Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 2.12.2013
Abgabetermin: 9.12.2013

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

i) Seien X eine Riemannsche Fläche, G eine Gruppe und $P \in X$ ein Punkt. Die Garbe G_P ist definiert wie folgt:

$$G_P(U) = \begin{cases} G & \text{, falls} P \in U \\ \{0\} & \text{, falls } P \notin U \end{cases}$$

Berechne um jeden Punkt den Halm dieser Garbe.

ii) Seien $U_0 \subset X$ abgeschlossen und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf U_0. Die Garbe $\tilde{\mathcal{F}}$ ist die Garbe auf X definiert durch $\tilde{\mathcal{F}}(U) := \mathcal{F}(U \cap U_0)$.

Berechne um jeden Punkt den Halm dieser Garbe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechne $H^p(\mathbb{C}, \mathcal{O})$ für alle $p \geq 0$ und $H^1(\mathbb{C} \setminus \{p_1, \dots, p_n\}, \mathbb{Z})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Abelschen Gruppen und für alle $n \leq m$ existiere ein Morphismus $\varphi_{n,m} : G_n \to G_m$, so dass die zwei folgenden Eigenschaften gelten.

1. $\varphi_{n,n} = \mathrm{Id}_{G_n}$, für alle n.
2. $\varphi_{n,m_2} = \varphi_{m_1,m_2} \varphi_{n,m_1}$, für alle $n \leq m_1 \leq m_2$.

Sei $\sim$ die Äquivalenzrelation über $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i$, sodass $x_n \sim x_{n'}$ gilt genau dann wenn ein m existiert, sodass $\varphi_{n,m}(x_n) = \varphi_{n',m}(x_{n'})$. Der direkte Limes der Folge (G_n) ist $G := \varinjlim G_i := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} G_i / \sim$

i) Zeige, dass G eine Abelsche Gruppe ist und, dass die kanonischen Abbildungen $\pi_n : G_n \to G$ Homomorphismen sind, sodass $\pi_n = \pi_m \varphi_{n,m}$. Sei H eine Gruppe und $f_n : G_n \to H$ Morphismen, sodass $f_n = f_m \varphi_{n,m}$ gilt. Zeige, dass ein Homomorphismus $f : G \to H$ existiert, sodass $f_n = f \pi_n$ gilt und dass G bezüglich dieser universellen Eigenschaft eindeutig ist.

ii) Sei $G_i = \mathbb{Z}/(p^i \mathbb{Z})$ und $\varphi_{n,m}(1) = p^{m-n}$. Gib eine Präsentation von $\varinjlim G_i$ an.

Prof. Dr. M. Möller WS 2013-14
Quentin Gendron Frankfurt/M., 2.12.2013
Kolja Hept Abgabetermin: 9.12.2013

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\sigma := (1\ 2\ 3 \ldots N) \in S_N$, seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, sodass $\sum a_i \equiv 0$ modulo N, seien $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ geschlossene Wege die genau ein Mal $p_1, \ldots, p_n$ jeweils in positiver Richtung umlaufen.
Die unverzweigte Überlagerung $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ heißt zyklische Überlagerung vom Typ $(a_1, \ldots, a_n)$ und Grad N, falls f die Monodromiedarstellung $\rho(\gamma_i) = \sigma^{a_i}$ hat.
Das Doppelverhältnis von vier Punkten ist $[p_1, p_2, p_3, p_4] := \frac{p_4 - p_2}{p_4 - p_1} \cdot \frac{p_3 - p_1}{p_3 - p_2}$.

i) Zeige, dass $f : X \to \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ zusammenhängend ist, genau dann wenn $\mathrm{ggT}(N, a_1 \ldots, a_n) = 1$ ist.

ii) Seien $f_1 : X_1 \to \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ und $f_2 : X_2 \to \mathbb{P}^1 \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$ zwei zusammenhängende zyklische Überlagerungen von Grad N und Typ $(a_1, \ldots, a_n)$ bzw. $(b_1, \ldots, b_n)$. Zeige, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind.

Zwei biholomorphe Abbildungen $M : \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{q_1, \ldots, q_n\}$ und $\psi : X_1 \to X_2$ existieren, sodass das folgenden Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "f_1"'] & X_2 \arrow[d, "f_2"'] \\ \mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \arrow[r, "M"] & \mathbb{P}^1 \setminus \{q_1, \ldots, q_n\} \end{tikzcd}$$

Eine Permutation $\pi \in S_n$ und ein Element $i \in \mathbb{N}$ existieren, sodass $[p_a, p_b, p_c, p_d] = \left[q_{\pi(a)}, q_{\pi(b)}, q_{\pi(c)}, q_{\pi(d)}\right]$ für alle $a, b, c, d \in \{1, \ldots, n\}$ gilt und $i \cdot a_j = b_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gelten.