Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 25.11.2013
Abgabetermin: 2.12.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

i) Ist $\omega := udz + vd\bar{z}$, so gilt

$$d\omega = \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right) dz \wedge d\bar{z}.$$

ii) Sei $f : X \to \mathbb{C}$ eine C^1-Abbildung und ω eine C^1-Form auf X. Zeige, dass die Gleichung $d(f\omega) = df \wedge \omega + fd\omega$ gilt.

iii) Zeige, dass das Wegintegral einer 1-Form wohldefiniert ist, d.h. nicht von Kartenwahl und Zerlegung des Weges abhängt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

i) Sei T der Torus konstruiert im Beispiel 2.8. Beweise, dass die 1-Form ω, gegeben durch dz auf jeder Karte, wohldefiniert ist.

ii) Sei $\Lambda = \langle (a,b), (c,d) \rangle$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $\pi : \mathbb{C} \to X := \mathbb{C}/\Lambda$ die kanonische Projektion. Sei $z_0 \in \Lambda$ ein Gitterpunkt und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, sodass $\gamma(t) = tz_0$. Berechne $\int_{\pi\gamma} dz$ und $\iint_X dz \wedge d\bar{z}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

i) Sei $\mathfrak{B}$ die Prägarbe der beschränkten Abbildungen auf $(0,1) \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass $\mathfrak{B}$ keine Garbe ist.

ii) Sei X ein topologischer Raum. Gib eine Prägarbe auf X an, die den ersten Punkt der Definition einer Garbe nicht erfüllt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

i) Seien X eine Riemannsche Fläche, G eine Gruppe und $P \in X$ ein Punkt. Wir definieren die Prägarbe G_P wie folgt:

$$G_P(U) = \begin{cases} G & \text{, falls} P \in U \\ \{0\} & \text{, falls } P \notin U \end{cases}$$

Zeige, dass G_P eine Garbe ist.

ii) Sei X eine Riemannsche Fläche, U_0 eine offene Untermenge von X und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U_0. Sei $\tilde{\mathcal{F}}$ definiert wie folgt: Für alle offene Menge $U \subset X$ gilt $\tilde{\mathcal{F}}(U) := \mathcal{F}(U \cap U_0)$. Zeige, dass diese Prägarbe eine Garbe auf X ist.