrm{Spec}\, B$ und $Y = \mathrm{Spec}\, A$ affine Schemata, so sind diese beiden Konstruktionen invers zueinander. Also ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ringe}}(A, B) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A)$$

aus Proposition 6.15 bijektiv.

Beweis : Ist $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ringe}}(A, B)$ gegeben, so hat der Morphismus $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ aus Proposition 6.15 die Eigenschaft $f_Y^\sharp = \varphi$. Ist $f : X \to Y$ gegeben, so müssen wir noch zeigen, dass wir f erhalten, indem wir die Konstruktion aus Proposition 6.15 auf den Ringhomomorphismus $f_Y^\sharp : A \to B$ anwenden. Es sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, B$ und $\mathfrak{q} = f(\mathfrak{p}) \in \mathrm{Spec}\, A$. Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(Y) = A \arrow[r, "f_Y^\sharp"] \arrow[d] & B = \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{Y,f(\mathfrak{p})} = A_\mathfrak{q} \arrow[r, "f_\mathfrak{p}^H"'] & B_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Ist $a \in A \setminus \mathfrak{q}$, so ist das Bild von a in $A_\mathfrak{q}$ invertierbar, wird also unter $f_\mathfrak{p}^H$ auf ein invertierbares Element abgebildet. Da dies von $f_Y^\sharp(a) \in B$ induziert wird, folgt $f_Y^H(a) \notin \mathfrak{p}$. Somit folgt

$$\begin{aligned} f_Y^\sharp(A \setminus \mathfrak{q}) &\subset B \setminus \mathfrak{p}, \quad \text{also auch} \\ (f_Y^\sharp)^{-1}(\mathfrak{p}) &\subset \mathfrak{q}. \end{aligned}$$

Nun ist $f_\mathfrak{p}^H$ lokal, d.h. das Urbild des maximalen Ideals $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$ in $B_\mathfrak{p}$ ist das maximale Ideal $\mathfrak{q}A_\mathfrak{q}$, also folgt für alle $a \in \mathfrak{q}$ nach dem obigen Diagramm $f_Y^\sharp(a)/1 = f_\mathfrak{p}^H(a/1) \in \mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$, woraus $f_Y^\sharp(a) \in \mathfrak{p}$ folgt. Somit ist $(f_Y^\sharp)^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$.

Also ist die stetige Abbildung $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ tatsächlich die durch den Ringhomomorphismus $f_Y^\sharp : A \to B$ induzierte. Ist $g \in A$, so gilt also $f^{-1}(D(g)) = D(f_Y^\sharp(g))$

nach Lemma 4.5. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(Y) = A \arrow[r, "f^\sharp_Y"] \arrow[d] & B = (f_*\mathcal{O}_X)(Y) \arrow[d] \\
\mathcal{O}(D(g)) = A_g \arrow[r, "f^\sharp_{D(g)}"'] & B_{f^\sharp_Y(g)} = (f_*\mathcal{O}_X)D(g)
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da $f^\sharp$ ein Garbenmorphismus ist. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung aus Lemma 6.2 stimmt also $f^\sharp_{D(g)}$ mit der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} A_g & \to & B_{f^\sharp_Y(g)} \\ a/g^n & \mapsto & f^\sharp_Y(a)/f^\sharp_Y(g)^n \end{array}$$

überein, die dasselbe Diagramm kommutativ macht. Nach Proposition 6.15 ist also der durch $f^\sharp_Y$ induzierte Garbenmorphismus $\mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ auf allen offenen Mengen der Form $D(g)$ gerade die Abbildung $f^\sharp$. Da zwei Garbenschnitte gleich sind, wenn sie auf einer offenen Überdeckung gleich sind, stimmen die beiden Garbenmorphismen überall überein. $\square$

Proposition 6.22 Es sei $Y = \operatorname{Spec} B$ ein affines Schema und X ein beliebiges Schema. Dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Mor}(X, Y) & \to & \operatorname{Hom}_{\text{Ringe}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)) \\ f & \mapsto & f^\sharp_Y \end{array}$$

bijektiv.

Beweis : Es ist $X = \bigcup_i U_i$ für affine Schemata U_i. Für jeden Index i ist also nach Lemma 6.21

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Mor}(U_i, Y) & \to & \operatorname{Hom}_{\text{Ringe}}(B, \mathcal{O}_X(U_i)) \\ f & \mapsto & f^\sharp_{U_i} \end{array}$$

bijektiv.
Bezeichnen wir mit $f_i : U_i \to Y$ die Verknüpfung von f mit der offenen Immersion $U_i \to X$, so gilt

$$(f^\sharp_i)_{U_i} = \operatorname{res}_{XU_i} \circ f^\sharp_Y.$$

Sind nun $f, g \in \mathrm{Mor}(X,Y)$ mit $f_Y^\sharp = g_Y^\sharp$ gegeben, so folgt $(f_i^\sharp)_{U_i} = (g_i^\sharp)_{U_i}$, also $f_i = g_i$. Daher ist $f = g$ (Übungsaufgabe).
Ist umgekehrt ein Ringhomomorphismus $\varphi : B \to \mathcal{O}_X(X)$ gegeben, so liegt $\varphi_i = \mathrm{res}_{XU_i} \circ \varphi : B \to \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(U_i)$ in $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ringe}}(B, \mathcal{O}_X(U_i))$. Also existiert ein Schemamorphismus $f_i : U_i \to Y$ mit $(f_i^\sharp)_{U_i} = \varphi_i$. Ist $V \subset U_i \cap U_j$ eine offene affine Teilmenge, so kommen $f_i|_V : V \hookrightarrow U_i \to Y$ und $f_j|_V : V \hookrightarrow U_j \to Y$ beide von dem Ringhomomorphismus $\mathrm{res}_{XV} \circ \varphi$ her, sie stimmen also nach Lemma 6.21 überein. Also können wir die $f_i : U_i \to Y$ zu einem Morphismus $f : X \to Y$ verkleben (Übungsaufgabe). Da $\mathrm{res}_{XU_i} \circ f_Y^\sharp = (f_i^\sharp)_{U_i} = \varphi_i = \mathrm{res}_{XU_i} \circ \varphi$ für alle i gilt, folgt $f_Y^\sharp = \varphi$. Also ist die betrachtete Abbildung auch surjektiv. □

Zum Abschluß dieses langen Kapitels wollen wir noch die nützliche Technik des Verklebens von Schemata kennenlernen.

Lemma 6.23 (Verkleben von Schemata) Es sei S ein Basisschema, I eine Indexmenge und $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von $S-$Schemata. Für jedes $j \neq i$ sei eine offene Teilmenge $U_{ij} \subset X_i$ gegeben, die wir mit der eingeschränkten Strukturgarbe zu einem offenen Unterschema von X_i machen. Für alle $i \neq j$ in I seien ferner Isomorphismen $\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ von $S-$Schemata gegeben, so dass

i) $(\varphi_{ij})^{-1} = \varphi_{ji}$ und

ii) $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ sowie
$\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$ auf $U_{ij} \cap U_{ik}$

gilt. Dann existiert ein $S-$Schema X zusammen mit offenen Immersionen von $S-$Schemata

$$\psi_i : X_i \to X$$

für alle $i \in I$, so dass gilt:

i) $X = \bigcup \psi_i(X_i)$

ii) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j)$

iii) $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ auf U_{ij}.

Wir sagen, X entsteht durch Verkleben der X_i entlang der Isomorphismen φ_{ij}.

Beweis : Zunächst konstruieren wir den topologischen Raum X als Quotient der disjunkten Vereinigung $\dot{\bigcup} X_i$ nach folgender Äquivalenzrelation:
Für $x \in X_i$ und $y \in X_j$ mit $i \neq j$ gelte $x \sim y$ genau dann, wenn $\varphi_{ij}(x) = y$ ist. Dann

haben wir eine surjektive Abbildung $\psi : \dot{\bigcup} X_i \to X$, und wir statten X mit der Quotiententopologie bezüglich ψ aus. Eine Teilmenge $U \subset X$ ist also genau dann offen, wenn $\psi^{-1}(U) \subset \dot{\bigcup} X_i$ offen ist. Für alle $i \in I$ ist dann

$$\psi_i : X_i \hookrightarrow \dot{\bigcup} X_i \xrightarrow{\psi} X$$

stetig und es gilt $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ auf U_{ij}. Die Teilmenge $U_i = \psi_i(X_i) \subset X$ ist offen und $\psi_i : X_i \to U_i$ ist ein Homöomorphismus. Wir setzen

$$\mathcal{O}_{U_i} = \psi_{i_*} \mathcal{O}_{X_i}.$$

Dann ist $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ ein geringter Raum isomorph zu $(X_i, \mathcal{O}_{X_i})$, also ein Schema. Für alle $i \neq j$ gilt $U_i \cap U_j = \psi_i(X_i) \cap \psi_j(X_j) = \psi_i(U_{ij}) = \psi_j(U_{ji})$ nach Konstruktion. Also folgt $\mathcal{O}_{U_j|_{U_i \cap U_j}} = (\psi_{j_*} \mathcal{O}_{X_j})|_{U_i \cap U_j} = \psi_{j_*}(\mathcal{O}_{X_j}|_{U_{ji}}) \cong \psi_{j_*}(\varphi_{ij*} \mathcal{O}_{X_i}|_{U_{ij}}) = (\psi_j \circ \varphi_{ij})_*(\mathcal{O}_{X_i|_{U_{ij}}}) = \psi_{i_*}(\mathcal{O}_{X_i|_{U_{ij}}}) = \mathcal{O}_{U_i|_{U_i \cap U_j}}$. Also existiert eine Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X mit $\mathcal{O}_{X|_{U_i}} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ (Übungsaufgabe).
Dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, da es eine offene Überdeckung aus Schemata $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ besitzt. Nach Konstruktion ist

$$\psi_i : X_i \to X$$

eine offene Immersion. Ferner gilt $X = \bigcup\limits_i \psi_i(X_i)$. Wir müssen nur noch zeigen, dass X ein $S-$Schema und dass alle ψ_i $S-$Morphismen sind. Dazu definieren wir $\pi_i : U_i \to S$ als die Komposition $\pi_i : U_i \xrightarrow{\psi_i^{-1}} X_i \to S$. Da die φ_{ij} $S-$Morphismen sind, ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U_i \cap U_j \arrow[r, "\psi_i^{-1}"] \arrow[d, equal] & U_{ij} \arrow[d, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr] & \\
 & & S \\
U_i \cap U_j \arrow[r, "\psi_j^{-1}"] & U_{ji} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ, also ist $\pi_i|_{U_i \cap U_j} = \pi_j|_{U_i \cap U_j}$. Somit können wir die π_i zu einem Morphismus $\pi : X \to S$ verkleben. Nach Konstruktion sind dann die ψ_i $S-$Morphismen. $\square$

Mit Hilfe der Technik des Verklebens von Schemata können wir jetzt ein Schema konstruieren, das nicht affin sind.

Beispiel: Sei A ein Ring und $n \geqq 0$. Für alle $0 \leqq i \leqq n$ setzen wir

$$X_i = \text{Spec}\, A[\frac{T_0}{T_i}, \ldots, \frac{T_{i-1}}{T_i}, \frac{T_{i+1}}{T_i}, \ldots, \frac{T_n}{T_i}].$$

Also ist $X_i \simeq \mathbb{A}^n_A$.
Ferner sei $X_{ij} = D(T_i^{-1}T_j) \subset X_i$ für alle $j \neq i$. Es ist

$$\mathcal{O}_{X_i}(X_{ij}) = A[\frac{T_0}{T_i}, \dots \frac{T_{i-1}}{T_i}, \frac{T_{i+1}}{T_i}, \dots, \frac{T_n}{T_i}]_{\frac{T_j}{T_i}}.$$

Wir erhalten einen natürlichen Isomorphismus.

$$\mathcal{O}_{X_i}(X_{ij}) \to \mathcal{O}_{X_j}(X_{ji}),$$

der für alle $k \neq i$ das Element $\frac{T_k}{T_i}$ auf $\frac{T_k}{T_j}/\frac{T_i}{T_j}$ abbildet. Da X_{ij} und X_{ji} affine Schemata sind, liefert dies nach Proposition 6.15 einen Isomorphismus von Schemata $\varphi_{ij} : X_{ij} \to X_{ji}$.
Diese Isomorphismen erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 6.23. Also lassen sich die $A-$Schemata X_i entlang der X_{ij} zu einem $A-$Schema $\mathbb{P}^n_A$ verkleben. Dieses nennen wir den $n-$**dimensionalen projektiven Raum über** A. Wir werden im nächsten Kapitel eine andere Konstruktion von $\mathbb{P}^n_A$ kennenlernen.

Proposition 6.24 Es sei k ein Körper. Es gibt eine natürliche Bijektion

$$\mathbb{P}^n_k(k) \to \{ \text{ Geraden in } k^{n+1}\},$$

wobei mit Geraden in k^{n+1} die eindimensionalen Unterräume von k^{n+1} gemeint sind.

Beweis : Es ist $X_i(k) = \mathbb{A}^n(k) = k^n$, wobei $X_i(k)$ und $X_j(k)$ entlang

$$\begin{aligned} X_{ij}(k) &= \{(a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in k^n : a_j \neq 0\} \subset X_i(k) \quad \text{bzw.} \\ X_{ji}(k) &= \{(a_0, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n) \in k^n : a_i \neq 0\} \subset X_j(k) \end{aligned}$$

verklebt werden. Die Verklebeabbildung ist

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} : X_{ij}(k) &\to X_{ji}(k) \\ (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) &\mapsto (b_0, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_n) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad b_k = \begin{cases} \frac{a_k}{a_j}, & \text{falls} \quad k \neq i, j \\ \frac{1}{a_j}, & \text{falls} \quad k = i. \end{cases}$$

Wir definieren für $x = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \in X_i(k)$ die Gerade l_x in k^{n+1} als lineare Hülle von $(a_0, \dots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Liegt x in $X_{ij}(k)$, so definieren x und $\varphi_{ij}(x) \in X_{ji}(k)$ dieselbe Gerade. Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \tau : \mathbb{P}^n_k(k) & \to & \{ \text{Geraden in } k^{n+1}\} \\ x & \mapsto & l_x. \end{array}$$

Es ist $x \in X_i(k)$ genau dann, wenn $l_x \not\subset \{(c_0, ..., c_{n+1}) \in k^{n+1} : c_i = 0\}$ gilt. Daher folgt aus $l_x = l_y$, dass es ein i gibt mit $x, y \in X_i(k)$. Auf $X_i(k)$ ist die Abbildung aber offensichtlich injektiv, d.h. es ist $x = y$. Somit ist τ injektiv auf $\mathbb{P}^n_k(k)$.
Ferner gibt es für jede Gerade l in k^{n+1} ein i mit $l \not\subset \{(c_0, ..., c_{n+1}) \in k^{n+1} : c_i = 0\}$. Also hat l einen Erzeuger der Form $(a_0, ..., a_{i-1}, 1, a_{i+1}, ..., a_n)$. Dann ist $l = l_x$ für $x = (a_0, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n) \in X_i(k)$, d.h. τ ist auch surjektiv. □

Wir definieren auf $k^{n+1} \setminus \{0\}$ eine Äquivalenzrelation durch

$$(a_0, ..., a_n) \sim (b_0, ..., b_n)$$

genau dann, wenn es ein $\lambda \in k^\times$ gibt mit

$$b_0 = \lambda a_0, ..., b_n = \lambda a_n.$$

Wir schreiben $[a_0 : ... : a_n]$ für die Äquivalenzklasse von $(a_0, ..., a_n)$ unter dieser Äquivalenzrelation. Es gilt also $[a_0 : ... : a_n] = [\lambda a_0 : ... : \lambda a_n]$ für alle $\lambda \in k^\times$.

Dann zeigt dasselbe Argument wie im Beweis von Proposition 6.24, dass sich die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} X_i(k) & \to & \{[a_0 : ... : a_n] : a_i \neq 0\} \\ (a_0, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n) & \mapsto & [a_0 : ... : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : ... : a_n] \end{array}$$

zu einer Bijektion

$$\mathbb{P}^n(k) \to \{[a_0 : ... : a_n] : a_0, ..., a_n \in k, \text{ nicht alle } 0\}$$

zusammensetzen lassen.
Entspricht $x \in \mathbb{P}^n(k)$ unter dieser Zuordnung dem Wert $[a_0 : ... : a_n]$, so nennt man $[a_0 : ... : a_n]$ auch projektive Koordinaten von x.

7 Projektive Schemata

Wir wollen jetzt eine Methode kennenlernen, um abgeschlossene Unterschemata des projektiven Raums zu konstruieren. Dazu brauchen wir ein paar Vorbereitungen.

Definition 7.1 i) Ein **graduierter Ring** B ist ein Ring der Form

$$B = \bigoplus_{d \geqq 0} B_d,$$

wobei alle B_d Untergruppen von B sind, die $B_d B_e \subset B_{d+e}$ erfüllen. Die Elemente in B_d heißen **homogene Elemente vom Grad** d.

ii) Sei A ein Ring. Eine **graduierte A-Algebra** ist ein graduierter Ring B, der gleichzeitig eine A-Algebra ist, so dass das Bild von A in B_0 enthalten ist.

Beispiel: Ist A ein Ring, so ist $B = A\,[X_1, \ldots, X_n]$ eine graduierte A-Algebra. Hier ist

$$B_d = \{ \sum_{I=(i_1, \ldots, i_n)} a_I \, X_1^{i_1} \ldots X_n^{i_n} : \text{ für alle } I \text{ mit } a_I \neq 0 \text{ gilt } i_1 + \ldots + i_n = d \}.$$

Die homogenen Elemente von Grad d sind also hier die homogenen Polynome vom Grad d.

Definition 7.2 Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem graduierten Ring B heißt **homogen**, falls

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d).$$

Lemma 7.3 Ein Ideal $\mathfrak{a}$ in einem graduierten Ring B ist genau dann homogen, wenn es von homogenen Elementen erzeugt wird.

Beweis : Angenommen, $\mathfrak{a} = (f_i)_{i \in I}$ mit $f_i \in B_{d(i)}$ für gewisse $d(i) \geqq 0$. Dann ist jedes Element $g \in \mathfrak{a}$ eine Linearkombination der Form

$$g = g_1 f_{i_1} + \ldots + g_r f_{i_r}$$

für $g_j \in B$ und $i_1, \ldots, i_r \in I$. Indem wir alle g_j als Summe homogener Elemente schreiben und ausmultiplizieren, erhalten wir $g \in \bigoplus_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$. Also folgt $\mathfrak{a} \subset \bigoplus_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$ und damit Gleichheit, denn die andere Inklusion ist trivial.

Wir nehmen umgekehrt an, dass $\mathfrak{a} = \bigoplus_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$ gilt. Seien $(f_i)_{i \in I}$ beliebige Erzeuger von g. Alle f_i liegen in $\bigoplus_{d \geqq 0} (\mathfrak{a} \cap B_d)$, lassen sich also als endliche Summe homogener Elemente in $\mathfrak{a}$ schreiben. Die homogenen Summanden aller f_i bilden ebenfalls ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}$. $\square$

Lemma 7.4 Summe, Schnitt und Radikal von homogenen Idealen sind wieder homogene Ideale.

Beweis : Wir zeigen dies nur für die Summe, die anderen Behauptungen sind Übungsaufgaben.
Sind $(\mathfrak{a}_{i\in I})$ homogene Ideale, so besitzen alle $\mathfrak{a}_i$ nach Lemma 7.4 ein Erzeugendensystem aus homogenen Elementen. Vereinigt man all diese Erzeugendensysteme, so erhält man ein Erzeugendensystem von $\sum\limits_{i\in I}\mathfrak{a}_i$. Also ist auch $\sum\limits_{i\in I}\mathfrak{a}_i$ homogen. □

Lemma 7.5 Ein homogenes Ideal $\mathfrak{p}\neq B$ in einem homogenen Ring B ist genau dann prim, wenn für homogene Elemente $f,g\in B$ gilt: Ist $fg\in\mathfrak{p}$, so folgt $f\in\mathfrak{p}$ oder $g\in\mathfrak{p}$.

Beweis : Übungsaufgabe. □

Für jeden homogenen Ring $B=\bigoplus\limits_{d\geq 0}B_d$ setzen wir $B_+=\sum\limits_{d>0}B_d$. Die Teilmenge B_+ ist ein homogenes Ideal in B.

Definition 7.6 Für jeden homogenen Ring B sei

$$\operatorname{Proj}B=\{\mathfrak{p}\subset B:\mathfrak{p}\text{ homogenes Primideal mit }B_+\not\subset\mathfrak{p}\}.$$

Wir wollen nun die Menge $\operatorname{Proj}B$ mit der Struktur eines Schemas ausstatten. Dazu benötigen wir zunächst eine Topologie auf $\operatorname{Proj}B$. Diese definieren wir analog zur Topologie auf $\operatorname{Spec}A$ wie folgt. Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a}\subset B$ sei

$$V(\mathfrak{a})=\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Proj}B:\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}\}.$$

Lemma 7.7 Es seien $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I},\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ homogene Ideale in B.

i) $V(0)=\operatorname{Proj}B$, $V(B_+)=\emptyset$.

ii) $V(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=V(\mathfrak{a})\cup V(\mathfrak{b})$.

iii) $V(\sum\limits_{i\in I}\mathfrak{a}_i)=\bigcap\limits_{i\in I}V(\mathfrak{a}_i)$.

Beweis : Analog zum Beweis von Lemma 4.2. □

Wir nennen eine Teilmenge $U \subset \operatorname{Proj} B$ offen, falls es ein homogenes Ideal $\mathfrak{a} \subset B$ gibt mit $U = \operatorname{Proj} B \backslash V(\mathfrak{a})$. Nach Lemma 7.7 erhalten wir so eine Topologie auf $\operatorname{Proj} B$.

Jetzt wollen wir eine Garbe von Ringen auf $\operatorname{Proj} B$ definieren. Für jedes homogene Element $f \in B_+$ sei

$$D_+(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B : f \notin \mathfrak{p}\} = \operatorname{Proj} B \setminus V((f)).$$

Die offenen Mengen $D_+(f)$ für homogene $f \in B_+$ bilden eine Basis der Topologie auf $\operatorname{Proj} B$, d.h. jede offene Umgebung U eines Punktes $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} B$ enthält ein $D_+(f)$. Dies sieht man folgendermaßen ein. Es gilt $U = \operatorname{Proj} B \backslash V(\mathfrak{a})$ für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Falls $\mathfrak{a} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$, so folgt $\mathfrak{a} \cap B_0 \not\subset \mathfrak{p}$, da $\mathfrak{a}$ homogen ist. Also existiert ein $f \in \mathfrak{a} \cap B_0$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Da $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ ist, gibt es zusätzlich ein $g \in B_+$ mit $g \notin \mathfrak{p}$. Also folgt $fg \notin \mathfrak{p}$, aber $fg \in \mathfrak{a} \cap B_+$. Das steht im Widerspruch zur Annahme $\mathfrak{a} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$. Diese ist also falsch. Für $f \in \mathfrak{a} \cap B_+$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ folgt nun $\mathfrak{p} \in D_+(f) \subset U$.

Definition 7.8 i) Für $f \in B_+$ homogen vom Grad $d > 0$ sei

$$B_{(f)} = \{\frac{b}{f^k} : b \text{ homogen vom Grad } dk\}.$$

ii) Für ein homogenes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Proj} B$ sei

$$B_{(\mathfrak{p})} = \{\frac{b}{c} : c \notin \mathfrak{p}, b, c \text{ homogen vom selben Grad }\}.$$

Es ist $B_{(f)} \subset B_f$ und $B_{(\mathfrak{p})} \subset B_{\mathfrak{p}}$ jeweils die Menge der homogenen Elemente vom Grad 0, wenn man den Grad eines Bruches als Zählergrad minus Nennergrad definiert.
Wir definieren nun eine Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}$ auf $\operatorname{Proj} B$.

Definition 7.9 Es sei $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}(D_+(f)) = B_{(f)}$.

Jetzt wollen wir Restriktionsabbildungen definieren. Dazu brauchen wir folgendes Lemma.

Lemma 7.10 Es seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ homogene Ideale in B. Dann gilt $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ genau dann, wenn $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Beweis : Ist $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$, so sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$, d.h. $\mathfrak{p}$ ist ein homogenes Primideal mit $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Dann folgt $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \sqrt{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{p}$. Es sei $g \in B_+$ ein Element mit $g \notin \mathfrak{p}$. Dann gilt für alle $f \in \mathfrak{b}$, dass $fg \in \mathfrak{b} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}$ ist. Also ist $f \in \mathfrak{p}$. Somit folgt $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$, d.h. $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})$.
Umgekehrt nehmen wir $V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ an. Es sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal in B mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Dann ist $\mathfrak{p}^h := \bigoplus\limits_{d \geqq 0} \mathfrak{p} \cap B_d$ nach Lemma 7.5 ein homogenes Primideal in B. Gilt $B_+ \not\subset \mathfrak{p}^h$, so folgt wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^h \subset \mathfrak{p}^h$, dass $\mathfrak{p}^h \in V(\mathfrak{a}) \subset V(\mathfrak{b})$ gilt. Somit ist $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}^h \subset \mathfrak{p}$. Gilt $B^+ \subset \mathfrak{p}^h$, so folgt $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \mathfrak{p}^h \subset \mathfrak{p}$. Also ist $\mathfrak{b} \cap B_+ \subset \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}, \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. □

Wir nehmen nun an, für homogene Elemente $f, g \in B_+$ gilt $D_+(g) \subset D_+(f)$. Dann folgt $V((f)) \subset V((g))$, also mit Lemma 7.10 $(g) \cap B_+ \subset \sqrt{(f)}$. Insbesondere ist $g \in \sqrt{(f)}$, d.h. es gilt $g = bf^n$ für ein $b \in B$ und ein $n \geqq 0$. Da f und g homogen sind, können wir b homogen wählen. Die natürliche Abbildung $B_f \to B_g$ aus §6 induziert einen Ringhomomorphismus

$$\mathrm{res}_{\,D_+(f)D_+(g)} : \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}(D_+(f)) = B_{(f)} \to B_{(g)} = \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}(D_+(g)).$$

Lemma 7.11 Es gelte $D_+(f) = \bigcup\limits_{i \in I} D_+(f_i)$ für homogene Elemente $f, f_i \in B_+$.

i) Ist $s \in B_{(f)}$ mit $\mathrm{res}_{\,D_+(f)D_+(f_i)} s = 0$ für alle $i \in I$, so ist $s = 0$.

ii) Sind $s_i \in B_{(f_i)}$ gegeben mit $\mathrm{res}_{\,D_+(f_i)D_+(f_i f_j)} s_i = \mathrm{res}_{\,D_+(f_j)D_+(f_i f_j)} s_j$ für alle $i, j \in I$, so existiert ein $s \in B_{(f)}$ mit $\mathrm{res}_{\,D_+(f)D_+(f_i)} s = s_i$ für alle $i \in I$.

Beweis : Das folgt aus Proposition 6.4. □

Nun können wir wie in §6 für jede offene Menge $U \subset \mathrm{Proj}\, B$ eine offene Überdeckung $U = \bigcup\limits_{i \in I} D_+(f_i)$ für $f_i \in B_+$ wählen und

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}(U) = \{(s_i)_{i \in I} : s_i \in B_{(f_i)} \text{ mit } \mathrm{res}_{\,D_+(f_i)D_+(f_i f_j)} s_i = \mathrm{res}_{\,D_+(f_j)D_+(f_i f_j)} s_j \text{ für alle } i, j \in I\}$$

setzen. Mit Hilfe von Lemma 7.11 folgt, dass $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}$ eine Garbe auf B ist.

Lemma 7.12 Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proj}\, B$. Dann gilt für den Halm von $\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}$ in $\mathfrak{p}$

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B, \mathfrak{p}} \simeq B_{(\mathfrak{p})}.$$

Beweis : Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,B,\mathfrak{p}} &= \varinjlim_{\mathfrak{p}\in U \text{ offen}} \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,B}(U) \\
&= \varinjlim_{\substack{f\notin\mathfrak{p} \\ f\in B_+ \text{ homogen}}} \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,B}(D_+(f)) \\
&= \varinjlim_{\substack{f\notin\mathfrak{p} \\ f\in B_+ \text{ homogen}}} B_{(f)} \simeq B_{(\mathfrak{p})}.
\end{aligned}$$

mit demselben Argument wie in Proposition 6.6. □

Der Ring $B_{(\mathfrak{p})}$ ist lokal mit maximalem Ideal

$$\{\frac{b}{c} : b \in \mathfrak{p}, c \notin \mathfrak{p}, b \text{ und } c \text{ homogen vom selben Grad}\}.$$

Also ist Proj B ein lokal geringter Raum.

Proposition 7.13 Es sei $f \in B_+$ ein homogenes Element. Dann ist $(D_+(f), \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\,B}|_{D_+(f)})$ als lokal geringter Raum isomorph zu Spec $B_{(f)}$.

Beweis : Es sei $j : B \to B_f$ der kanonische Ringhomomorphismus $j(b) = b/1$. Der Ring $B_{(f)}$ ist ein Unterring von B_f. Für jedes homogene Ideal $\mathfrak{a}$ in B sei $\varphi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\, B_f \cap B_{(f)}$. Hier ist $\mathfrak{a}\, B_f = \{\frac{a}{f^k} : a \in \mathfrak{a}, k \geqq 0\}$ das von $j(\mathfrak{a})$ in B_f erzeugte Ideal. Ist $\mathfrak{p} \in D_+(f)$, so ist $\varphi(\mathfrak{p})$ ein Primideal in $B_{(f)}$. Das liefert eine Abbildung

$$\varphi : D_+(f) \to \mathrm{Spec}\, B_{(f)}.$$

Diese ist bijektiv. Man prüft nämlich leicht nach, dass für jedes Primideal $\mathfrak{q}$ in $B_{(f)}$ die Zuordnung $\mathfrak{q} \mapsto j^{-1}\sqrt{\mathfrak{q}B_f}$ eine Umkehrabbildung liefert.
Außerdem gilt für ein homogenes Ideal $\mathfrak{a}$ genau dann $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, wenn $\varphi(\mathfrak{a}) \subset \varphi(\mathfrak{p})$ gilt. Somit ist φ ein Homöomorphismus.
Wir zeigen nun, dass für alle $D_+(g) \subset D_+(f)$ gilt $\varphi(D_+(g)) = D(\alpha)$, wobei $\alpha = g^r/f^m \in B_{(f)}$ mit $r = \mathrm{grad}\,(f)$ und $m = \mathrm{grad}\,(g)$ ist. Ist $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ mit $g \in \mathfrak{p}$, so ist offenbar $\alpha \in \mathfrak{p}\, B_f \cap B_{(f)} = \varphi(\mathfrak{p})$. Ist $\mathfrak{p} \in D_+(f)$ mit $g \notin \mathfrak{p}$, so rechnet man nach, dass $\alpha \notin \mathfrak{p}B_f \cap B_{(f)}$ gilt. Somit folgt $\varphi(D_+(g)) = D(\alpha)$.
Aus $D_+(g) \subset D_+(f)$ folgt $g^n = fb$ für ein $n \geqq 0$ und ein $b \in B$. Da g und f homogen sind, können wir b homogen wählen, indem wir nur die Komponente im Grad $mn-r$ betrachten.

Der Ringhomomorphismus $\text{res}_{D_+(f)D_+(g)} : B_{(f)} \to B_{(g)}$ bildet $\alpha = \frac{g^r}{f^m}$ auf das invertierbare Element $\frac{g^r b^m}{g^{mn}}$ in $B_{(g)}$ ab. Nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung induziert er also einen Homomorphismus $\varphi^\sharp_{D_+(g)} : (B_{(f)})_\alpha \to B_{(g)}$. Eine etwas mühselige, aber elementare Rechnung zeigt, dass diese Ringhomomorphismen $\varphi^\sharp_{D_+(g)}$ mit den Restriktionsabbildungen verträglich und Isomorphismen sind. Also können wir sie zu einem Garbenisomorphismus

$$\varphi^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B_{(f)}} \to \varphi_* \mathcal{O}_{D_+(f)}$$

zusammensetzen. □

Korollar 7.14 $(\operatorname{Proj} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B})$ ist ein Schema.

Beweis : Der lokal geringter Raum $(\operatorname{Proj} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B})$ besitzt nach Proposition 7.13 eine offene Überdeckung aus affinen Schemata. □

Lemma 7.15 Ist B eine graduierte A-Algebra, so ist $\operatorname{Proj} B$ ein A-Schema.

Beweis : Der Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B$, der B zu einer A-Algebra macht, landet definitionsgemäß in B_0. Für jedes homogene $f \in B_+$ induziert α also einen Ringhomomorphismus $\alpha : A \to B_{(f)}$ definiert durch $\alpha(a) = a/1$. Diese Ringhomomorphismen vertragen sich mit der Restriktionsabbildung für $D_+(g) \subset D_+(f)$. Also erhalten wir einen Ringhomomorphismus

$$A \to \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}(\operatorname{Proj} B).$$

Nach 6.22 induziert dieser einen Schemamorphismus $\operatorname{Proj} B \to \operatorname{Spec} A$. □

Beispiel: Es sei A ein Ring und $B = A\,[x_0, ..., x_n]$ der Polynomring mit der oben definierten Graduierung. Dann ist $B_+ = (x_0, ..., x_n)$. Jedes homogene Primideal $\mathfrak{p}$ in B mit $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ enthält mindestens eines der x_k nicht, liegt also in mindestens einem $D_+(x_k)$.
Somit bilden $D_+(x_0), ..., D_+(x_n)$ eine offene Überdeckung von $\operatorname{Proj} B$. Sei $k \in \{0, ..., n\}$. Dann ist

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}(D_+(x_k)) = A\,[x_0 ..., x_n]_{(x_k)}.$$

Im folgenden bedeutet das Zeichen $\wedge$ über einer Variable, dass diese weggelassen werden soll. Wir haben einen Isomorphismus

$$A\left[x_0,\, ...,\, x_n\right]_{(x_k)} \to A\left[\frac{x_0}{x_k},\, ...,\, \widehat{\frac{x_k}{x_k}},\, ...,\, \frac{x_n}{x_k}\right],$$

der für ein Element

$$\frac{\sum\limits_{I=(i_0,\, ...,\, i_n),\, i_0+\, ...\, +i_n=d} a_I x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}}{x_k^d}$$

gegeben ist durch

$$\frac{\sum\limits_I a_I\, x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n}}{x_k^d} \mapsto \sum_I a_I \left(\frac{x_0}{x_k}\right)^{i_0} \ldots \left(\widehat{\frac{x_k}{x_k}}\right)^{i_k} \ldots \left(\frac{x_n}{x_k}\right)^{i_n}.$$

Die Umkehrabbildung wird auf Monomen gegeben durch

$$\frac{a\, x_0^{i_0} \ldots \widehat{x_k}^{i_k} \ldots x_n^{i_n}}{x_k^{i_0+\, ...\, +i_n}} \mapsto a \left(\frac{x_0}{x_k}\right)^{i_0} \ldots \left(\widehat{\frac{x_k}{x_k}}\right)^{i_k} \ldots \left(\frac{x_n}{x_k}\right)^{i_n}.$$

Nach dem Beweis von Proposition 7.13 ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}(D_+(x_k x_l)) &\simeq \left(A\left[\frac{x_0}{x_k},\, ...,\, \widehat{\frac{x_k}{x_k}},\, ...,\, \frac{x_n}{x_k}\right]\right)_{\frac{x_l}{x_k}}, \text{ da} \\ D_+(x_k x_l) &\subset D_+(x_k) \end{aligned}$$

ist. Andererseits ist auch

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathrm{Proj}\, B}(D_+(x_k x_l)) &\simeq \left(A\left[\frac{x_0}{x_l},\, ...,\, \widehat{\frac{x_l}{x_l}},\, ...,\, \frac{x_n}{x_l}\right]\right)_{\frac{x_k}{x_l}}, \text{ da} \\ D_+(x_k x_l) &\subset D_+(x_l) \end{aligned}$$

ist.

Schaltet man diese beiden Isomorphismen hintereinander, so erhält man gerade die Verklebungsabbildungen aus der Definition von $\mathbb{P}_A^n$ in §6. Somit folgt

$$\mathbb{P}_A^n \simeq \mathrm{Proj}(A\left[x_0,\, ...,\, x_n\right]).$$

Lemma 7.16 Es seien $B = \bigoplus\limits_{d \geqq 0} B_d$ und $C = \bigoplus\limits_{d \geqq 0} C_d$ graduierte Ringe und $\varphi : B \to C$ ein graduierter Homomorphismus, d.h. es gibt ein $r \geqq 1$ mit $\varphi(B_d) \subset C_{rd}$ für alle $d \geqq 0$. Es sei $\mathfrak{a}$ das homogene Ideal $\mathfrak{a} = \varphi(B_+)\, C$ in C. Dann induziert φ einen Morphismus von Schemata

$$f : \operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a}) \to \operatorname{Proj} B.$$

Für jedes homogene $b \in B_+$ gilt $f^{-1}(D_+(b)) = D_+(\varphi(b))$ und $f|_{D_+(\varphi(b))}$ ist gerade der Morphismus affiner Schemata, der durch den Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} B_{(b)} & \to & C_{\varphi(b)} \\ a/b^k & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(b)^k \end{array}$$

induziert wird.

Beweis : Ist $\mathfrak{p}$ ein homogenes Primideal in C, so ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ ein homogenes Primideal in B, da φ mit der Graduierung verträglich ist. Gilt $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$, so folgt $B_+ \not\subset \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$, also erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : \operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a}) & \to & \operatorname{Proj} B \\ \mathfrak{p} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{p}). \end{array}$$

Diese ist offenbar stetig.
Ist $b \in B_+$ homogen und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a})$, so ist $\varphi(b) \in \mathfrak{p}$ genau dann, wenn $b \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ gilt. Daraus folgt $f^{-1}D_+(b) = D_+(\varphi(b))$. Wir definieren einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} f^\sharp_{D_+(b)} : \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B}(D_+(b)) = B_{(b)} & \to & C_{(\varphi(b))} = \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a})}(f^{-1}D_+(b)) \quad \text{durch} \\ a/b^k & \mapsto & \varphi(a)/\varphi(b)^k. \end{array}$$

Da φ graduiert ist, wird ein Element vom Grad 0 in B_b auf ein Element vom Grad 0 in $C_{\varphi(b)}$ abgebildet, diese Abbildung ist also wohldefiniert.
Man überprüft leicht, dass die Ringhomomorphismen $f^\sharp_{D_+(b)}$ mit den Restriktionsabbildungen verträglich sind. Also können wir sie zu einem Garbenmorphismus $f^\sharp : \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} B} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Proj} C \setminus V(\mathfrak{a})}$ zusammensetzen. □

Ist $\mathfrak{a} \subset B$ ein homogenes Ideal in dem graduierten Ring B, so ist auch der Quotientenring $B/\mathfrak{a}$ graduiert, indem wir

$$(B/\mathfrak{a})_d = B_d/(\mathfrak{a} \cap B_d)$$

setzen. Wir betrachten nun den Fall $B = A\,[x_0, \ldots, x_n]$ für einen Ring A.

Proposition 7.17 Ist $\mathfrak{a} \subset A[x_0, ..., x_n]$ ein homogenes Ideal, so vermittelt der graduierte Homomorphismus $\varphi : A[x_0, ..., x_n] \to A[a_0, ..., a_n]/\mathfrak{a}$ eine abgeschlossene Immersion

$$f : \text{Proj}\,(A[x_0, ..., x_n]/\mathfrak{a}) \to \mathbb{P}^n_A,$$

so dass das Bild der zugehörigen stetigen Abbildungen die abgeschlossene Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n_A$ ist.

Beweis : Wir setzen $B = A[x_0, ..., x_n]$. Der Homomorphismus φ erfüllt $\varphi(B_+) = (B/\mathfrak{a})_+$, also erhalten wir einen Morphismus

$$f : \text{Proj}\,B/\mathfrak{a} \to \text{Proj}\,B = \mathbb{P}^n_A$$

mit Lemma 7.16.
Ist $\mathfrak{p} \subset B$ ein beliebiges homogenes Primideal mit $B_+ \not\subset \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, so ist $\varphi(\mathfrak{p})$ ein homogenes Primideal in $B/\mathfrak{a}$ mit $(B/\mathfrak{a})_+ \not\subset \varphi(\mathfrak{p})$. Dies definiert eine Umkehrabbildung $V(\mathfrak{a}) \to \text{Proj}\,B/\mathfrak{a}$. Man prüft leicht nach, dass $f(V(\mathfrak{b})) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$ für jedes homogene Ideal $b \subset B/\mathfrak{a}$ gilt. Daher ist f ein Homöomorphismus auf die Teilmenge $V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n_A$. Der Garbenmorphismus

$$f^\sharp : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A} \to f_*\mathcal{O}_{\text{Proj}\,B/\mathfrak{a}},$$

ausgewertet auf $D_+(b) \subset \mathbb{P}^n_A$ liefert nach Lemma 7.16 einen surjektiven Ringhomomorphismus. Da die offenen Mengen der Form $D_+(b)$ eine Basis der Topologie bilden, ist $f^\sharp$ surjektiv. Somit ist f nach Definition 6.17 in der Tat eine abgeschlossene Immersion. $\square$

Definition 7.18 Es sei A ein Ring. Ein **projektives A-Schema** ist ein A-Schema $X \to \text{Spec}\,A$, so dass es eine abgeschlossene Immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ von A-Schemata gibt.

Es sei k ein Körper. Jetzt wollen wir die k-rationalen Punkte eines projektiven k-Schemas als Nullstellenmenge beschreiben.
Ist $\mathfrak{a} \subset k[x_0, ..., x_n]$ ein homogenes Ideal, so gilt $\mathfrak{a} = (f_1, ..., f_r)$ für endlich viele homogene Polynome f_i. Ist f_i homogen vom Grad d und $(a_0, ..., a_n) \in k^{n+1}$, so gilt für alle $\lambda \in k^\times$:

$$f_i(\lambda a_0, ..., \lambda a_n) = \lambda^{d+1}\, f_i(a_0, ..., a_n).$$

Somit ist $f_i(\lambda a_0, ..., \lambda a_n) = 0$ genau dann, wenn $f_i(a_0, ..., a_n) = 0$ ist.

Definition 7.19 Ein Punkt $x \in \mathbb{P}_k^n(k)$ heißt **Nullstelle des homogenen Polynoms** f, falls für beliebige projektive Koordinaten $x = [a_0 : \ldots : a_n]$ gilt $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$.

Vorsicht: Andere Werte als 0 sind natürlich nach der obigen Formel nicht unabhängig von der Wahl eines Vertreters!

Definition 7.20 Ist $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ ein homogenes Ideal in $k[x_0, \ldots, x_n]$ mit homogenen Erzeugern $f_1, \ldots, f_r$, so definieren wir die Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}$ durch

$$Z_+(\mathfrak{a}) = \{x = [a_0 : \ldots : a_n] : (a_0 \ldots a_n) \in k^{n+1} \backslash \{0\}, f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, r\}.$$

Dann gilt folgendes Resultat:

Lemma 7.21 Unter der Bijektion $\beta : \mathbb{P}_k^n(k) \to \{[a_0, \ldots, a_n] : (a_0, \ldots, a_n) \in k^{k+1} \setminus \{0\}\}$ aus §6 wird $\mathbb{P}_k^n(k) \cap V(\mathfrak{a})$ mit $Z_+(\mathfrak{a})$ identifiziert.

Beweis : Wir setzen $X_i = D_+(x_i)$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Es ist $X_i \simeq \operatorname{Spec} k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)} \simeq \operatorname{Spec} k[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}] \simeq \mathbb{A}_k^n$. Es sei $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ mit homogenen Polynomen f_i. Unter dem Isomorphismus $k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)} \simeq k\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]$ wird $\mathfrak{a}\, k[x_0, \ldots, x_n]_{x_i} \cap k[x_0, \ldots, x_n]_{(x_i)}$ abgebildet auf $\mathfrak{a}_i = \left(f_1\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right), \ldots, f_r\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)\right)$. Also entspricht $V(\mathfrak{a}) \cap X_i$ der Menge $V(\mathfrak{a}_i) \subset \operatorname{Spec} k\left[\frac{x_0}{x_i} \ldots \widehat{\frac{x_i}{x_i}} \ldots \frac{x_n}{x_i}\right]$. Wir haben in §6 gesehen, dass

$$\begin{array}{rcl} \beta|_{X_i(k)} : X_i(k) & \to & \{[a_0 : \ldots : a_n] : a_i \neq 0\} \\ (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) & \mapsto & [a_0 : \ldots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \ldots : a_n] \end{array}$$

gilt. Hier haben wir $X_i(k) \simeq \mathbb{A}_k^n(k)$ wie zuvor mit k^n identifiziert. Unter dieser Identifikation entspricht $V(\mathfrak{a}_i) \cap X_i(k)$ gerade der Nullstellenmenge von $\mathfrak{a}_i$ in k^n, wie wir in den Übungen gesehen haben. Also bildet $\beta|_{X_i(k)}$ die Menge $V(\mathfrak{a}_i) \cap X_i(k)$ auf $\{[a_0 : \ldots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \ldots : a_n] : f(a_0, \ldots, a_{i-1}, 1, a_i, \ldots, a_n) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{a}_i\} = Z_+(\mathfrak{a}) \cap \{[a_0 : \ldots : a_n] : a_i \neq 0\}$ ab. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel: Es sei k ein Körper und $a, b \in k$. Wir betrachten

$$f(X, Y, Z) = Y^2 Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3 \in k[X, Y, Z].$$

Dieses Polynom liefert ein projektives k-Schema

$$X = \text{Proj}\,(k\,[X,Y,Z]/(Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3)).$$

Wie wir später sehen werden, hat X die Dimension 1, wir nennen X daher eine projektive Kurve.
Es ist $X(k) = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(k) : y^2z - x^3 - axz^2 - bz^3 = 0\}$ und $X(k) \cap V((z)) = \{[0 : y : 0]\}$. Dieser Punkt $[0 : y : 0]$ wird manchmal auch als ∞ bezeichnet. Es ist ferner $X(k) \cap D_+(z) = \{(x,y) \in k^2 : y^2 = x^3 + ax + b\}$. Ist $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, so kann man nachrechnen, dass in allen Punkten aus $X(k) \cap D_+(z)$ die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - x^3 - ax - b) \text{ und } \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - x^3 - ax - b)$$

nicht verschwinden.
Wie wir später sehen werden, führt dies dazu, dass X keine „Singularitäten“ hat. In diesem Fall heißt X „elliptische Kurve über k“. Solche elliptischen Kurven X sind interessant, da $X(k)$ die Struktur einer Gruppe trägt. Das Gruppengesetz auf $X(k)$ läßt sich wie folgt beschreiben: Sind $P, Q \in X(k)$, so legt man durch beide Punkte in $\mathbb{P}^2(k)$ eine Gerade. (Ist $P = Q$, so wählt man die Tangente an $X(k)$ in P). Diese Gerade schneidet $X(k)$ in einem dritten Punkt $R^* = [a : b : c]$. Diesen „spiegeln wir an der y-Achse“ und erhalten einen Punkt $R = [a : -b : c]$ auf $X(k)$. Alternativ können wir R so beschreiben, dass wir R^* durch eine Gerade mit $\infty = [0 : 1 : 0]$ verbinden und den dritten Schnittpunkt dieser Gerade mit $X(k)$ wählen. Zusammen mit der Verknüpfung $P + Q = R$ wird $X(k)$ eine abelsche Gruppe mit neutralem Element ∞. Das inverse Element zu $[a : b : c]$ ist $[a : -b : c]$.