Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 17.12.2013
Abgabetermin: 13.1.2014

Riemannsche Flächen

Weihnachtsblatt

Dieses Aufgabenblatt ist als Wiederholung gedacht. Für jede Aufgabe erhält man Bonuspunkte zum jeweils angegebenen Übungsblatt. Dazu gibt es eine Knobelaufgabe, um weitere Punkte gutzumachen.

Aufgabe 1 (4 Bonuspunkte zu Blatt 1)

1. Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. Zeige, dass X zusammenhängend ist.
2. Sei X eine zusammenhängende Riemannsche Fläche. Zeige, dass X wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (4 Bonuspunkte zu Blatt 3)

Seien $\gamma_1,\ \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ zwei stetig differenzierbare Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Zeige, ohne Aufgabe 4 von Blatt 2 zu benutzen, dass γ_1 und γ_2 genau dann homotop sind, wenn $\int_{\gamma_1} \frac{1}{z} dz = \int_{\gamma_2} \frac{1}{z} dz$ gilt.
Tipp: Exponentialüberlagerung

Aufgabe 3 (4 Bonuspunkte zu Blatt 5)

Seien T_1, T_2 zwei Tori gegeben durch Abbildungen $q_1, q_2 : \mathbb{C} \to S^1 \times S^1$ wie in Beispiel 2.4, (ω_1, ω_2) die Periode von T_2. Sei weiter $h : T_1 \to T_2$ eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung. Zeige, dass es eine affin-lineare Abbildung

$$H : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto cz + t$$

mit $q_2 \circ H = h \circ q_1$ gibt und dass dabei $c \in \mathbb{C}$ eindeutig und $t \in \mathbb{C}$ eindeutig bis auf Addition eines Elements aus $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ist.
Dabei darf der *Satz von Liouville* benutzt werden: Jede beschränkte, auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

Aufgabe 4 (4 Bonuspunkte zu Blatt 8)

Überprüfe die Kartenunabhängigkeit von Definition 6.2 (Divisor einer meromorphen Differentialform).

Prof. Dr. M. Möller | WS 2013-14
Quentin Gendron | Frankfurt/M., 17.12.2013
Kolja Hept | Abgabetermin: 13.1.2014

Aufgabe * (12 Bonuspunkte)

Sei P_n ein Polygon aus $2n$ Seiten und $\varepsilon_g(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Seiten von P_n paarweise orientierungsumkehrend miteinander zu verkleben, sodass daraus eine geschlossene topologische Fläche vom Geschlecht g resultiert.
Sei weiterhin $\lambda_g(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten von Verklebungen, bei denen folgende Kantenverklebungen verboten sind:

(A) Die Kanten a und a^{-1} sind aufeinanderfolgend.

(B) Zu aufeinandenfolgenden Kanten a und b sind auch b^{-1} und a^{-1} aufeinanderfolgend.

Sei schließlich $\mu_g(n)$ die Anzahl der Möglichkeiten von Verklebungen, bei denen nur Kantenverklebungen vom Typ (A) verboten ist.
Zeigen Sie:

i) $\varepsilon_g(n)$ ist gleich der Anzahl der Elemente in der symmetrischen Gruppe S_{2n}, die Produkte von n disjunkten 2-Zykeln sind und deren Produkt mit der zyklischen Permutation $\sigma = (1\,2\,\cdots\,2n)$ aus $n+1-2g$ Zykeln besteht

ii)

$$\varepsilon_g(n) = \sum_{i\geq 0} \binom{2n}{i} \mu_g(n-i) \text{ für alle } g \geq 1$$

iii)

$$\mu_g(n) = \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} \lambda_g(n-i)$$

Wer die Rekursion

$$(n+1)\varepsilon_g(n) = (4n-2)\varepsilon_g(n-1) + (2n-1)(n-1)(2n-3)\varepsilon_g(n-2)$$

beweist oder einen Beweis in der Literatur findet, kann darüber eine Bachelorarbeit schreiben.