Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2013-14
Frankfurt/M., 27.1.2014
Abgabetermin: 3.2.2014

Riemannsche Flächen

Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien X eine Riemannsche Fläche von Geschlecht $g \geq 2$, G die Automorphismengruppe von X und $n = |G|$. Dann ist X/G eine Riemannsche Fläche von Geschlecht γ und $\pi : X \to X/G$ eine Überlagerung verzweigt genau in den Punkten $P \in X$ mit nicht-trivialem Stabilisator G_P. Genauer gilt $\mathrm{ord}_P(\pi) = |G_P|$.

i) Bestimme den Grad der Abbildung $\pi : X \to X/G$ und zeige, dass falls ein Automorphismus $h \in G$ existiert, sodass $h(P) = Q$ gilt, dann gilt $|G_P| = |G_Q|$.

ii) Seien $\{P_1, \ldots, P_k\}$ eine maximale Menge der Punkte in X mit $G_{P_i} \neq \mathrm{Id}$, sodass für alle $P_i \neq P_j$ kein $h \in G$ existiert, sodass $h(P_i) = P_j$ gilt. Sei $\nu_i := |G_{P_i}|$. Zeige, dass $2g - 2 = n\left(2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\nu_i - 1}{\nu_i}\right)$ gilt.

iii) Zeige, dass für $g \geq 2$ die Abschätzung $2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^{k}\left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) \geq \frac{1}{42}$ gilt. Folge aus dieser Abschätzung, dass $|G| \leq 84(g-1)$ gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei P_{2n} das reguläre Polygon mit $2n$ Ecken und X die flache Fläche, die man durch Verkleben der parallelen Kanten erhält.

i) Gebe das Geschlecht von X an und bestimme die Ordnungen der Nullstellen der zugehörigen 1-Form auf X.

ii) Zeige, dass diese Flächen die Entfaltungsflächen bestimmter Dreiecke sind.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine Riemannsche Fläche. Ein Punkt $x \in X$ heißt q-Weierstrasspunkt (abgekürzt mit q-W.P.) wenn ein q-Differential mit einer Nullstelle im x der Ordnung $\geq l(qK)$ existiert. Analog zu dem Fall der 1-Formen, definiert man das q-Gewicht $w_q(x)$ zu x und beweist die Gleichung

$$\sum_x w_q(x) = (g-1)(2q - 1 + l(qK))l(qK).$$

i) Sei X eine hyperelliptische Riemannsche Fläche. Zeige, dass jeder W.P. ein q-W.P für alle $q \geq 1$ ist.

ii) Benutze Aufgabe 9.3, um zu zeigen, dass jede hyperelliptische Riemannsche Fläche Punkte besitzt, die 2-W.P. aber keine W.P. sind.

iii) Für jede Halbgruppe H mit 4 Lücken existiert eine Riemannsche Fläche X von Geschlecht 4 und $x \in X$, sodass die Halbgruppe zu x gleich H ist. Zeige, dass auf einer Riemannsche Fläche von Geschlecht 4 ein W.P. x existiert, der kein 2-W.P. ist