Prof. Dr. M. Möller
Quentin Gendron
Kolja Hept

WS 2011/12
Frankfurt/M., 2. November 2011

Lineare Algebra

Übungsblatt 3[1]

Aufgabe 1

Für einen Ring R sei $R[X]^* := \{P \in R[X] \mid \exists Q \in R[X] : QP = 1\}$ die Menge der in $R[X]$ invertierbaren Polynome.
a) Bestimmen Sie $K[X]^*$ für jeden beliebigen Körper K.
b) Bestimmen Sie $\mathbb{Z}[X]^*$.

Aufgabe 2

a) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 8 & 4-i \\ 2+2i & 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar? Falls ja, bestimmen Sie ihre Inverse.
b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 73 \\ 0 & x & 257\pi \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ invertierbar? Bestimmen Sie in diesen Fällen ihre Inverse.

Aufgabe 3

Wir nennen eine quadratische Matrix über einem Körper *Permutationsmatrix*, wenn sie in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins und sonst nur Nullen enthält. Für jeden Körper K und jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P(K^{n\times n}) := \{A \in K^{n\times n} \mid A \text{ ist eine Permutationsmatrix}\}.$$

Für jedes $\pi \in S_n$ sei $A_\pi := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ mit $a_{ij} := \delta_{i\pi(j)}$[2].
Offenbar ist $A_\pi \in P(K^{n\times n})$. Zeigen Sie, dass für alle $\pi, \rho \in S_n$ gilt:

$$A_{\pi\circ\rho} = A_\pi \cdot A_\rho.$$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie

$$Z := \{A \in K^{n\times n} \mid \forall B \in K^{n\times n} : AB = BA\}.$$

---

[1] *auch im Internet unter* http://www.uni-frankfurt.de/fb/fb12/mathematik/ag/personen/lehnert_ralf/LAWS1112/index.html *und im e-Learning System* OLAT

[2] hierbei ist $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ das *Kronecker-Delta*