Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 9.12.2013
Abgabetermin: 16.12.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweise Korollar 5.28 aus der Vorlesung:
Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $x_1, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Punkte in X und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine meromorphe Funktion f auf X mit $f(x_i) = c_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein *Kettenkomplex* ist eine Folge $C = (C_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von Abelschen Gruppen C_i zusammen mit Gruppenhomomorphismen $d_i : C_i \to C_{i-1}$ mit $d_{i-1} \circ d_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Der Quotient $H_i(C) := \ker(d_i)/\mathrm{im}(d_{i+1})$ heisst *i-te Homologiegruppe von C*. Ein Homomorphismus $f : C \to C'$ von Kettenkomlexen $C = (C_i, d_i)$ und $C' = (C'_i, d'_i)$ ist eine Folge von Gruppenhomomorphismen $f = (f_i : C_i \to C'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit $f_{i-1} \circ d_i = d'_i \circ f_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.
Eine *kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen* (C_i, d_i), (C'_i, d'_i), (C''_i, d''_i) ist eine Paar von Kettenkomplexhomomorphismen $(f : C \to C', g : C \to C'')$ so dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ die resultierende Sequenz von Abelschen Gruppen $0 \to C_i \to C'_i \to C''_i \to 0$ exakt ist.
Zeige, dass jede kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \to C \to C' \to C'' \to 0$$

eine lange exakte Sequenz

$$... \to H_{i+1}(C'') \to H_i(C) \to H_i(C') \to H_i(C'') \to ...$$

auf den Homologiegruppen induziert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei T der Torus aus Beispiel 2.8. Konstruiere, ohne den Existenzsatz 5.27 zu benutzen, eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung $T \to Y$ auf eine zusammenhängende, kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht 0.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei D ein effektiver Divisor auf einer kompakten, zusammenhängenden Riemannschen Fläche X. Zeige, dass die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D) \to \mathbb{C}_D \to 0$$

exakt ist.